



Einführung in die Mathematikdidaktik

Prof. Dr. Peter Berger



Stand: 02.04.2017

Inhalt

Anstelle eines Vorworts: Gespräch mit Laura 5

1. **Mathematikdidaktik als Humanwissenschaft** 11
Oder: Guter Unterricht ist schülerzentriert, nicht stoffzentriert

2. **Beobachten – Interpretieren – Verstehen – Handeln** 13
Oder: Guter Unterricht ist beobachtungsgestützt

3. **Das EIS-Prinzip** 17
Oder: Guter Unterricht ist handlungsorientiert

4. **Visualisierung – Eine Strategie des Entdeckens, Verstehens und Begründens in der Arithmetik** 21
Oder: Bilder werden erst produktiv durch Handlungsbezug

5. **Mathematische Weltbilder** 39
Oder: Wie ich Mathe lerne und lehre, wird von meinem subjektiven Bild von der ‚Welt der Mathematik' beeinflusst

6. **Das neue Bild vom Lernen: Konstruktivismus** 47
Oder: Ich lerne nicht durch Belehrung, sondern indem ich mir mein Wissen selbst konstruiere

7. **Die Entwicklung des mathematischen Denkens** 59
Oder: Lernen geht von den Phänomenen zu den Begriffen

8. **Aspekte guten Mathematikunterrichts** 65
Oder: Das einzige sinnvolle ‚Rezept für guten Unterricht' lautet, dass Rezepte fast immer zu schlechtem Unterricht führen

9. **Die „Coactiv-Studie"** 77
Oder: Didaktik ohne Fachwissen bringt überhaupt nichts

Diese Einführung hat eine Leitidee.

Sie verstehen sie am besten, wenn Sie den folgenden kleinen Ausschnitt aus einem Interview lesen, das während einer Radio-Reportage über eine Schule geführt worden ist.



Aus dem Interview:

„Sie sagten mir eben, Sie sind Mathelehrerin."

„Ja."

„Sie unterrichten also Mathematik -"

„Nein."

„Nicht?! Sie sind Mathelehrerin und unterrichten nicht Mathe?!"

„So ist es."

„Was unterrichten Sie denn dann?"

„Ich bin Lehrerin. Ich unterrichte *Menschen*."

Anstelle eines Vorworts

In seinem Buch "What Is Mathematics, Really?" (Was ist Mathematik wirklich?), berichtet der amerikanische Mathematiker Reuben Hersh von einem Gespräch mit seiner Tochter Laura.

Gespräch mit Laura

> Aus: Reuben Hersh: What Is Mathematics, Really? New York: Oxford University Press, 1997. S.xxi–xxiv. (Übers. P. Berger)

Ich hämmerte auf meiner Tastatur herum, als die zwölfjährige Laura hereinkam.

L: Was machst du da?

R: Philosophie der Mathematik.

L: Was ist das denn?

R: Was ist die größte Zahl?

L: Die gibt's gar nicht.

R: Warum nicht?

L: Gibt's einfach nicht. Wie soll es die geben?

R: Sehr gut. Dann: Wie viele Zahlen muss es geben?

L: Unendlich viele, schätz' ich.

R: Ja. Und wo sind die alle?

L: Wo?

R: Ja, wo?

L: Weiß ich nicht. Nirgendwo. In den Köpfen der Menschen, denk' ich mal.

R: Wie viele Zahlen sind in deinem Kopf, was vermutest du?

L: Ich denke, ein paar Millionen Milliarden Billionen.[1]

---

[1] Im Original steht „a few million billion trillion". So geht die *amerikanische* Zählung in Mal-Tausend-Schritten. „One billion" ist also „1000 millions". In der *deutschen* Zählweise ist eine Billion dagegen 1000 Milliarden, also 1 Million Millionen. Wenn wir in Mal-Tausend-Schritten zählen, sagen wir also nicht „Million, Billion, Trillion, usw.", sondern „Million, Milli-

R: Dann hat jeder vielleicht so ein paar Millionen Milliarden Billionen?

L: Vermutlich.

R: Wie viele Menschen leben jetzt wohl so auf diesem Planeten?

L: Weiß nicht. Wahrscheinlich Milliarden.

R: Stimmt. Würdest du sagen, weniger als 10 Milliarden?

L: Ja gut.

R: Wenn jeder eine Million Milliarden Billionen im Kopf hat, dann können wir alle ihre Zahlen zusammenzählen, indem wir 10 Millionen mit einer Million Milliarden Billionen multiplizieren. Stimmt's?

L: Klingt vernünftig.

R: Wäre diese Zahl unendlich?

L: Jedenfalls nahe dran.

R: Dann wäre es die größte Zahl, oder?

L: Moment mal. Das hast du schon mal gefragt. Und da hab' ich gesagt, dass es keine größte Zahl geben kann.

R: Also gibt es in Wirklichkeit eine Zahl, die größer ist als die größte Zahl, die irgend jemand im Kopf hat?

L: Stimmt.

R: Wo ist diese Zahl, wenn sie niemand im Kopf hat?

L: Vielleicht ist es die Anzahl der Sandkörner im Universum.

R: Nein. Die kleinsten Dinge im Universum sind vermutlich die Elektronen. Viel kleiner als Sandkörner. Kosmologen sagen, dass die Anzahl der Elektronen im Universum kleiner ist als eine 1 mit 23 Nullen. Aber 10 Millionen mal eine Million Milliarden Billionen ist eine 1 mit 1 + 9 + 6 + 9 + 12 Nullen. Das ist eine 1 mit 37 Nullen, und das ist Hundert Billionen mal so viel wie eine 1 mit 23 Nullen, was nach den Kosmologen wiederum mehr ist als die Zahl der Elementarteilchen im Universum.

L: Kosmologen sind Leute, die Sachen über den Kosmos rauskriegen?

R: Korrekt.

L: Irre.

R: Also gibt es weit mehr Zahlen als Elementarteilchen im ganzen Kosmos.

L: Ganz schön verrückt!

---

arde, Billion, Billiarde, Trillion, Trilliarde usw." Die deutsche Sprechweise ist – wie so oft – umständlicher.

R: Vergessen wir mal „Wo“. Reden wir von „Wann“. Wie lange, glaubst du, gibt es schon Zahlen?

L: Ganz schön lange.

R: Haben sie dir in der Schule was vom Urknall erzählt?

L: Hab’ ich von gehört. Das war so vor fünfzehn Milliarden Jahren. Als der Kosmos anfing.

R: Glaubst du, dass es zur Zeit des Urknalls Zahlen gegeben hat?

L: Ja, ich denke doch. Schon um zu zählen, was so passierte, oder?

R: Und davor? Gab es irgendwelche Zahlen vor dem Urknall? Vielleicht ganz kleine, wie 1, 2, 3?

L: Zahlen, bevor es ein Universum gegeben hat?

R: Was glaubst du?

L: Scheint so, als könnte es nichts geben, bevor es überhaupt irgendwas gab, wenn du verstehst was ich meine. Aber Zahlen muss es doch immer geben, auch wenn es kein Universum gibt.

R: Nimm deine Zahl von eben, die 1 mit 37 Nullen, und gib ihr einen Namen, irgendeinen Namen.

L: Wie wär’s mit ‚Gazillion’?[2]

R: Gut. Kannst du dir eine Gazillion von irgendwas vorstellen?

L: O Mann, nee.

R: Könntest du, oder irgendwer den du kennst, jemals so weit zählen?

L: Nein. Aber ich glaube, ein Computer schon.

R: Nein. Bevor der schnellste Computer, der jemals gebaut wird, so weit zählen könnte, gibt es die Erde und die Sonne nicht mehr.

L: Wow!

R: Was ist eine Gazillion plus eine Gazillion?

L: Zwei Gazillionen, ganz einfach!

R: Woher weißt du das?

L: Weil ein Irgendwas und noch ein Irgendwas zwei Irgendwas sind, egal was.

R: Was ist mit einem kleinen Mäuschen und einem bösen Kater? Oder ein weibliches Kaninchen und ein männliches Kaninchen?

---

2 In den USA wird man „gazumped“, wenn man (beim Hauskauf) von jemandem überboten wird.

L: Das ist doch Quatsch! Das ist nicht Mathe, das ist Biologie.

R: Du hast noch nie eine Gazillion oder etwas ähnliches gesehen. Woher willst du wissen, dass Gazillionen nicht so sind wie Kaninchen?

L: Zahlen können nicht wie Kaninchen sein.

R: Wenn ich eine Gazillion nehme und Eins addiere, was habe ich dann?

L: Eine Gazillion und Eins, genau wie Ein Tausend und Eins oder Eine Million und Eins.

R: Kann es noch eine Zahl geben zwischen Eine Gazillion und Eine Gazillion und Eins?

L: Nein, weil Eine Gazillion und Eins die nächste Zahl nach Eine Gazillion ist.

R: Aber wie kannst du wissen, dass sich die Zahlen derart weit oben nicht zusammenquetschen und zwischen einander pfuschen?

L: Das können sie nicht. Sie müssen in Schritten gehen. Immer ein Schritt auf einmal.

R: Aber woher weißt du, was sie so weit draußen machen, wo du noch nie gewesen bist?

L: Komm, jetzt machst du Spaß.

R: Kann sein. Welche Farbe hat dieser Bleistift?

L: Blau.

R: Sicher?

L: Natürlich bin ich sicher.

R: Vielleicht herrscht draußen ein besonderes Licht, das die Farben verfälscht? Vielleicht siehst du die Farben in einem anderen Licht anders?

L: Das glaube ich nicht.

R: Nein, glauben tust du das nicht. Aber bist du dir vollkommen sicher, dass es vollkommen unmöglich ist?

L: Nein, vollkommen nicht, schätz' ich.

R: Du hast doch schon mal von Farbenblindheit gehört?

L: Ja, hab' ich.

R: Ist es möglich, dass jemand farbenblind wird, ohne es zu merken?

L: Ich weiß nicht. Könnte sein.

R: Könnte so ein Mensch glauben, dass der Bleistift blau ist, wenn er in Wirklichkeit orange wäre, weil er unbemerkt farbenblind geworden ist?

L: Könnte er vielleicht. Was soll das? Wen kümmert das?

R: Du siehst einen blauen Bleistift, aber du bist nicht 100% sicher, dass er wirklich blau ist, nur so gut wie sicher. Richtig?

L: Gewiss, richtig.

R: Und wie steht's mit ‚eine Gazillion plus eine Gazillion macht zwei Gazillionen'? Bist du dir hier vollkommen sicher?

L: Ja, bin ich.

R: Keine Möglichkeit, dass das falsch sein könnte?

L: Keine Möglichkeit.

R: Du hast niemals eine Gazillion gesehen. Und doch bist du bei Gazillionen sicherer als bei Bleistiften, die du sehen und fühlen und schmecken und riechen kannst. Wie kommst du dazu, so viel über Gazillionen zu wissen?

L: Ist das Philosophie der Mathematik?

R: Damit fängt sie an.

Motto:
„Die Menschen stärken und die Sachen klären“
Hartmut von Hentig

1. Mathematikdidaktik als Humanwissenschaft
Oder: Guter Unterricht ist schülerzentriert, nicht stoffzentriert

In der Mathematikdidaktik interessieren wir uns nicht für mathematische Probleme, sondern dafür, was Menschen denken, fühlen oder tun, die Mathe treiben.

> **Wir blicken also nicht auf die Mathematik,**
> **sondern auf Menschen.**

Mathematikdidaktik ist also keine Teildisziplin der Mathematik, sondern eine Humanwissenschaft im Kontext von Soziologie/Ethnologie, Psychologie, Kognitionswissenschaft (Neurowissenschaft, Kognitive Linguistik) und Mathematik (vgl. die Abbildung auf der nächsten Seite).

Mädchen, die Fußball spielen, sind für uns Fußballerinnen – egal, ob sie in einem Verein organisiert sind, ob sie Geld dafür bekommen, ob sie gut spielen oder nicht. Und ebenso sagen wir:

> **Für uns sind alle Menschen, die Mathe treiben, Mathematikerinnen (oder Mathematiker). Egal, ob sie dafür bezahlt werden, wie alt sie sind, wie gut sie Mathe können …**

Und natürlich sind Sie alle in dieser Vorlesung aus demselben Grunde MathematikdidaktikerInnen (oder Mathematikdidaktiker). Was wir sind, entscheidet sich nicht daran, wie gut wir darin schon sind, sondern allein darin, was wir tun.

Wir MathematikdidaktikerInnen interessieren uns also dafür, wie Mathematiker denken und fühlen und was sie so tun. Wir interessieren uns aber zum Beispiel nicht dafür, wie wir jemand in möglichst kurzer Zeit soviel Mathe einpauken können, dass er/sie die nächste Mathearbeit nicht ‚daneben schreibt'. Oder wie jemand sich möglichst viele Formeln merken kann. Wir interessieren uns für eine ganze Menge von Fragen nicht, die viele Leute lange Zeit für sehr wichtig gehalten haben.

Unser wichtigstes pädagogisches Ziel steht auf dieser Seite ganz oben (Motto). Für den Mathematikunterricht können wir ein Motto formulieren, das damit viel zu tun hat:

> **Wir wollen nicht Kindern Mathe beibringen –**
> **sondern wir wollen Kindern dabei helfen,**
> **MathematikerInnen zu sein.**

Was das genauer heißt und wie wir das schaffen können, ist allerdings eine Frage, die ziemlich viele weitere Fragen aufwirft und uns oft vor Entscheidungen stellt, was wir eigentlich wollen (und was nicht) und warum wir das wollen sollten und dürfen.

