Prof. Dr. Peter Berger
Vorlesung: *Raum und Form*

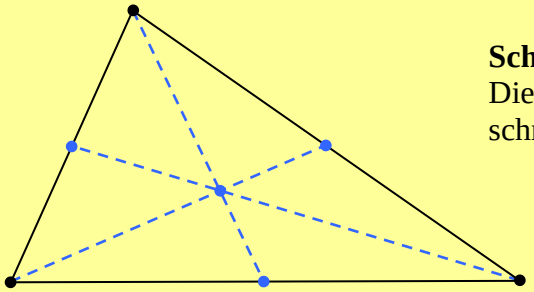
Besondere Punkte im Dreieck

Unter diesen besonderen Punkten versteht man

- den Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden (Schwerlinien)
- den Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden
- den Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten
- den Schnittpunkt der drei Höhen

‚Besonders' daran ist, dass es diese Schnittpunkte überhaupt gibt, denn drei Geraden müssen ja nicht unbedingt durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Dass sie dies bei den genannten Objekten im Dreieck tatsächlich tun, müssen wir also beweisen.

1. Der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden (Schwerlinien)

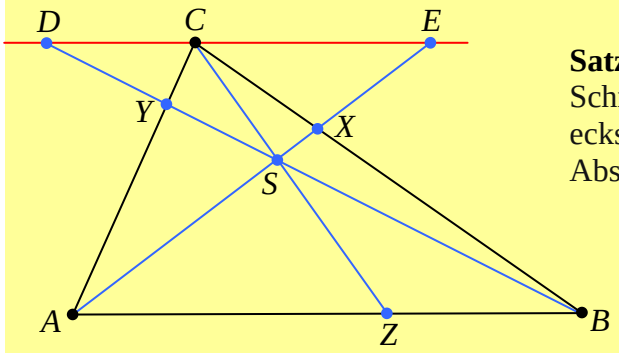


Schwerpunktsatz
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

Die Seitenhalbierenden heißen auch *Schwerlinien* des Dreiecks; ihr Schnittpunkt ist der *Schwerpunkt* des Dreiecks. Wenn Sie ein Dreieck aus Pappe, Holz oder einem anderen homogenen Material konstanter Dicke ausschneiden und seinen Schwerpunkt auf eine Bleistiftspitze setzen, wird das Dreieck in Waage bleiben. Denn im Schwerpunkt eines Körpers gleichen sich alle Kräfte aus, die ihn zum Kippen bringen könnten.

Wir beweisen den Schwerpunktsatz mit Hilfe eines tiefer liegenden Satzes, der von dem italienischen Mathematiker ***Giovanni Ceva (1647-1734)*** entdeckt und bewiesen worden ist.

Geraden, die eine Figur (Dreieck, Kreis etc.) schneiden, nennt man *Transversalen*. Transversalen, die speziell durch eine Dreiecksecke und die gegenüberliegende Dreiecksseite laufen, nennt man *Ecktransversalen*.



Satz von *Ceva*
Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkt, dann ist das Produkt der Abschnittsverhältnisse der Dreiecksseiten gleich 1.

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$

Beweis

1. Zeichne die *Parallele* zu AB durch C.
2. Dann folgt aus den Strahlensätzen:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \quad \text{(Zentrum } S\text{)}$$

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CE}} \quad \text{(Zentrum } X\text{)}$$

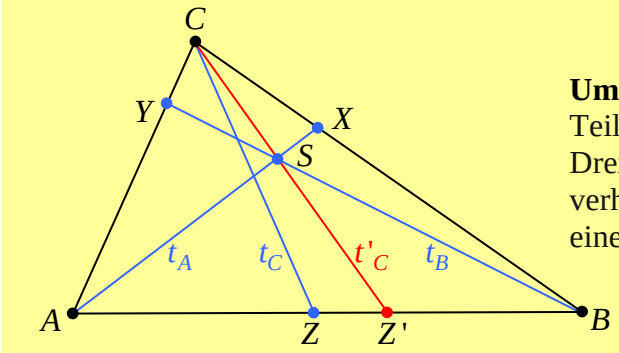
$$\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} \quad \text{(Zentrum } Y\text{)}$$

3. Damit gilt:

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{CE}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 1$$

qed

Es gilt auch die *Umkehrung* des Satzes von Ceva:



Umkehrung des Satzes von *Ceva*
Teilen drei Ecktransversalen eines Dreiecks die Dreiecksseiten so, dass das Produkt der Abschnittsverhältnisse gleich 1 ist, so schneiden sie sich in einem Punkt.