Menschen und ihr Denken, Fühlen und Handeln

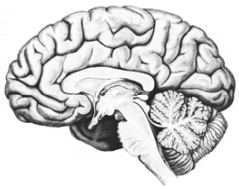
Die drei Hauptperspektiven der Mathematikdidaktik



Gesellschaft
Kultur



Individuum



Gehirn
Geist

Soziologie Ethnologie	Psychologie	Neurowissenschaft Kognitive Linguistik

2. Beobachten–Interpretieren–Verstehen–Handeln
Oder: Guter Unterricht ist beobachtungsgestützt

Sie gehen zum Arzt. Er begrüßt Sie und gibt Ihnen erst einmal eine Spritze. Dann fragt er: „Was führt Sie zu mir?“ – Wie reagieren Sie?

Denken Sie an Ihren eigenen Matheunterricht zurück. Wie viel Zeit pro Stunde hat ihre Lehrerin gelehrt, erklärt, an der Tafel gestanden, Fragen gestellt, verbessert? Und wie lange hat sie scheinbar nichts getan und nur still beobachtet? – Sehen Sie einen Zusammenhang mit der Situation beim Arzt?

Sie werden Ihrem Arzt wahrscheinlich sagen: „Keine Therapie ohne Diagnose!“ Und ebenso können Sie als Lehrerin auch nicht den größten Teil der Unterrichtsstunde damit zubringen, dass Sie selbst aktiv sind. Sie brauchen einfach immer wieder ausreichende Zeiträume, in denen Sie sich ein Bild von Ihren Schülerinnen und Schülern machen.

- **Auch Lehrer müssen Diagnosen stellen.**
- **Diagnosen erfordern intensive Beobachtung.**
- **Keine Therapie ohne Diagnose – kein Lehrerhandeln ohne Beobachtung!**
- **Guter Unterricht lässt Ihnen immer auch Zeit zur Beobachtung.**
- **Beobachten kann man lernen – und muss man lernen.**
- **Bevorzugen Sie beobachtungsgestützten Unterricht: Beobachten – Interpretieren – Verstehen – Handeln!**

Der Lernprozeß, den Sie selbst während einer Unterrichtsstunde machen, ist ebenso wichtig wie die Lernprozesse Ihrer Schüler. Ihre SchülerInnen lernen etwas über Mathematik – Sie lernen etwas über Ihre SchülerInnen. Deshalb müssen Sie in Ihrem Studium lernen, MathematikdidaktikerIn zu sein.

Wieso gibt es so wenig beobachtungsgestützten Unterricht?

Als Lehrer stehe ich häufig unter einem ständigen Handlungsdruck. Ich rede viel, höre wenig zu, ich ‚sage an’, dirigiere. Irgendwie meine ich, alles immer wieder genau erklären und alles regeln zu müssen. Eigentlich habe ich einfach Angst, dass Kinder ohne meine Dauereinwirkung nichts lernen und nichts Sinnvolles tun würden. Und vor allem, dass Mathe ihnen einfach keine Freude machen kann. Ich kann es mir einfach nicht anders vorstellen.

Doch wenn wir Unterricht intensiv und möglichst unvoreingenommen beobachten, dann machen wir regelmäßig die gleiche Beobachtung: Diese Angst ist völlig unbegründet. Kinder lernen – wenn man sie nur lässt – ‚aus sich heraus’, weitgehend selbstbestimmt und selbst-motiviert – und erfolgreich! Kinder sind Experten in eigener Sache – sie kennen sich selbst und ihre Angelegenheiten oft weit besser, als wir Erwachsenen es ihnen zutrauen. Und sie mögen Mathematik – wenn man ihnen nicht die Chance zu Erfolgserlebnissen nimmt, und

wenn man nicht dauernd einredet, Mathe sei schwer und langweilig, und Misserfolg hätte hier katastrophale Folgen (viele Eltern und manche Lehrer neigen dazu, sich mit Parolen gegen die Schule den Kindern anzubiedern). In der Erziehung wimmelt es nur so von ‚selbsterfüllenden Prophezeiungen'. Wenn Sie also schon etwas prophezeien wollen, dann immer Positives!

Die Vorstellung, ständig alles regeln zu müssen, ist eine Zwangsvorstellung. Wir sollen unseren Blick stets auf die Kinder richten, aber sie sollen nicht immer ihren Blick auf uns richten müssen. Wir sind nicht ‚nur für die Kinder da', wir dürfen uns selbst nicht vergessen – nur wer mit sich selbst zufrieden und im Reinen ist, kann offen für andere sein. Nehmen wir uns zu Herzen, was der Erfinder der ‚klientenzentrierten' Psychotherapie, C. R. Rogers über den weisen Umgang mit anderen Menschen sagt:

> „Je mehr ich gegenüber den Realitäten in mir und im anderen offen bin, desto weniger verfalle ich dem Wunsch herbeizustürzen und ‚die Dinge in Ordnung zu bringen'. Je mehr ich versuche, mir und den Erfahrungsvorgängen, die sich in mir ereignen, zuzuhören, und je mehr ich versuche, die gleiche **zuhörende Einstellung** auf einen anderen Menschen auszudehnen, desto mehr **Respekt** empfinde ich **vor den komplexen Prozessen des Lebens**. So werde ich immer weniger dazu neigen, hinzueilen, um die Dinge in Ordnung zu bringen, Ziele zu setzen, Menschen zu formen, sie in die Richtung zu manipulieren und zu schieben, in die ich sie haben möchte. **Ich bin weit mehr damit zufrieden, einfach ich selbst zu sein und einen anderen sich selbst sein zu lassen.** […]
>
> Aber das ist gerade der **paradoxe Aspekt** meiner Erfahrung: je mehr ich einfach gewillt bin, inmitten dieser ganzen Komplexität des Lebens ich selbst zu sein, und je mehr ich gewillt bin, die Realitäten in mir selbst und im anderen zu verstehen und zu akzeptieren, **desto mehr scheint Veränderung in Gang zu kommen**."
>
> Carl Ransom Rogers (1902–1987), Amerikanischer Psychologe, Begründer der sog. **‚klientenzentrierten' Psychotherapie**, die auf einer Person-Person-Beziehung zwischen Therapeut und ‚Klient' (Patient) basiert und beide gleichberechtigt neben einander stellt.

Beobachten und Interpretieren kann man lernen – ein kleines Training

Können Sie sich in Mathematiker, große wie kleine, hineindenken? So, dass Sie vorhersagen können, was sie als nächstes sagen bzw. tun werden? Versuchen Sie es einmal. Die folgenden drei Beispiele stehen mit anderem Hintergrund in dem sehr lesenswerten Buch: Hartmut Spiegel & Christoph Selter (2003): Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Seelze-Velber: Kallmeyer. Hier sollen sie zu einem Interpretationstraining für Sie genutzt werden. Können Sie sich ausmalen, wie die Geschichten ausgehen? (Lesen Sie das Buch!)

1. Der Mathematiker Norbert Wiener

Der Mathematiker Norbert Wiener wurde einmal auf dem Unigelände von einem Studenten angesprochen, der eine Frage hatte. Wiener blieb stehen und erörterte zusammen mit dem Studenten das Problem. Als sie fertig waren, fragte er: „Bin ich aus dieser Richtung oder entgegengesetzt gekommen, als Sie mich ansprachen?“ Der Student nannte die Richtung, aus der er gekommen war. …

(Erzählen Sie die Geschichte weiter. Überlegen Sie erst einige Minuten. Lesen Sie erst dann die Fortsetzung unten auf dieser Seite).

2. Der Mathematiker Fabian

Die Familie sitzt beim Abendbrot. Der dreieinhalbjährige Fabian zählt seine Häppchen. „Eins – zwei – drei – vier – fünf – sechs – sieben – acht – neun.“ Dann ißt er ein Häppchen auf und zählt erneut: „Eins – zwei – drei – vier – fünf – sieben – acht – neun.“ „Du hast die Sechs vergessen“, korrigiere ich ihn, „es heißt doch fünf – sechs – sieben.“ Erstaunt sieht er mich an …

(Erzählen Sie die Geschichte weiter. Überlegen Sie erst einige Minuten. Lesen Sie erst dann die Fortsetzung unten auf dieser Seite).

3. Die Mathematikerin Lisa

Vor einigen Tagen saßen wir alle gemeinsam am Tisch und stellten fest, dass Lisas Mutter 4 Jahre jünger ist als ich. Lisas Mutter ist 30 Jahre alt. Spontan fragte ich Lisa, ob sie ausrechnen könne, wie alt ich denn bin. Sie antwortete mir: …

(Erzählen Sie die Geschichte weiter. Überlegen Sie erst einige Minuten. Lesen Sie erst dann die Fortsetzung unten auf dieser Seite).

Norbert

… „Aha“, sagte Wiener, „also habe ich noch nicht zu Mittag gegessen“. Und setzte seinen Weg fort.

Fabian

… und erklärt: „Nein, die hab’ ich nicht vergessen. Die ist doch in meinem Bauch.“

Lisa

… Das weiß ich, aber ich sage es nicht.“ Nach einer kurzen Pause: „Hinterher ist es falsch, und ich werde wieder ausgemeckert.“

3. Das EIS-Prinzip

Oder: Guter Unterricht ist handlungsorientiert

Die Mathematik wird zumeist als eine formale Wissenschaft angesehen, die ihre Erkenntnisse symbolisch ausdrückt. Doch auch jede andere Disziplin bewegt sich auf der symbolischen Ebene, denn alle drücken ihre Ergebnisse irgendwie sprachlich aus. Und Sprache ist nun einmal immer ein ‚symbolisches Spiel'. Wir können uns Menschen sogar dadurch definieren: Der Mensch ist eine ‚symbolische Spezies'.

Auch in unseren Köpfen wird Wissen symbolisch ‚gespeichert' (Fachbegriff: ‚repräsentiert'), zum Beispiel mit Worten oder Formeln. Aber die symbolische Form ist nicht die einzige Form der Wissensrepräsentation in unserem Gehirn. Ja, es ist nicht einmal die wichtigste. Die Sprache der Symbole verstehen wir nämlich erst, nachdem wir eine andere Sprache gelernt haben: die Sprache der Bilder. Niemand kann irgendeinen Tatbestand symbolisch erfassen und ‚abspeichern', wenn sie/er nicht zuvor gelernt hat, etwas ‚durch Bilder' zu erfassen und abzuspeichern. Aber auch die Sprache der Bilder verstehen wir nicht sofort.

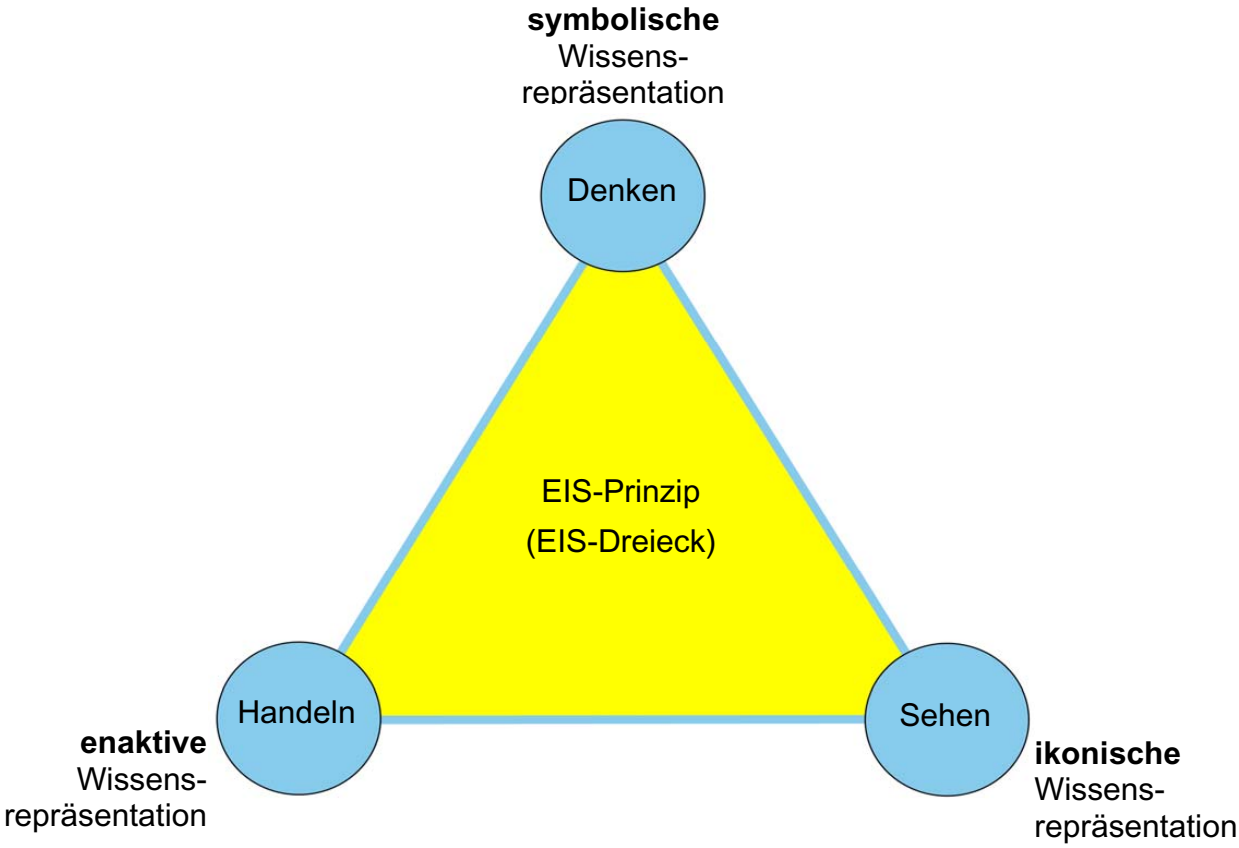
Lernpsychologisch betrachtet sind Bilder immer ‚Memos für etwas anderes'. Und zwar nicht für einen Gegenstand, obwohl man das zumeist glaubt, sondern für eine Handlung (genauer: einen Komplex von Handlungen). So ist ein Foto eines Menschen nur scheinbar ein Memo für dessen Aussehen. In Wirklichkeit verbinde ich mit einem solchen Bild viel mehr: Es kann zum Beispiel in mir einen ganzen ‚Film von Erinnerungen' wachrufen; ich sehe diesen Menschen vielleicht in konkreten Situationen, ich sehe ihn also handeln, und ich sehe mich handeln. Das Bild speichert mein Handlungswissen im Zusammenhang mit diesem Menschen.