Beweis (indirekt)

1. ***Annahme:*** Die Behauptung wäre ***falsch***. D.h. es würde drei Ecktransversalen t_A, t_B, t_C geben, bei denen das Produkt der Abschnittsverhältnisse gleich 1 ist, die sich aber *nicht* in einem Punkt schneiden.
2. Je zwei Ecktransversalen schneiden sich sicher, z.B. t_A, t_B; ihren Schnittpunkt nennen wir S.
3. Nach Annahme würde dann die Ecktransversale t_C *nicht* durch S gehen.
4. Wir zeichnen als vierte Ecktransversale t'_C diejenige, die durch S (und durch C) geht. Den Schnittpunkt von t'_C mit AB nennen wir Z'. Da t_C und t'_C verschieden sind, müssen auch die Punkte Z und Z' verschieden sein.

5. Für t_A, t_B, t'_C gilt (da sie sich in einem Punkt schneiden) nach dem *Satz von Ceva*:
$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$
6. Für t_A, t_B, t_C gilt nach Voraussetzung:
$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$
7. Daraus folgt sofort:
$$\frac{\overline{AZ'}}{\overline{Z'B}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}$$
8. Das würde aber bedeuten, dass die zwei *verschiedenen* Punkte Z und Z' die Strecke AB beide *im selben* Verhältnis teilen würden. Das ist unmöglich (sobald man einen Punkt nach rechts oder links verschiebt, ändert sich das Verhältnis, in dem er eine Strecke teilt).
9. Also kann die Annahme nicht *wahr* sein. Folglich kann die Behauptung nicht *falsch* sein.

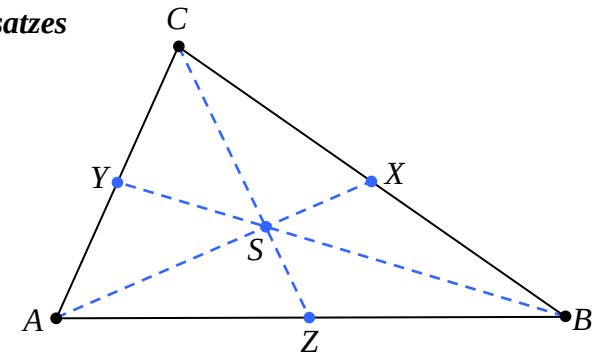
qed

Die beiden Sätze von Ceva lassen sich in einer Äquivalenzaussage zusammenfassen:

Äquivalenzsatz von *Ceva*
Drei Ecktransversalen eines Dreiecks schneiden sich ***genau dann*** in einem Punkt, ***wenn*** das Produkt der Abschnittsverhältnisse der Dreiecksseiten gleich 1 ist.

Mit der Umkehrung des Satzes von Ceva können wir nun leicht den Schwerpunktsatz beweisen:

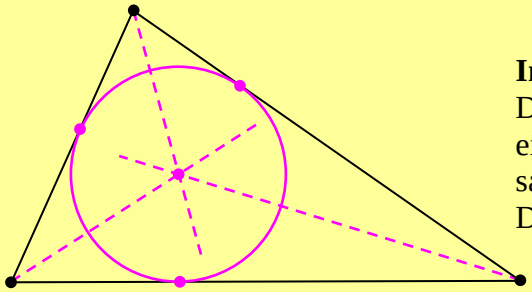
Beweis des Schwerpunktsatzes



1. Wir betrachten die drei Seitenhalbierenden *AX*, *BY*, *CZ*, also spezielle Ecktransversalen.
2. Die Punkte *X*, *Y*, *Z* sind die Seitenmitten des Dreiecks.
3. Daher gilt
$$\overline{AZ} = \overline{ZB} \quad , \quad \overline{BX} = \overline{XC} \quad , \quad \overline{CY} = \overline{YA}$$
4. Also gilt
$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} = 1 \quad , \quad \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = 1 \quad , \quad \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$$
5. Es ist also
$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \frac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
6. Nach der Umkehrung des Satzes von Ceva folgt daraus, dass sich alle drei Ecktransversalen (Seitenhalbierenden) in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