Der amerikanische Lernpsychologe Jerome K. Bruner hat zum ersten Mal auf diesen Zusammenhang zwischen symbolischen, ikonischen und enaktiven Formen der Wissensgewinnung, -verarbeitung und -speicherung aufmerksam gemacht. Während Bruner darin – weil er den entwicklungspsychologischen Aspekt im Vordergrund sah – vor allem den Aspekt von ‚Stufen' (Niveaus) betonte, die in einem zeitlichen Nacheinander stehen (und damit eine Entwicklungshierarchie bilden), steht für uns heute eher die Tatsache im Vordergrund, dass die drei Formen untereinander immer in Verbindung bleiben: ich kann zum Beispiel von der symbolischen Form immer wieder ‚nach Bedarf' auf die Ebene der Bilder oder auf die der Handlungen hinüberwechseln.

Zwar gibt es in der Entwicklung des Individuums wirklich eine Reihenfolge zunehmender Abstraktion (Entwicklungshierarchie), nämlich:

zuerst: enaktiv / Handeln / ‚Hand'
dann: ikonisch / Sehen / ‚Auge'
schließlich: symbolisch / Denken / ‚Kopf'

Doch es handelt sich nicht um Niveaus, welche die jeweils vorangehenden ablösen/ersetzen/verdrängen. Vielmehr um fortschreitende Abstraktionen der ursprünglichen Niveaus, die weiterhin aktiv und wichtig bleiben. Die ‚abstrakteren' Niveaus werden vom Individuum nur dann sicher beherrscht, wenn es sie durch Rückgriff auf elementare Niveaus re-konkretisieren kann, und zwar jederzeit.



Piaget: „Denken ist vorgestelltes Handeln."

Ohne in einem bestimmten Problembereich zuvor intensive Erfahrungen mit konkretem problemlösenden Handeln (enaktive Wissensrepräsentation) gesammelt zu haben, kann ich mit noch so schönen und anschaulichen Bildern (ikonische Wissensrepräsentation) nicht wirklich etwas anfangen. Ich muss erst ausführlich, genügend lange und genügend vielfältig (über den Weg des Handelns) lernen, solche Bilder als bildlich komprimierte und suggestive Handlungsanweisungen zu verstehen, gewissermaßen als ‚Schnappschüsse von Handlungen'.

Erst wenn ich mit Bildern so umgehen kann, dass sie für mich ‚fast automatisch' (beim bloßen Betrachten) die gedankliche Rekonstruktion von imaginären (manchmal aber auch realen) Handlungsabläufen auslösen (die in ihnen codiert sind), kann ich die nächste Abstraktionsstufe betreten: den konstruktiven Umgang mit noch abstrakteren Darstellungsformen wie sprachlichen Beschreibun-

gen und Begründungen oder mit mathematischen Formeln (beides sind symbolische Wissensrepräsentationen).

Beim Umgang mit Bildern, Diagrammen, Modellen (ikonische Ebene) wie auch im Umgang mit formalen, formelhaften Ausdrucksformen (symbolische Ebene: Sprache, mathematische Formeln etc.) werde ich immer wieder – manchmal als ‚Rettungsanker', manchmal einfach nur aus ‚Lust am konkreten Tun' – mit Erfolg auf die Ebene des wirklichen Handelns (enaktive Ebene) zurückkehren.

Die Abstraktionsstufen *enaktiv – ikonisch – symbolisch* erreiche ich in meiner Denkentwicklung zwar nacheinander, in der Entwicklung bauen sie ja aufeinander auf. Doch ich verlasse in meiner Entwicklung keine dieser drei Ebenen jemals ganz, nicht endgültig. Immer wieder kehre ich von einer abstrakteren Ebene auf eine konkretere zurück (und von einer konkreteren wieder zu einer abstrakteren). Bildlich: Sie bilden keine ‚Treppe', die ich nur hinaufsteige, sondern es sind drei benachbarte ‚Räume' meiner Wohnung, in jedem halte ich mich immer wieder einmal gern auf.

Übrigens kann mir niemand vorschreiben, wann ich mich in welchem Raum aufzuhalten habe. Ob ich ein Problem diesmal enaktiv, ikonisch oder symbolisch darstelle und zu lösen versuche (oder in irgendeiner Kombination davon), ist allein meine Sache. Wer mich da gängeln will, muss einfach einsehen, dass das nicht funktioniert. Wer mir den Lösungsweg vorschreiben will, soll ihn lieber gleich selbst gehen. Vielleicht hat er (oder sie) das ja auch getan und meint nun, dies sei der einzige oder der beste. Für mich ist aber immer der Weg der beste, auf dem ich gerade bin. Und wenn es ein Holzweg sein sollte, dann muss ich selbst das für mich herausfinden. Manche(r) hat auf den verlassenen Holzwegen anderer Leute schon die tollsten Entdeckungen gemacht …

Aufgabe:
Finden Sie den Weg von der symbolischen Ebene auf die enaktive Ebene

Alle mathematischen Formeln (zumindest in der Schule) sind symbolische Darstellungen von ursprünglich ganz konkreten Handlungsabläufen. Das haben die meisten Menschen nur leider vergessen. Sie auch? Wie können Sie die folgenden Beispiele in konkrete Handlungen übersetzen? Denken Sie ruhig einen Tag lang darüber nach. (Lesen Sie erst morgen die nächsten Seiten …)

1. Sie kennen Möglichkeiten, durch konkretes Handeln erlebbar zu machen, dass $12:3=4$ ist. Nennen Sie ein paar gute Beispiele. – Aber wie können wir konkret handelnd erleben, was $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ ist? (Sagen Sie jetzt nur nichts über ‚Multiplizieren mit dem Kehrwert', denn das ist so formal wie es nur sein kann.)
2. Sie wissen natürlich, was Sie alles tun können, um die Gleichung $5x+2=3x+6$ zu lösen. Finden Sie eine Handlungssituation, in der ein Kind genau das auch tut, konkret und ganz natürlich – obwohl es noch überhaupt keine Ahnung von Gleichungen hat.

4. Visualisierung – Eine Strategie des Entdeckens, Verstehens und Begründens in der Arithmetik

Oder: Bilder werden erst produktiv durch Handlungsbezug

Ein Bild sagt bekanntlich mehr als tausend Worte. Das EIS-Prinzip zeigt uns aber, dass Bilder nur dann neue Erkenntnisse liefern (nur dann ‚produktiv' sind), wenn sie Handlungsbezug haben. Visualisierung (das Sichtbarmachen) ist sicher eine gute Strategie im Mathematikunterricht, und auf den ersten Blick wird auch wirklich viel visualisiert: Betrachten wir nur die zahlreichen schönen Bilder in Schulbüchern und auf den Tafeln/Tageslichtprojektoren im Klassenraum.

Bei genauerem Hinsehen müssen wir unseren ersten Eindruck aber kritisch revidieren: Es wird zwar viel *illustriert*, doch wenig *visualisiert*. Was damit gemeint ist, was Visualisieren eigentlich bedeutet, soll in diesem Kapitel an einem ausführlichen Beispiel aus dem Arithmetikunterricht demonstriert werden. Es geht hier darum, dass wir die ikonische Ebene und die enaktive in einen möglichst engen und natürlichen Zusammenhang bringen; dann können wir (und die jungen MathematikerInnen in unserer Klasse) bequem je nach Bedarf zwischen beiden Ebenen hin-und-her-wechseln. Das heißt, wir können uns leicht und versiert in zwei uns vertrauten Umgebungen bewegen. Das Ergebnis ist, dass wir mathematische Sachverhalte uns sehr konkret und sehr anschaulich (ja ‚handgreiflich', eben enaktiv) vorstellen können, während andere Leute sie vielleicht als ziemlich abstrakt und formal empfinden.

Einstieg: Lulus Pralinenproblem

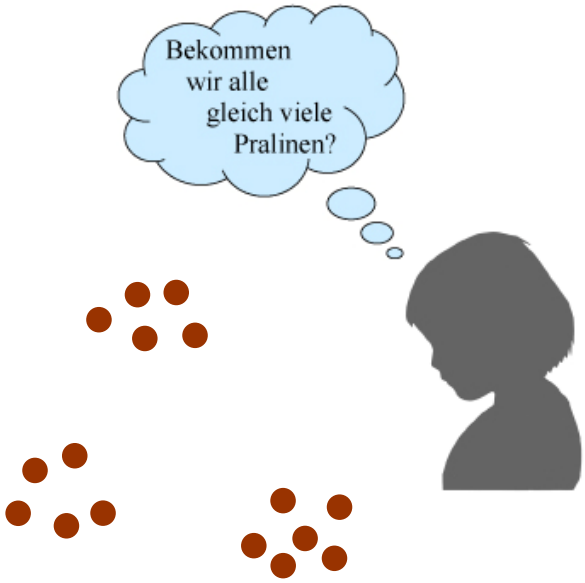
Zu Beginn möchte ich Ihnen von meiner damals fünfjährigen Tochter Lulu erzählen. Und von Lulus Pralinenproblem. Lulu hatte vom Nikolaus Pralinen bekommen. Und die wollte sie mit Mama und Papa teilen. Aber bekanntlich muss ja auch der großzügigste Mensch aufpassen, dass er selbst nicht zu kurz kommt. Lulu kannte die Pralinen – sie waren wirklich sehr lecker. Und vielleicht lag es daran, dass plötzlich eine Frage bei Lulu auftauchte, die ihr keine Ruhe mehr ließ: „Bekommt denn jeder von uns gleich viel?"

Was würden Sie denn an Lulus Stelle tun? Vielleicht würden Sie dividieren. Und vielleicht würden Sie deshalb fragen, wie viele Pralinen es denn waren. Aber Lulu brauchte die Pralinen nicht zu zählen. Sie hatte die Pralinen ja zur Hand. Sie konnte damit unmittelbar etwas tun. Und natürlich hat Lulu nicht dividiert. Das kann man in ihrem Alter noch nicht. Vielleicht können Sie erraten, was Lulu gemacht haben könnte?

Sie hatte drei Sessel, einen für Mama, einen für Papa und einen für sich selbst, und in die verteilte sie nun die Pralinen. (Übrigens waren es keine Ledersessel, und die Pralinen waren vom vielen Anfassen schon ziemlich weich; und daher

haben wir die Spuren von Lulus erstem gelösten Verteilungsproblem noch heute vor Augen …)

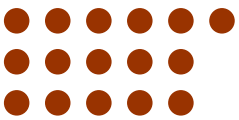
Es wäre schön, wenn ich jetzt sagen könnte, dass Lulu ihr Problem gelöst hat. Doch die Wirklichkeit ist selten ideal. Beim Mathematik-Lernen ist sie es auch nicht. Lulu hat einen Fehler gemacht (s. Abb.). Ihre Verteilung scheint aufzugehen, aber in Wirklichkeit geht sie natürlich nicht auf. Es müsste eine Praline übrig bleiben. Das hat Lulu nicht gemerkt. Aber Lulu hat ein grundlegendes mathematisches Prinzip entdeckt. Mit anderen Worten: Sie hat gehandelt wie eine Mathematikerin.



‚Handeln wie eine Mathematikerin' heißt ja nicht, keine Fehler zu machen. Sondern es heißt, eine bestimmte Art von Fragen zu stellen, bestimmte Dinge zu tun. Oder: Dinge auf eine bestimmte Weise zu tun.

Kinder machen Tag für Tag Entdeckungen. Auch mathematische. Aber wir Erwachsenen sind oft zu verblendet, um diese Entdeckungen zu würdigen. Wir Erwachsenen haben zumeist – wie Hans Freudenthal das genannt hat – immer schon die fertige Mathematik im Kopf. Und darum sehen wir oft gar nicht die schrittweise entstehende Mathematik, die von Kindern in ihrem Spiel und ihrem Alltagshandeln entdeckt wird. In ihrer täglichen Welt-Eroberung.

Vielleicht wird Lulu als nächstes entdecken, dass sie die Pralinen besser auf diese Weise ordnet:

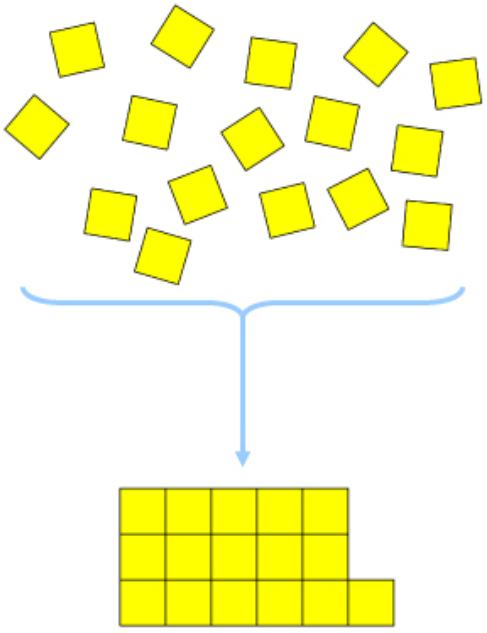


So kann ich keinen Fehler machen. Ich sehe sofort, dass eine Praline übrig bleibt. Und dass jede der 3 Personen 5 Pralinen bekommt. Oder umgekehrt je-

de von 5 Personen 3 Pralinen. Das ist gewissermaßen die innere Struktur dieser Zahl, dieser Anzahl von Pralinen.

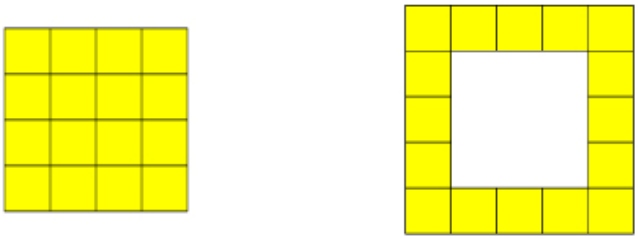
Zahlfiguren

Sehen ist mehr als nur Hinschauen – Sehen ist ein aktiver Prozess der Konstruktion, Sehen braucht also aktives Handeln. **Ich erkenne Struktur, indem ich sie selbst herstelle – indem ich sie mit eigenen Händen konstruiere.**



Dieser Konstruktionsprozess läuft hier zum Beispiel so ab, dass ich eine Anzahl von Plättchen zu einer ‚**Zahlfigur'** zusammenlege. Diese Zahlfigur verrät mir etwas über die die innere Struktur dieser Zahl. Ich könnte auch sagen: über das verborgene Muster in dieser Zahl. **Zahlfiguren halten für meine Augen fest, was meine Hände gemacht haben – das kann sich mein Kopf merken.**

Natürlich kann ich diese 16 Plättchen auch zu anderen Figuren, zu anderen Mustern zusammenlegen. Jede dieser Zahlfiguren verrät mir etwas anderes über die Zahl 16. Unsere erste Zahlfigur verrät, dass 16 dasselbe ist wie 3 mal 5 plus 1 (oder 5 mal 3 plus 1), wenn ich denn schon weiß, was Multiplizieren ist.

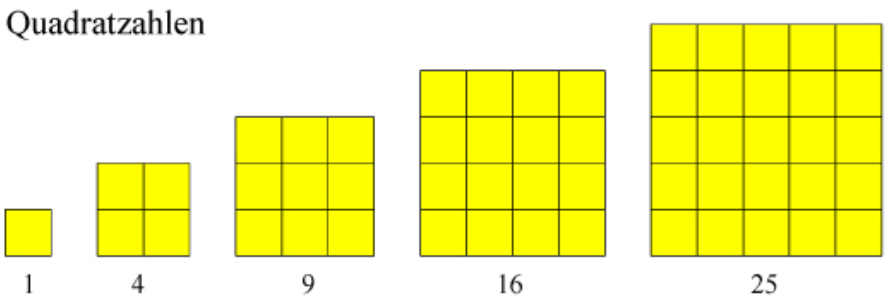


In der letzten Abbildung sehe ich links etwas anderes: Nämlich, dass 16 eine Quadratzahl ist. Und was sehe ich an der rechten Zahlfigur? Wenn ich die 16 gelben Plättchen zu einem quadratischen Kranz zusammenlege, dann habe ich innen ein 3er-Quadrat und insgesamt entsteht ein 5er-Quadrat. Hier könnte ich entdecken, dass ich die fünfte Quadratzahl erhalte, wenn ich die dritte Quadratzahl um die vierte Quadratzahl vergrößere. (Fällt Ihnen hier auch der Name Pythagoras ein? Um zu verstehen, was ein pythagoreisches Zahlentripel ist, brauche ich kein rechtwinkliges Dreieck.)

Visualisierung von Zahleigenschaften

Die Zahlfiguren visualisieren also gewisse Eigenschaften von Zahlen. An Zahlfiguren kann ich mathematische Phänomene beobachten. Und das macht sie so wichtig: Denn Mathematiklernen geht immer von den mathematischen Phänomenen aus, ich kann nicht zuerst – gewissermaßen auf Vorrat – Begriffe und Gesetze lernen und anschließend untersuchen, welche mathematischen Phänomene sich diesen Begriffen und Gesetzen unterordnen. Sondern ich lerne Begriffe und Gesetze nur, nachdem – und indem – ich zuvor das einzelne Phänomen erlebt und verstanden habe. Daher muss auch das Lehren von Mathematik von den Phänomenen ausgehen.

Für diese didaktische Erkenntnis können wir hier ein schönes Beispiel sehen:

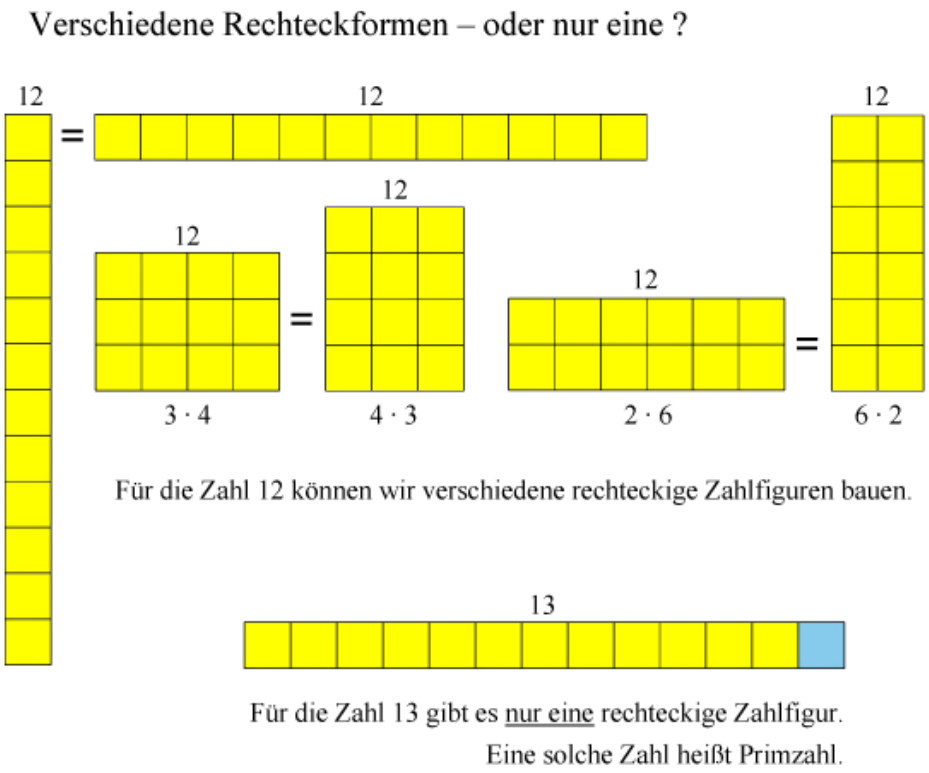


Fragen Sie einmal in Ihrem Bekanntenkreis, was eine Quadratzahl ist. Die meisten Definitionen, die Sie hören werden, verwenden den Begriff der Multiplikation: „3 mal 3 gleich 9, 4 mal 4 gleich 16, *n* hoch 2 – das sind Quadratzahlen." Kaum jemand kommt auf den Gedanken, ein Quadrat zu zeichnen.

Aber um das Phänomen ‚Quadratzahl' zu verstehen, brauche ich die Multiplikation keineswegs. Ich muss nur wissen, was ein Quadrat ist. Ja ich möchte sogar umgekehrt behaupten, dass ein Kind das Multiplizieren überhaupt erst verstehen kann, nachdem es das Phänomen ‚Quadratzahl' (und noch einige andere Phänomene) bereits beobachtet und verstanden hat.

Quadratzahlen sind eben diejenigen Zahlen, für die ich eine quadratische Zahlfigur legen kann. Dass ich 16 als 4 mal 4 berechnen kann, wird erst später wichtig.

Ein anderes Phänomen, das ich erlebt haben muss, damit ich den Begriff der Multiplikation bilden kann – und das heißt: damit mein Gehirn diesen Begriff mit seinen Strukturen abbilden kann, die Neurowissenschaft spricht hier von mentaler Repräsentation – ist das Phänomen der Rechteckformen:



Damit ich die Begriffe ‚Multiplikation' und ‚Faktor' mental repräsentieren kann, muss ich zuvor einige damit zusammenhängende Phänomene beobachtet und handelnd erlebt haben. Hier zum Beispiel das Phänomen, dass man für manche Zahlen verschieden geformte rechteckige Zahlfiguren bauen kann, für manche aber nicht.

Für die Zahl 12 gibt es drei verschiedene rechteckige Figuren. Wir sehen sie hier in insgesamt 6 verschiedenen Lagen. Nehme ich aber nur ein Plättchen mehr, geht das nicht mehr. Wir können uns bemühen, so sehr wir auch wollen. Für die Zahl 13 finden wir nur die Stabform – die man natürlich für jede Zahl legen kann, die also nichts Besonderes ist.

Das ist eine wirklich verblüffende Beobachtung. Müsste die Anzahl der möglichen Figuren, die ich legen kann, nicht größer werden, wenn ich mehr Plättchen nehme?

Das ist eine Überzeugung, die in einer Untersuchung mit Vorschulkindern, die ich durchgeführt habe, alle Kinder zu haben schienen. Ich habe sie zwar nicht explizit danach gefragt – aber ich habe beobachtet, was die Kinder taten. Die Unmöglichkeit, 13 Plättchen zu einer Rechteckfigur zusammenzulegen – außer der Stabform – erschien den meisten von ihnen so unglaubwürdig, dass sie lange nicht damit aufhörten, Rechtecke zu suchen. Erst wenn sie merkten, dass sie immer und immer wieder auf die gleichen Fast-Rechteck-Formen stießen, gaben sie allmählich auf. Dass ich zugab, das auch nicht zu schaffen, tröstete sie ein wenig.

So eine Zahl, für die es nur eine einzige Rechteckfigur gibt, nennen wir Primzahl. Primzahlen sind wirklich verblüffende Zahlen. Und was eine Primzahl ist, das kann ich entdecken und verstehen, lange bevor ich verstehen kann, was man mit der Schlagzeile vom ‚multiplikativen Aufbau der natürlichen Zahlen' meinen könnte.

Sie sehen, Kinder können eine ganze Reihe wichtiger mathematischer Phänomene beobachten, untersuchen und verstehen, lange bevor sie das Instrumentarium der mathematischen Verfahren und abstrakten Begriffe gelernt haben. **Der Weg führt von den Phänomenen zu den Begriffen!** Und nicht umgekehrt.

Zahlfiguren sind produktive Visualisationsmedien. Aber wirklich produktiv sind sie eben nur, wenn die Schülerinnen und Schüler damit selbst hantieren und Entdeckungen machen. Wenn sie sie neu arrangieren und zu neuen Mustern zusammensetzen können. Nach meinen Erfahrungen sind sie nichts, wenn sie nur dazu dienen, etwas im Nachhinein zu illustrieren, was ich als Lehrer zuvor ‚gelehrt' habe. Dann sind Zahlfiguren ein totes Medium, ich könnte auch sagen: Sie sind starre Ikonen der Mathematik, von denen wir unseren Mathematikunterricht entrümpeln müssen. **Visualisierung ist weit mehr als bloße Illustration, mehr als nur Bilder.** Visualisieren in dem produktiven Sinne, um den es hier geht, ist stets eine konzertierte Aktion von Auge, Hand und Kopf – ein Dreiklang aus Sehen, Handeln und Denken, könnte man auch sagen.

Auf der ganz elementaren Ebene steht aktives Handeln im Zentrum (enaktive Ebene) – denken Sie an Lulu. Mehr und mehr wird dann von den Kindern erkannt werden, dass Handeln in Bildern, in Figuren festgehalten werden kann (ikonische Ebene). Und je weiter wir uns in der Spirale des Mathematiklernens nach oben schrauben, desto klarer erkennen wir, dass Formeln nichts anderes sind als symbolische, formalisierte Bilder (symbolische Ebene).

Aber wie gesagt: Es ist niemals eine Einbahnstraße vom Handeln über Bilder zum Formalen. Es ist kein Nacheinander, sondern immer ein Sowohl-als-auch. Wenn selbst in der abstrakten mathematischen Formel für mich erinnerbar

bleibt, dass sie ein Bild für etwas ist, das ich mit eigenen Händen gemacht habe – dann kann ich sagen, in der wahrsten Bedeutung des Wortes: „Die Formel ist für mich begreifbar“. Und erst dann lohnt sich Formalismus überhaupt.

Einer meiner didaktischen Lieblingssätze lautet: **„Weil die Hand greifen kann, kann der Kopf be-greifen.“**

Eine Formel ist übrigens so etwas wie ein Merkzettel, auf dem ich in Symbolen sehen kann, was ich getan habe oder tun könnte. (So wie ja auch ein Einkaufszettel nur scheinbar eine Liste von Gegenständen ist – in Wirklichkeit, so wie ich ihn wirklich verwende, sagt er mir vielmehr, was ich tun soll: welchen Weg ich durch den Supermarkt gehen soll und in welche Regale ich greifen soll.)

Ich könnte mir keine größere Bestätigung wünschen als das folgende Zitat, das wir im Fazit der PISA-Studie finden können:

„Im herkömmlichen Unterricht – nicht nur in der Grundschule – [ist] das verständnisfördernde Potenzial von visuellen Darstellungsformen noch lange nicht ausgereizt.“

Dieses verständnisfördernde Potenzial liegt unter anderem daran, dass Visualisationen gewissermaßen „mitwachsen“, können, wenn die mathematischen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler wachsen.