qed

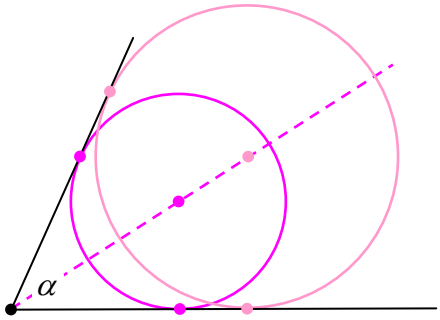
2. Der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden



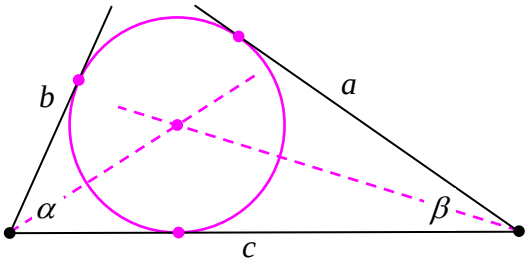
Inkreissatz
Die Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.
Dieser ist der Mittelpunkt des *Inkreises*.

Beweis

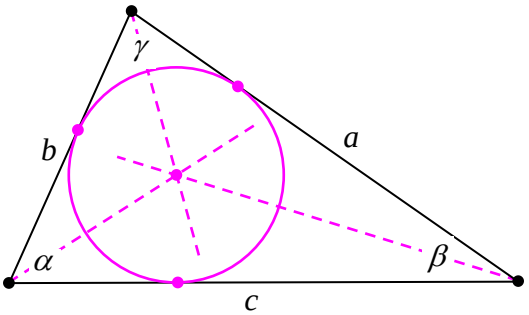
1. Jeder Kreis, der die beiden Schenkel eines Winkels berührt, muss seinen Mittelpunkt auf der *Winkelhalbierenden* des Winkels haben.
   (Anders gesagt: Der *geometrische Ort* aller Mittelpunkte von Kreisen, die beide Schenkel eines Winkels berühren, ist die *Winkelhalbierende*.)



2. Daraus folgt: In einer Zweiwinkelfigur muss der Mittelpunkt eines Kreises, der alle drei Schenkel *a*, *b*, *c* der beiden Winkel berührt, auf den *beiden* Winkelhalbierenden der Winkel α und β liegen. D.h. der Mittelpunkt ist der *Schnittpunkt* der beiden Winkelhalbierenden.

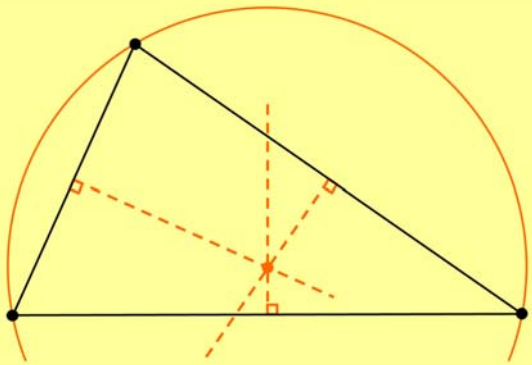


3. Da der Kreis aus 2. alle drei Schenkel *a*, *b*, *c* berührt, berührt er auch die beiden Schenkel des Winkels γ. Der Kreismittelpunkt muss also nach 1. auch auf der Winkelhalbierenden des Winkels γ liegen. Dieser Mittelpunkt liegt demnach auf *allen drei* Winkelhalbierenden. D.h. alle Winkelhalbierenden haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.



qed

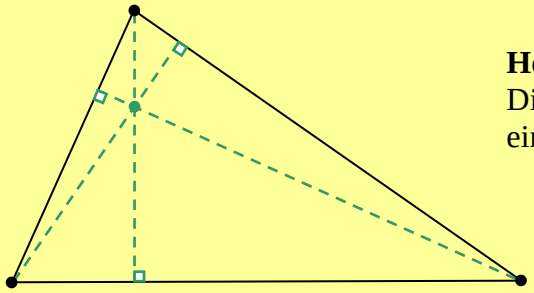
3. Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten



Umkreissatz
Die Mittelsenkrechten der drei Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt. Dieser ist der Mittelpunkt des *Umkreises*.

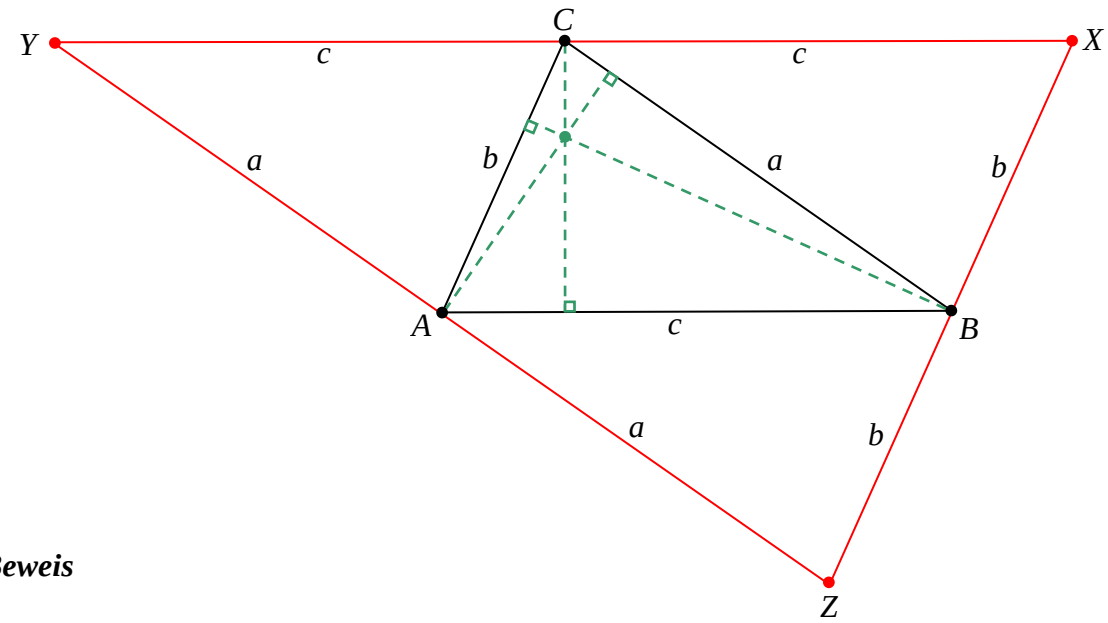
Beweis
Übungsaufgabe! Notieren Sie Ihren Beweis (mit Skizzen) auf diesem Blatt. Er verläuft ganz analog zum Beweis des *Inkreissatzes*. Welchen geometrischen Ort müssen Sie hier verwenden?

4. Der Schnittpunkt der drei Höhen



Höhenschnittpunktsatz
Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

Der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks wird auch als *Orthozentrum* bezeichnet.



Beweis

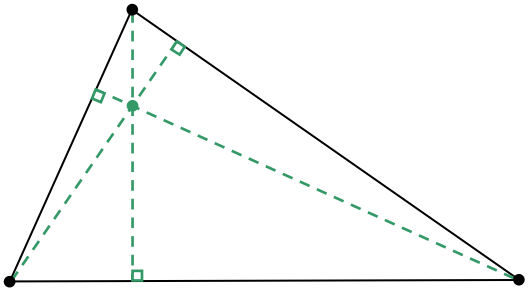
1. Ziehe zu jeder Seite des Dreiecks *ABC* die *Parallele* durch die gegenüberliegende Ecke.
2. Diese drei Parallelen bilden ein neues (großes) Dreieck *XYZ*.
3. Das Originaldreieck zerlegt das große Dreieck in vier Teildreiecke (von denen eines das Originaldreieck selbst ist).
4. Da die Seiten des großen Dreiecks zu denen des Originaldreiecks parallel sind, bildet das Originaldreieck mit jedem der übrigen Teildreiecke ein *Parallelogramm*.
5. Daher ist jede Seite des großen Dreiecks genau doppelt so groß wie die parallele Seite des Originaldreiecks, sodass die Ecken *A,B,C* des Originaldreiecks genau in den Mitten der Seiten des großen Dreiecks liegen.
6. Also sind die *Mittelsenkrechten* des großen Dreiecks zugleich die *Höhen* des Originaldreiecks.
7. Da sich nach dem *Umkreissatz* die Mittelsenkrechten des großen Dreiecks in einem Punkt schneiden, tun dies auch die Höhen des Originaldreiecks.

qed

Anmerkung: (zum Beweis nicht erforderlich) Nach 4. sind alle vier Teildreiecke zueinander *kongruent* sowie zum großen Dreieck *ähnlich*.