Zumindest unsere Zahlfiguren wachsen mit. Etwas poetisch könnte ich sagen: Sie können mit immer neuen mathematischen Antworten überraschen, wenn ich nur die richtigen Fragen an sie stelle.

Etwas prosaischer: Sie verkörpern so grundlegende mathematische Tatsachen, dass man immer wieder neue Erkenntnis aus ihnen ziehen kann. Die ihnen innewohnenden Möglichkeiten kann man gar nicht so rasch ausschöpfen.

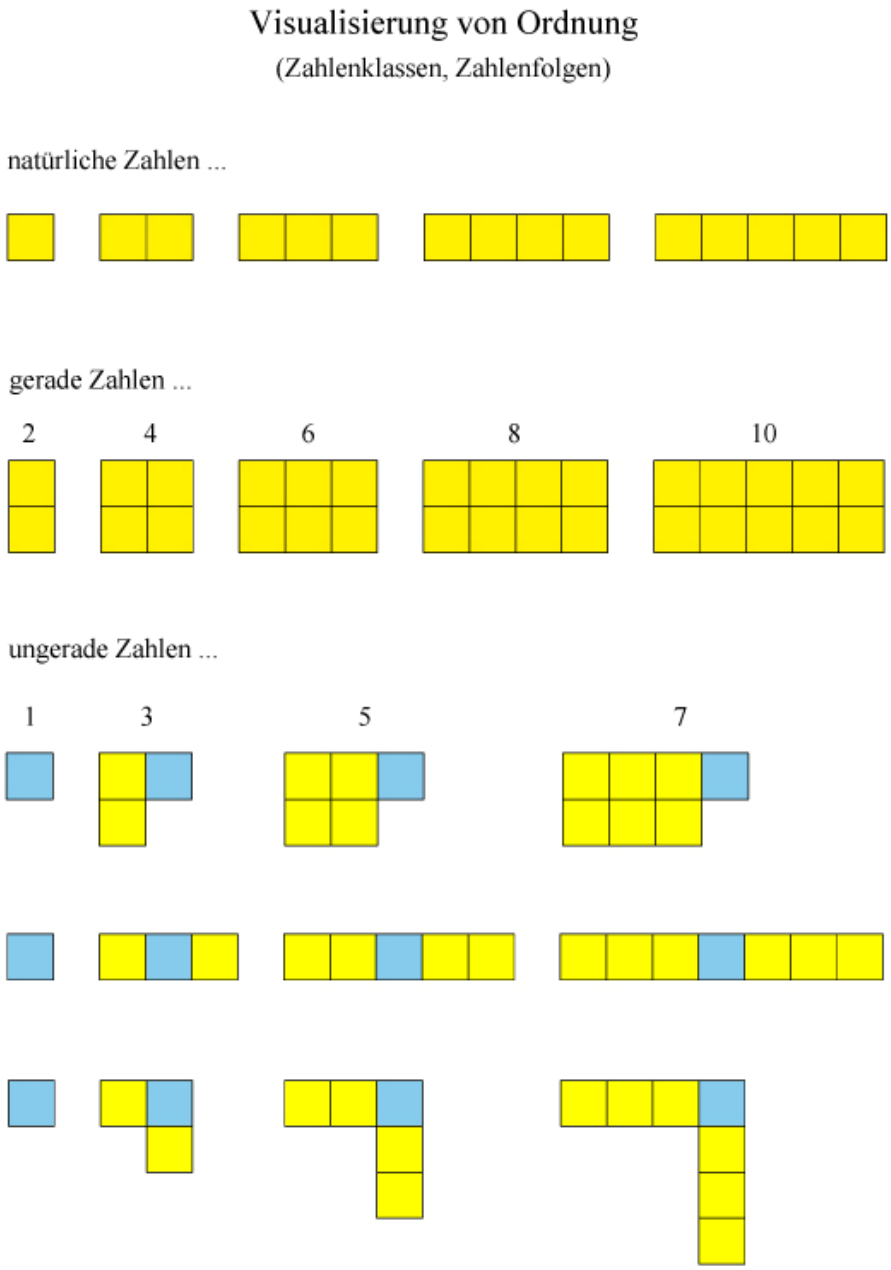
Sie erlauben ja nicht nur konstruktive Einblicke in einzelne Zahlen, sondern sie erlauben ebensolche Einblicke auch in die Struktur ganzer Zahlenklassen bzw. Zahlenfolgen.

Das Erkennen von Ordnung, von Mustern und Bildungsgesetzen ist eine ganz zentrale mathematische Tätigkeit, eine wichtige mathematische Kompetenz. Mathematik wird gegenwärtig von immer mehr Mathematikerinnen und Mathematikern als die Wissenschaft von den Mustern definiert. „Mathematics – the Science of Patterns“ ist der Titel eines bekannten Buchs des amerikanischen Mathematikers Keith Devlin.

Visualisieren von Ordnung

In der folgenden Abbildung sehen Sie, wie die elementaren Zahlklassen der geraden und der ungeraden Zahlen als Folgen ähnlicher Muster konstruiert werden können. ‚Folgen ähnlicher Muster’: In dieser Formulierung stecken drei ganz wesentliche mathematische Begriffe: Folgen, Muster (also Struktur) und Ähnlichkeit. Für die ungeraden Zahlen sehen Sie verschiedene solcher Muster-Folgen. Für die geraden Zahlen sehen Sie hier nur eine Musterfolge.

Für die ungeraden Zahlen gibt es zum Beispiel die Blockdarstellung, an der so schön abzulesen ist, was ‚ungerade' bedeutet. Oder die Haken- oder Winkeldarstellung. Jede dieser Muster-Folgen hat ihre eigenen speziellen Einsatzgebiete. Wir werden das gleich sehen. Halten Sie besonders die Hakendarstellung im Gedächtnis.

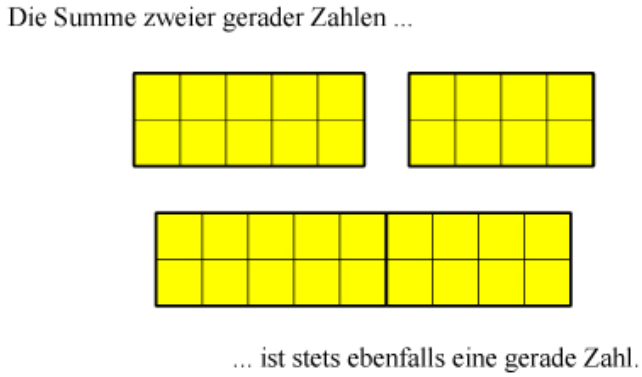


Die Überschrift dieses Kapitels spricht von Visualisierung als Strategie des Entdeckens, Verstehens und Begründens. In der Tat liegt ihre Stärke nicht zuletzt darin, dass sie Zugänge ermöglicht zu der mathematischen Tätigkeit, die in der

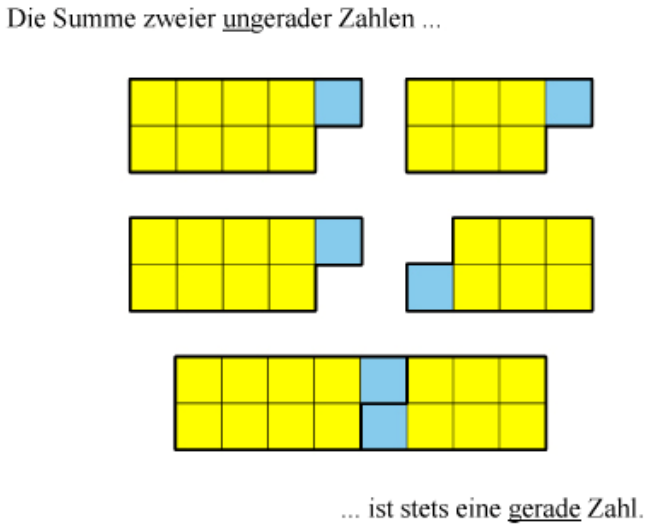
Schule immer etwas schlecht wegkommt. Ich meine das Begründen. Mit Zahlfiguren fällt es oft sehr viel leichter, Begründungen zu finden. „Man sieht sofort, was los ist“ hat das mal eine Schülerin auf den Punkt gebracht.

Visualisieren und Begründen

Auch in der nächsten Abbildung sieht man sofort, was los ist: Vorausgesetzt, ich habe einmal erkannt, was das wesentliche Strukturmerkmal, das Muster von geraden bzw. ungeraden Zahlen ist: Die Summe zweier gerader Zahlen ist stets ebenfalls eine gerade Zahl.



Ebenso sehen wir: Die Summer zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl. Ebenso zeigt man operativ, dass die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl stets ungerade sein muss.



Diese Beweise verstehen wir lange bevor wir mit Termen operieren können. Hier operieren wir mit Mustern (wenn wir nur das Bild anschauen) bzw. auf der Handlungsebene mit Zahlfiguren (wenn wir wirklich etwas hin- und herschie-

ben). Solche Beweise auf der Handlungsebene nennt man auch operative Beweise.

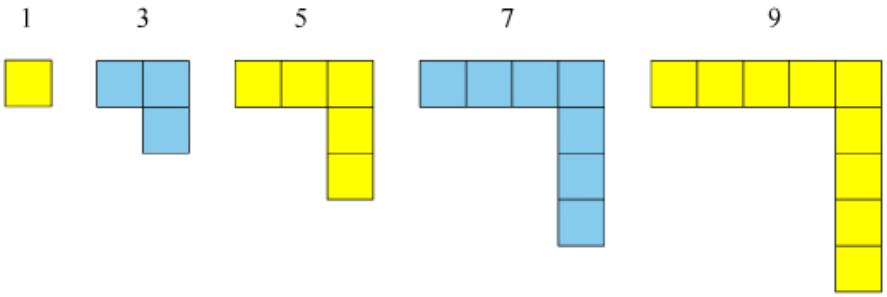
Wenn Sie für einen kurzen Moment in sich hineinschauen, was in Ihnen abgelaufen ist, als Sie diese Bilder sahen: Haben Sie nicht vielleicht ‚so eine kleine Handbewegung' gemacht? Oder hat es vielleicht ‚so ein klein wenig' in Ihren Händen gezuckt? Dann haben Sie gerade am eigenen Leib erfahren, was Piaget damit gemeint hat: „Denken ist probeweises Handeln." Sie haben die Figuren zusammengeschoben – wenn auch nur ‚im Kopf'.

Visualisieren von Formeln

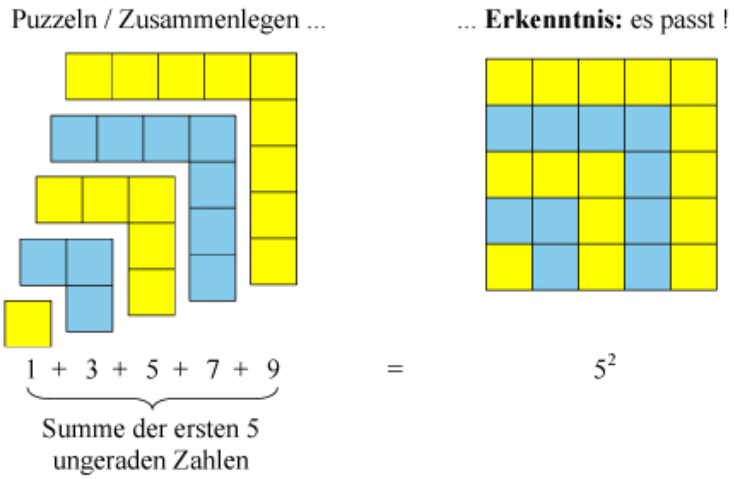
Addieren Sie doch einmal im Kopf die ersten fünf ungeraden Zahlen: 1 + 3 + 5 + 7 + 9. Richtig, die Summe ist 25. Würden Sie sagen, dass wir jetzt eine mathematische Erkenntnis gewonnen haben? Wir haben lediglich eine kleine Rechenaufgabe gelöst. 25 oder 26, was heißt das schon? Hauptsache, das Ergebnis stimmt.

Wie wäre es aber, wenn wir nicht rechnen würden, sondern uns daran erinnern würden, dass ungerade Zahlen diese Hakenmuster-Zahlen von der vorletzten Seite sind?

Beispiel: Die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen.



Und wenn wir diese Hakenfiguren sogar in die Hand nehmen können, dann puzzeln wir damit sicher ein wenig. Und siehe da – es passt.



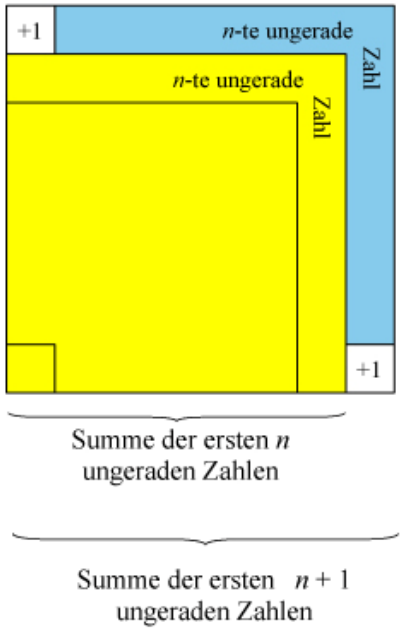
Haben Sie eben darauf geachtet, dass 25 eine Quadratzahl ist? Und wenn Sie es getan hätten – hätten Sie wirklich damit etwas anfangen können?

Jetzt haben wir wirklich eine mathematische Erkenntnis gewonnen. Denn wir sehen sofort: Das geht immer so weiter! Es passt immer! Auch für die ersten 6 ungeraden Zahlen, oder für die ersten 7 und so weiter und so weiter. Die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen ist gleich der *n*-ten Quadratzahl. Für alle natürlichen Zahlen *n*.

Wir haben zwar nur mit 5 ungeraden Zahlen, mit 5 Zahlsteinen gepuzzelt, aber die Visualisierung ist so stark, dass wir die Verallgemeinerung gar nicht übersehen können. Vergleichen Sie diese Wirkung einmal mit der Wirkung der bloßen Rechnung! – Wie hieß es im Fazit der PISA-Studie: „das verständnisfördernde Potenzial von visuellen Darstellungsformen“ – hier haben wir ein schönes Beispiel dafür. Entdecken, Verstehen, Begründen – diese drei wichtigen Stationen des mathematischen Handelns liegen hier ganz nahe beieinander.

Wie gesagt: Das Visualisierungsmedium der Zahlsteine wächst mit unserem Können und Wissen mit. Was heißt das konkret? Werfen wir noch einmal einen Blick auf unser Beispiel. Unsere Begründung lautete „das geht immer so weiter.“ Was heißt das genau? Wenn wir die Ebene des Elementaren hinter uns gelassen haben, wollen wir uns vielleicht mit unserer Begründung nicht mehr zufrieden geben.

Dann könnten wir so argumentieren:



Wenn unsere Behauptung für die ersten – sagen wir – *n* ungeraden Zahlen zutrifft, das heißt, wenn deren Summe die *n*-te Quadratzahl ist, dann können wir den zuletzt angelegten Haken noch einmal dazu legen. Das war die *n*-te ungerade Zahl. Damit vergrößern wir das gelbe Quadrat um den blauen Haken.

Zwar ergibt das noch kein Quadrat. Aber wir sehen: Es fehlen genau 2 Plättchen. Das heißt, wenn wir nicht die *n*-te ungerade Zahl dazu legen, sondern 2 mehr – und das ist gerade die (*n*+1)-te ungerade Zahl – , dann erhalten wir das nächstgrößere Quadrat.

Damit haben wir bewiesen: Wenn die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen die *n*-te Quadratzahl ist, dann ist die Summe der ersten *n*+1 ungeraden Zahlen die nächste Quadratzahl. Und weil dies auch für $n = 1$ gilt (denn 1 ist ja selbst eine Quadratzahl), gilt diese bemerkenswerte Aussage für alle natürlichen Zahlen.

Sie kennen vielleicht das Beweisprinzip, das man ‚Vollständige Induktion' nennt. Hier haben wir ein operatives, handlungsorientiertes Beispiel für den Schritt von *n* nach *n*+1. Wir gehen wirklich von *n* nach *n*+1 – wir nehmen Steine in die Hand und ‚bauen an'.

Visualisierung des Prinzips der vollständigen Induktion

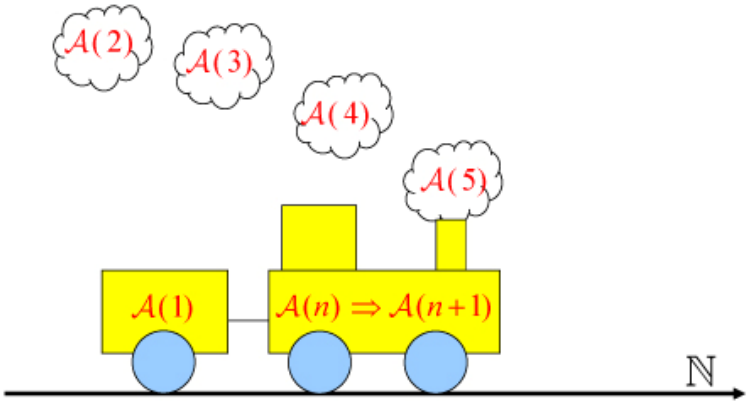
Das Prinzip der Vollständigen Induktion können wir auf verschiedenen Ebenen darstellen. Zum Beispiel auf der formalen Ebene:

Formalisieren

$$\left[\mathcal{A}(1) \wedge \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)\right)\right] \Rightarrow \left[\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}(n)\right]$$

Aber man braucht schon ein gerüttelt Maß an Erfahrung – oder sollte ich sagen: Abgebrühtheit –, um vor einer solchen Formel nicht zu erschrecken. Um dieses Erschrecken ein wenig abzumildern, kann man die Aussage auch auf der Ebene der Illustration darstellen.

Illustrieren



Man sieht förmlich, wie die Lokomotive mit jedem Dampfwölkchen die Behauptung A für eine weitere natürliche Zahl beweist. Aber was wäre, wenn Sie die obere Formel weglassen. Macht das Bild dann noch Sinn? Kann jemand ohne die Formel, allein mit dem Bild der Lokomotive, das Prinzip der Vollständigen Induktion verstehen?

Dieses Bild ist gewiss eine schöne Illustration. Aber es ist keine Visualisierung. Es ist verständnis-unterstützend, aber es ist nicht verständnis-erzeugend. Es hat nur dienende Funktion. Allein vermag es nichts. Visualisierungen müssen aber verständnis-erzeugend sein. Sie müssen produktiv sein. Und dazu müssen sie Handlungsbezug haben.

Wo können wir hier aber einen Handlungsbezug finden? In der Vorlesung haben wir an dieser Stelle ‚Dominosteine' (z.B. Audiokassetten) aufgestellt – und umfallen lassen. Und wir haben (wieder einmal) Freude am **‚Dominoprinzip'** gehabt. Wir haben erkannt (erlebt), dass das Dominoprinzip eine Visualisierung des Prinzips der Vollständigen Induktion ist. Es ist mehr als nur eine Illustration, denn es stellt ja einen konkreten Handlungsbezug her. Und dadurch ist es **verständnis-erzeugend**.

Visualisieren



Schauen wir uns das näher an.

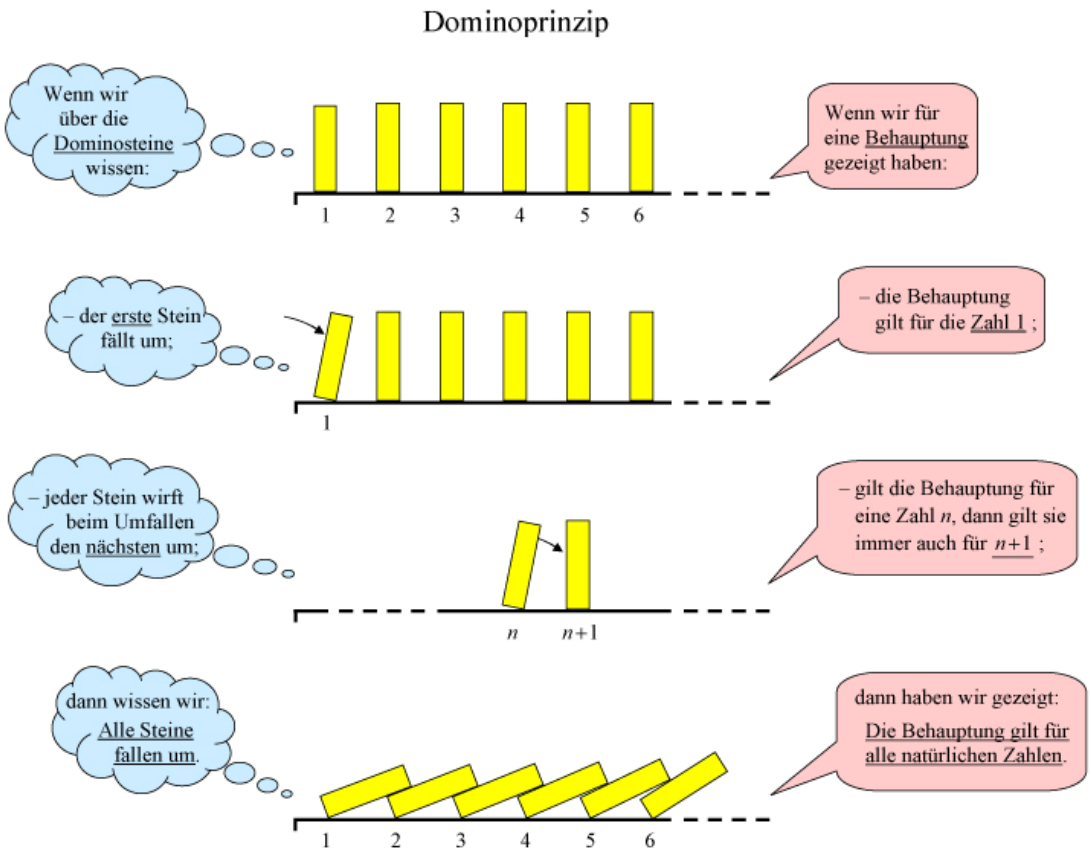
Wenn wir über die Dominosteine wissen:
– Der erste Stein fällt um ...
– und jeder Stein wirft beim Umfallen den nächsten um ...
– dann wissen wir: Alle Steine fallen um.

Wenn ich den ersten Stein nicht umwerfe, passiert gar nichts. Und wenn ich nicht aufpasse, dann ist die zweite Bedingung nicht erfüllt. Wenn es auch nur einen einzigen Stein gibt, der seinen Nachfolger nicht umwirft, dann ist die Kette unterbrochen, dann stoppt die Lokomotive (aber im Bild der Lokomotive eben haben Sie das nicht sehen können; das sehen Sie nur hier).

Wir sehen: Dominosteine müssen wir sehr sorgfältig aufstellen. Auch wenn wir Behauptungen aufstellen, müssen wir sehr sorgfältig sein.

Die Analogie geht aber viel weiter:

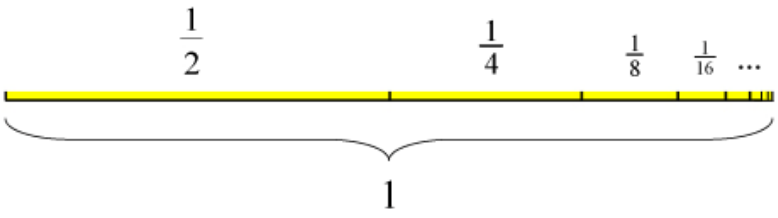
Wenn wir für eine Behauptung gezeigt haben:
– Die Behauptung gilt für die Zahl 1.
– Und: Gilt die Behauptung für eine Zahl n, dann gilt sie immer auch für n+1.
– Dann haben wir gezeigt: Die Behauptung gilt für alle natürlichen Zahlen.



Visualisierung des Unendlichen

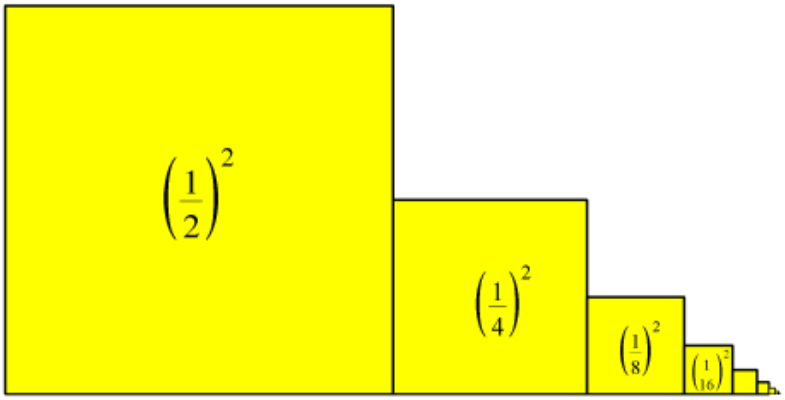
Visualisierung ist eine mächtige Strategie des Entdeckens, Verstehens und Begründens. Und natürlich nicht nur in der Arithmetik. Betrachten wir ein kleines Beispiel dafür. Sie kennen vielleicht aus dem Mathematikunterricht die unendliche Reihe der Potenzen von Einhalb. Und vielleicht wissen Sie, dass der Wert dieser unendlichen Reihe 1 ist.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$$



Wenn ich vor einer Wand stehe und den halben Abstand zurücklege, dann davon wieder den halben und immer so weiter, dann nähere ich mich der Wand – zumindest theoretisch – beliebig an. Ich komme niemals hinter die Wand. Aber ich bleibe auch nicht vor der Wand stehen. Wenn ich wirklich alle unendlich vielen Schritte ausführen könnte, wäre ich also genau auf der Wand.

Aber was passiert, wenn ich nicht die Strecken summiere, sondern die Quadrate über diesen Strecken?

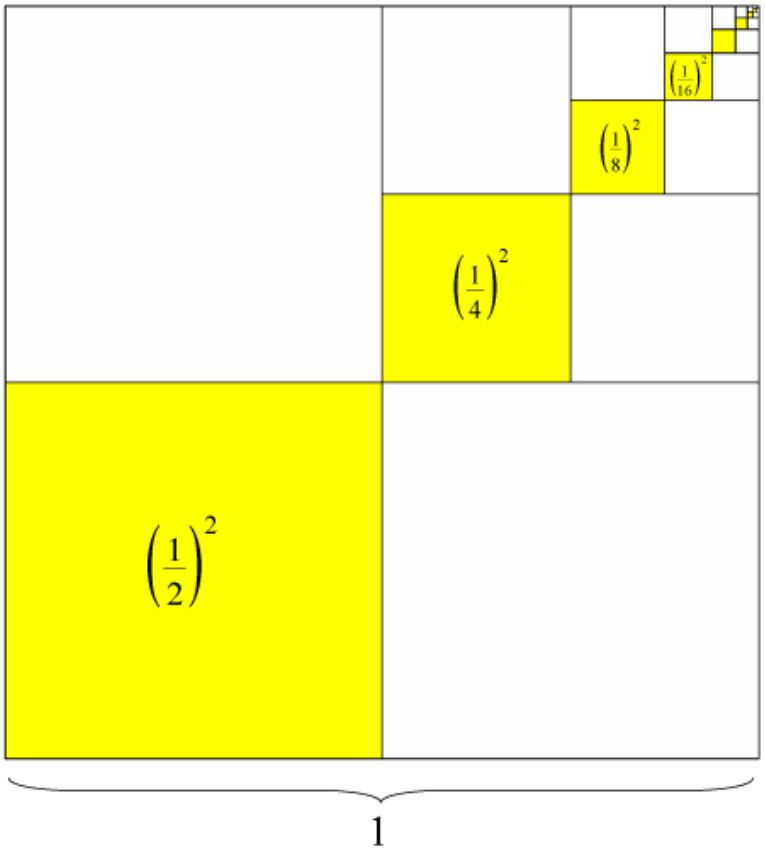


$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \ldots$$

Können Sie hier die Lösung sehen? Vermutlich nicht, das müssen Sie erst ein wenig trainieren.