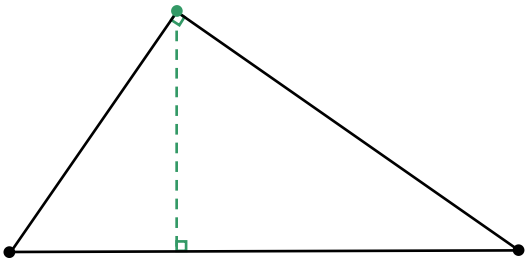
Der Höhenschnittpunkt (das Orthozentrum) liegt …

- im **spitzwinkligen** Dreieck **innerhalb** des Dreiecks:

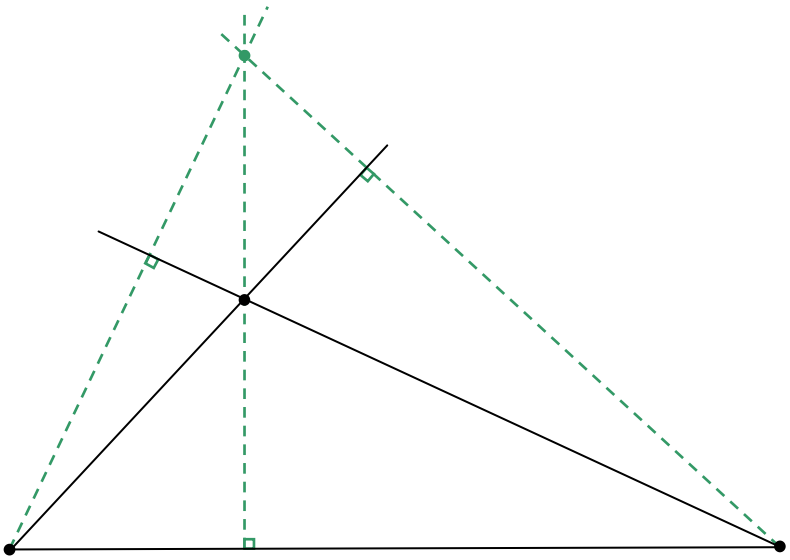


- im **rechtwinkligen** Dreieck **im Scheitel** des rechten Winkels:

Beachte: Die Höhe auf einer Kathete ist die jeweils andere Kathete!



- im **stumpfwinkligen** Dreieck **außerhalb** des Dreiecks:



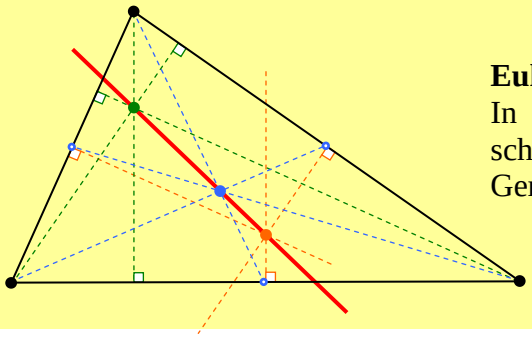
Beachte:

Als ***Höhe*** bezeichnet man

- einerseits die ***Länge*** der Lotstrecke von einer Ecke zur gegenüberliegenden Seite;
- andererseits aber auch die ***Gerade***, auf der diese Lotstrecke liegt.

Dies ist eine sprachliche Bequemlichkeit, die nur dann akzeptabel ist, wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, welches der beiden Objekte jeweils gemeint ist!

4. Der Zusammenhang zwischen Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt



Eulerscher Satz
In jedem Dreieck liegen Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt auf einer Geraden ***(eulersche Gerade)***.

(ohne Beweis)