Erinnern wir uns: Wir müssen die Steine in die Hand nehmen und sie hin- und herschieben. Wie Lulu das mit ihren Pralinen gemacht hat. Und wie man das mit Zahlfiguren macht. Wie könnten wir diese gelben Quadrate verschieben? Am besten wäre es, wenn Sie jetzt wirklich selbst Quadrate ausschneiden und hin- und herschieben würden. Nach meinen Erfahrungen würden Sie dann irgendwann darauf kommen, dass eine aussagekräftige Figur entsteht, wenn Sie die Quadrate nicht mit einer Seite aneinander legen, sondern mit einer Ecke. Also diagonal (s. Abb. auf der nächsten Seite).

Sehen Sie die Lösung? Sagen Sie nicht nein. Sie sehen Sie. Sie müssen sich nur genau klarmachen, was Sie sehen. Schauen Sie auf irgendeines der gelben Quadrate und bleiben Sie mit den Augen dort. Sie sehen, dass darüber und daneben zwei weiße Quadrate liegen, die genauso groß sind wie das gelbe. Und das geht immer so weiter. Wo Sie auch hinschauen. Immer kommen auf ein gelbes zwei weiße Quadrate. Überall …



Welcher Bruchteil des großen Quadrats ist also gelb? Immer eins von insgesamt drei. Also genau ein Drittel. Sie haben den Wert der unendlichen Reihe also wirklich gesehen. Sie haben gesehen, dass die folgende Formel gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Und das ist doch wirklich eine ganz schön fortgeschrittene mathematische Erkenntnis!

Fazit

Eine der großen Leistungen der Mathematik ist sicherlich, komplexe Strukturen formal darzustellen. Eine wichtige Leistung der Mathematikdidaktik ist es, diese

hochformalen Darstellungen auf einer anschaulichen Ebene begreifbar zu machen.

Oder etwas poetischer: **Wenn die Mathematik die Wissenschaft der Muster ist, dann ist sie auch die Wissenschaft des Sehens. Dann ist aber die Mathematikdidaktik die Wissenschaft des Sichtbar-Machens.**

Aufgabe

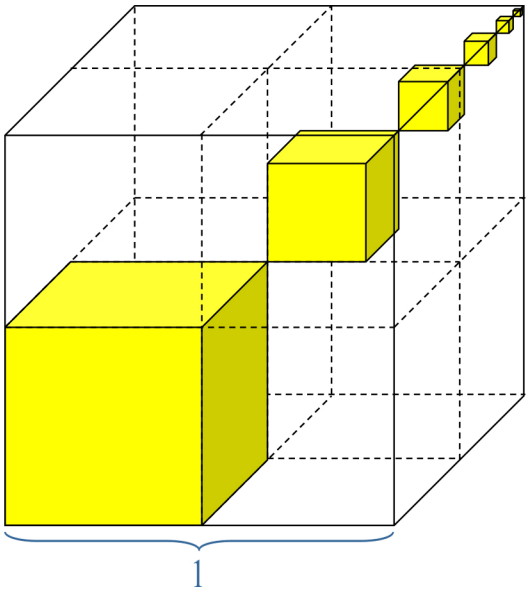
1. Finden Sie eine Visualisierung für die Summe S_n der ersten n natürlichen Zahlen mit Zahlfiguren. Leiten Sie damit eine einfache Formel zur Berechnung von S_n her.
2. Machen Sie das gleiche für die Summe G_n der ersten n geraden Zahlen.

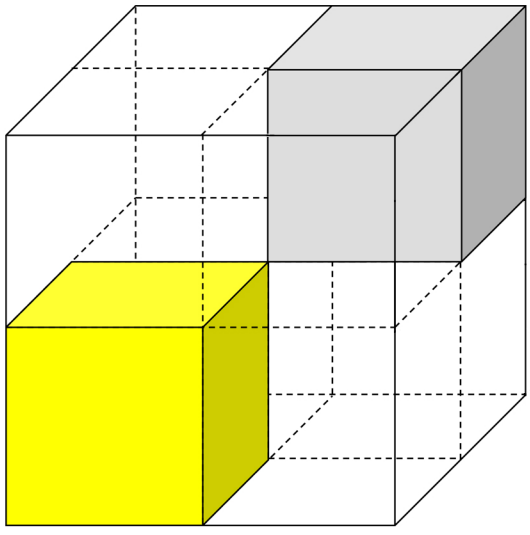
Der nächste Schritt: Räumliche Visualisierung

Erläutern Sie, wie Sie an der Visualisierung „Würfelkette im Einheitswürfel“ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{8}\right)^3+\left(\frac{1}{16}\right)^3+\ldots = \frac{1}{7}$$

entdecken, ihre Richtigkeit einsehen und sie sogar anderen beweisen können.
Tipp: Überlegen und begründen Sie zunächst, dass das linke Bild eine Visualisierung der linken Seite der Gleichung ist.
Betrachten Sie dann den großen gelben Würfel. Wie viele gleich große Würfel ohne Farbe sehen Sie? Blenden Sie dazu die kleineren Würfel aus. Der Raum, den sie ausfüllen, ist der graue Würfel im rechten Bild. Wie geht es weiter?





5. Mathematische Weltbilder

Oder: Wie ich Mathe lerne und lehre, wird von meinem subjektiven Bild von der ‚Welt der Mathematik' beeinflusst

Beobachtungen zur Wahrnehmung von Mathematik

Das „Gottschalk"-Syndrom

In Talkshows machen sich Prominente (auch Talkmaster) gerne damit sympathisch, dass sie sich als schlechte MatheschülerInnen outen.

Das „Mathe-ist-wichtig"-Syndrom

Der Vater kommt in die Sprechstunde des Lehrers und ist tief besorgt über die schlechten Leistungen der Tochter in Mathematik. „Ohne Mathe kann sie ja auch im Beruf einpacken!" Die Tochter berichtet, ihr Vater – ein erfolgreicher Geschäftsmann – habe sich auf einer Familienfeier damit gebrüstet, „in Mathe immer eine Niete" gewesen zu sein.

Das „Mathe-ist-nichts-für-Mädchen"-Syndrom

Der Mathe-Nachhilfelehrer hört (Mitte der Siebziger Jahre) von der Mutter seiner Schülerin: „Machen Sie's nicht so schwer. Sie ist ja'n Mädchen."

Das „In-der-Mathematik-muss-man-mit-allem-rechnen"-Syndrom

Eine Mathematikerin wird beauftragt, die MitarbeiterInnen einer Bank fortzubilden. Nach einem Test befragt sie die Teilnehmerinnen, um den Gründen für teilweise eklatante Fehler auf die Spur zu kommen. Teilnehmerin: „Mir war klar, dass mein Ergebnis eigentlich falsch sein musste." -„Warum haben Sie es dann hingeschrieben?" - „Ich hab' mir gesagt, in der Mathematik passieren die komischsten Sachen."

Das „Journalisten-und-Zahlen"-Syndrom

In der Tagespresse werden Nachrichten oft mit sehr genauen Zahlenangaben versehen, die allerdings sehr häufig in sich widersprüchlich sind, was man mit einfachsten Rechnungen unmittelbar nachprüfen könnte.

Untergang der „Estonia" (28.09.1994)
„Weserkurier": „974 Menschen an Bord" - „126 Überlebende" - „fast 800 Menschen kamen ums Leben" [974 – 126 = 848]

„Focus": „796 Menschen in den Tod gerissen" - „nur 141 Überlebende" - „964 Menschen an Bord gewesen" [796 + 141 = 937]

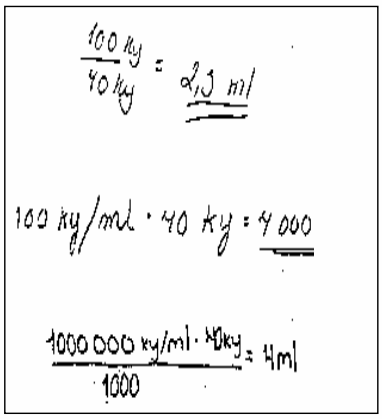
Plätze in Haftanstalten
„Westfälische Nachrichten" (16.05.1992): Zahl der Plätze in Haftanstalten „in den letzten Jahren um ein Drittel (5600) auf 16.300 gestiegen". [16.300 - 5.600 = 10.700; 5.600 sind nicht (rund) ein Drittel von 10.700]

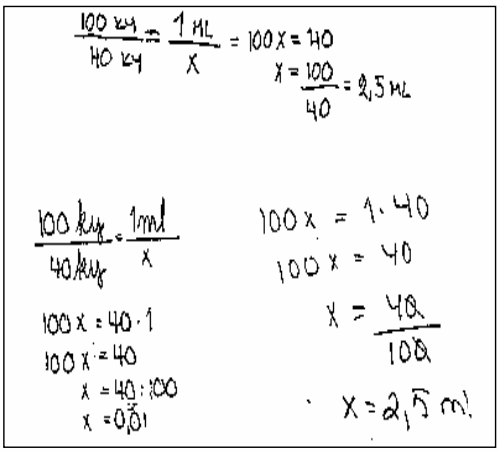
Fallbeispiel: Die Rechenfertigkeit finnischer Schwesternschülerinnen

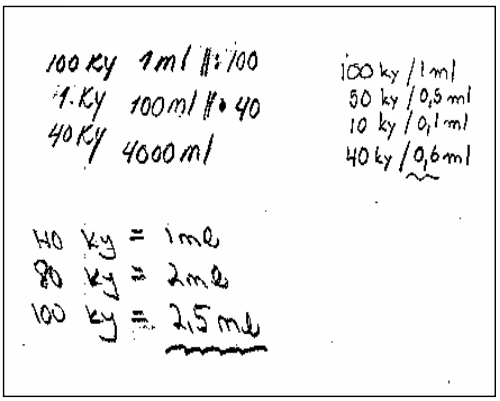
(Huhtala 1997)

Aufgabe
Frau Malmi (64 Jahre) soll 40 IE Insulin erhalten.
Die Stärke des verfügbaren Medikaments beträgt 100 IE Insulin pro ml.
Wie viel ml muss die Patientin erhalten?

Die Lösung [0,4 ml] fanden 1792 der 3344 Testteilnehmerinnen (53,6%).







ky : kansainvälinen yhtenäisyys
(internationale Einheiten)

Wenn die Schwesternschülerinnen **in ihrem Beruf** solche Fehler machen würden, müssten viel mehr finnische Patienten sterben als es tatsächlich der Fall ist.
Offenbar machen (und akzeptieren) sie aber **nur in der Mathematik** solche Fehler.
Fazit:
Es besteht eine Diskrepanz zwischen ihrem Verhalten und Denken in Mathematik und in ‚mathematiknahen Alltagskontexten'.

Vier verbreitete mathematische Weltbilder
Ergebnisse empirischer Weltbildforschung

Mathematik als formales System

- Mathematik ist eine strenge logische Disziplin.
- ‚Mathematik treiben' heißt, strikte Beweise schreiben, präzise formale Sprache verwenden.
- Abstraktion rangiert vor Intuition.
- Mathematik ist ein ‚System unwandelbarer ewiger Wahrheiten'.

Mathematik als Formel-Werkzeugkasten

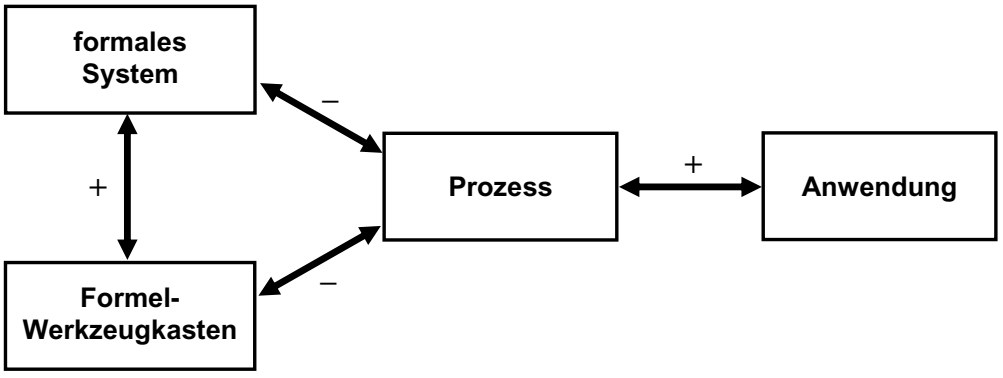
- Mathematik ist eine Sammlung (‚Werkzeugkasten') von Anwendungsformeln und -verfahren.
- ‚Mathematik treiben' heißt, zu rechnen und fertige Formeln, Verfahren, Regeln anzuwenden. Mathematik können' heißt, Formeln auswendig zu können und Verfahren durchführen zu können.
- Mathematik ist von anderen entwickelt worden, von außen vorgegeben,.

Mathematik als Prozess

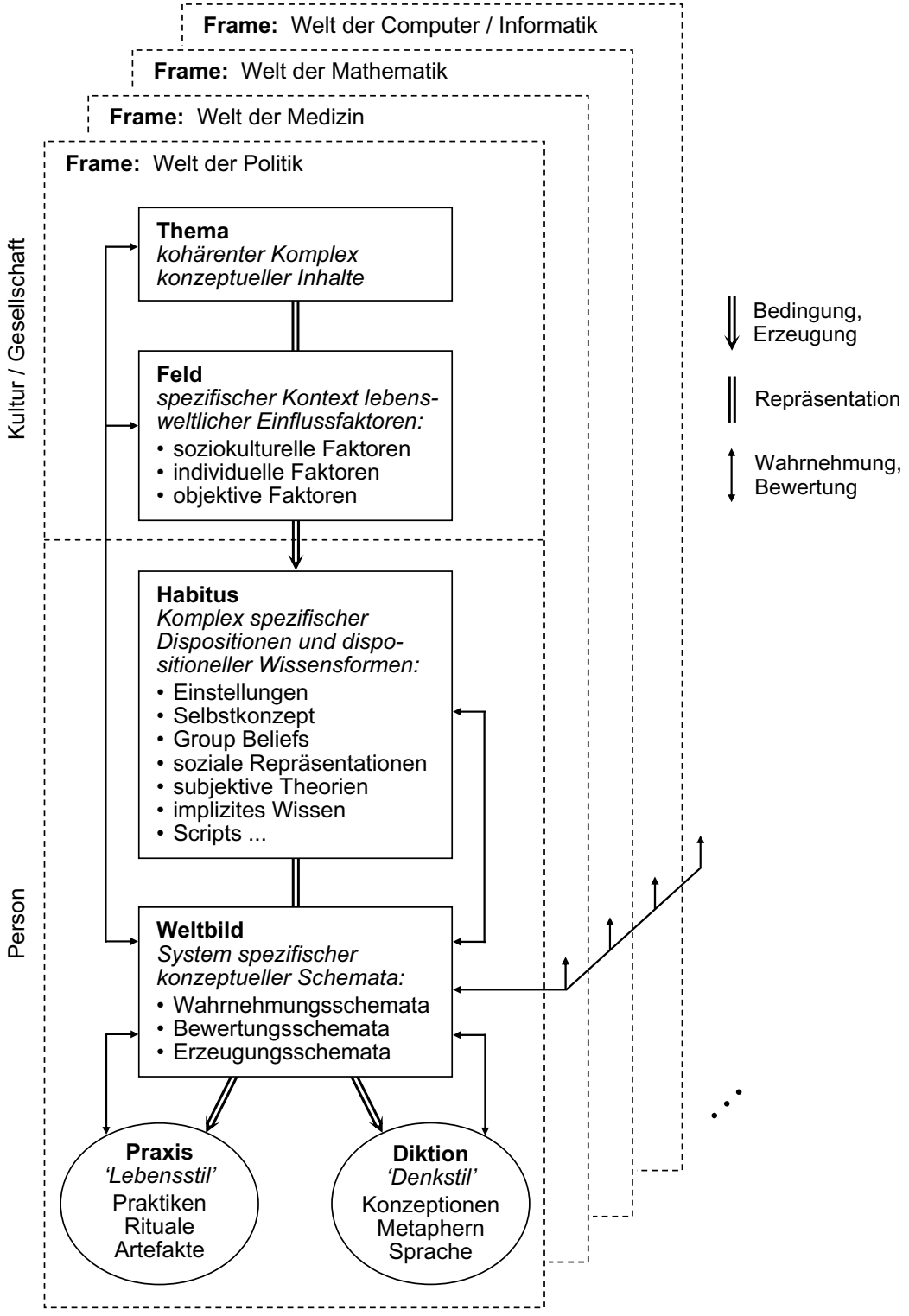
- Mathematik ist ein Bereich spezieller menschlicher Kreativität, der sich in beständiger Weiterentwicklung und Umgestaltung befindet.
- ‚Mathematik treiben' heißt, Denkprozesse zu entfalten, selbst aktiv zu sein, Lösungen selbst zu finden.
- Intuition ist wichtiger als Abstraktion.
- Mathematik ist ein dynamisches Netzwerk, offen für weitere Entwicklung.

Mathematik als Anwendung

- Mathematik ist dazu da, Probleme der Praxis zu lösen.
- ‚Mathematik treiben' heißt praktisches Problemlösen, wobei immer die Realität im Vordergrund steht.
- Mathematik dient zu etwas, daraus bezieht sie ihre Daseinsberechtigung.



Weltbildmodell [1]



[1] Berger, P. (2001): Computer und Weltbild. Habitualisierte Konzeptionen von der Welt der Computer. Wiesbaden: Westdeutscher Verlag.

Erläuterungen zum Weltbildmodell

Die Welten sind durch ein Thema bestimmt, nicht durch Sachen oder Ereignisse. Die ‚Welt der Politik' etwa besteht nicht eigentlich aus Politikern und politischen Ereignissen, sondern aus dem, was über diese gesagt und gedacht wird. Die ‚Welt der Computer' setzt sich nicht aus den Geräten zusammen, sondern aus den Geschichten, die sich um diese Geräte ranken.

Verschiedene Welten können durch thematische Brücken untereinander verbunden sein und in Wechselwirkung treten: Eine solche Brücke ist z.B. das Thema Doping: Es verbindet die Welt des Sports mit der Welt der Medizin und nicht zuletzt mit der Welt der Politik. So gibt es auch thematische Brücken zwischen der Welt der Mathematik und der Welt der Schule.

Nicht Sachen, sondern Themen, genauer Themenkomplexe, konstituieren diese soziokulturellen Welten. Wir müssten hier eigentlich von mathematischen Themen sprechen. Aber natürlich gibt es andere Beispiele, die soziokulturell noch virulenter sind. Nehmen wir das Beispiel BSE, wir hätten auch ein Beispiel wie abstürzende Computer oder Mathematiknachhilfe nehmen können.

BSE bildet natürlich keine Welt, es ist aber gegenwärtig ein Bestandteil der wichtigen Welt des Alltagslebens (auch der Medizin und der Politik). BSE ist schon seit langem ein Problem gewesen – aber Einfluss auf Denken und Handeln von Individuen und Gruppen hat BSE erst später nehmen können: Erst indem es zum Thema wurde, entwickelte das Phänomen sein soziokulturelles Potenzial. Ein solches Thema wird soziologisch repräsentiert in einer Struktur, die der Soziologe Bourdieu in Anlehnung an den physikalischen Begriff ein Feld genannt hat. Die Kräfte dieses themenspezifischen Feldes wirken ein auf das Individuum, das sich darin bewegt. Es reagiert adaptiv durch die Ausprägung passender Einstellungen und Verhaltensdispositionen, kurz eines entsprechenden Habitus.

Habitus ist ein sozialpsychologischer Begriff, er ist auf die einzelne Person bezogen, nicht mehr wie Thema und Feld auf die Kultur oder die Gesellschaft. Man kann sich aber fragen, wo dieser Habitus "herkommt", wo er im naturwissenschaftlichen Sinne verortet ist: dieser Ort ist natürlich das Gehirn. Alle die sozialpsychologischen Konstrukte (Einstellung, Selbstkonzept, Beliefs, Wissen etc.), an die man bei Habitus denken kann, müssen sich zurückführen lassen auf entsprechende mentale, konzeptuelle Schemata. Wir sind damit bei der Kognitionswissenschaft angelangt. Oder sogar, wenn wir bis ins neuronale Substrat vordringen, bei der Neurowissenschaft. Wir haben damit einen Abstieg vollzogen von der Gesellschaft über die Person bis in den Geist oder ins Gehirn. Das Weltbild ist in diesem Modell nun diese innerste Instanz, ein System themenspezifischer konzeptueller Wahrnehmungs-, Bewertungs- und Erzeugungsschemata. Das sozialpsychologische Konstrukt Habitus besteht aus Ausprägungen, oder Repräsentationsformen dieser Schemata.

Beobachten können wir dies alles nicht. Was wir beobachten können, sind lediglich die konkreten Auswirkungen eines solchen Weltbildes, soweit sie sich in konkreten Handlungen des Individuums niederschlagen. Nämlich gewissermaßen im persönlichen Stil des Denkens und Handelns, der von dem konzeptuellen System "Weltbild" induziert wird. Aus solchen Beobachtungen können Weltbilder nur indirekt und durch Interpretation rekonstruiert werden.

Die Perspektive der Ethnologie: Rituale im Mathematikunterricht

Kaum ein Schulfach scheint so ritualisiert zu sein (zumindest in der Wahrnehmung von Schülern) wie Mathematik. Wir können die Mathematik nur dann ‚zurück in die alltägliche Lebenswelt der Schüler bringen', wenn wir den **Mathematikunterricht ‚entritualisieren'**.

Erfahrungen eines imaginären Angehörigen einer religiösen Stammeskultur	*Erfahrungen eines (schlechten) Matheschülers*
Meine Welt ist aufgeteilt in einen **profanen** Bereich und einen **‚heiligen'**.	**Alltagsleben** **Mathematik**
Ich verrichte bestimmte Rituale, Handlungsregeln für ein korrektes Verhalten im 'heiligen' Bereich, die gerichtet sind auf eine transzendente Realität 'ewiger Wahrheiten'.	**Ich auch!**
Dabei gibt es positive Rituale,	**Brüche müssen gekürzt werden!**
wie auch negative, Vermeidungsrituale oder **‚Tabus'**.	**Man darf niemals durch Null teilen!**
Es gibt **Transitions-** oder **Initiationsrituale**, die den Übergang von einer Ebene auf eine höhere symbolisieren und ermöglichen.	**Klassenarbeiten, Abitur**
Es gibt **‚heilige' Orte,**	**Tafel, Lehrerzimmer**
‚heilige' Zeiten	**Klausur, Unterricht**
und ‚heilige' Dinge oder **‚Totems'.**	π
Sie werden verwaltet von einem ‚Priester' oder ‚Schamanen',	**Lehrer**
der warnende **Visionen** von einem ‚Leben nach dem Leben' verkündet.	**Ohne Mathematik kommst du später nicht aus!**
Die meisten Rituale sind mit Opfern verbunden.	**Im Matheunterricht auch!**

Weltbilder in den modernen Gesellschaften

Die kulturhistorische Perspektive

Frühe Gesellschaften (religiöse Stammeskulturen):

- basieren auf Religion (einzige Autorität der Sinnkonstruktion)
- „die Welt“ zerfällt (nur) in die beiden Bereiche des *Heiligen* und des *Profanen*
- die Gesellschaft ist einfach, homogen, uniform
- ihre Mitglieder haben ein *kollektives und konsistentes Weltbild*
- dieses definiert für jedes Individuum einen festen Platz in der Gesellschaft und induziert eine feste, Sicherheit vermittelnde *persönliche Identität*

Dissoziationsprozesse („Wertezerfall“) → **Verlust von Einfachheit, Homogenität, Sicherheit**

Übergang zu den modernen hochdifferenzierten Gesellschaften:

- die Deutungsmacht von Religion zerfällt und verteilt sich auf zahlreiche „hegemoniale Instanzen“ (Politik, Wissenschaft, weltanschauliche Systeme)
- Hierarchien lösen sich auf, Strukturen und Bindungen werden temporär
- Zünfte (dauerhaft) werden zu Szenen (temporär)
- „die Welt“ zerfällt in Teilwelten („multiple Realitäten“): Welt der Politik, der Religion, der Medizin, des Sports, des Berufs, der Kunst, der Technik etc.
- das Individuum agiert in diesen Teilwelten in diversen sozialen Rollen, die Person zerfällt in „spezifische Teilpersonen“
- seine Identität muss das Individuum selbst finden und definieren (durch Zuordnung zu bestimmten Gruppen, Szenen, Lebensstil-Gemeinschaften)
- Konsistenz ist nicht mehr innerhalb eines globalen, umfassenden Weltbildes erreichbar (solche gibt es daher nicht mehr), Konsistenz ist allenfalls noch innerhalb von Teilwelten möglich.

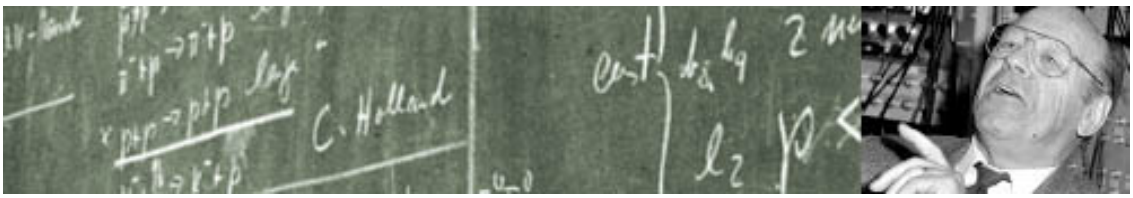
Fazit:

In hochdifferenzierten Gesellschaften und Kulturen kann das Individuum widerspruchsfreie Vorstellungen nur noch von begrenzten, thematisch eng zusammenhängenden Wirklichkeitsbereichen haben.

Das eine, umfassende Weltbild zerfällt, weil es zu viele unüberbrückbare Widersprüche enthält. An seine Stelle treten zahlreiche ‚Teilweltbilder’ (von thematischen Teilwelten: Welt der Politik, Welt des Sports, Welt der Technik, Welt der Gesundheit, …, Welt des Lernens, …, Welt der Mathematik, …).

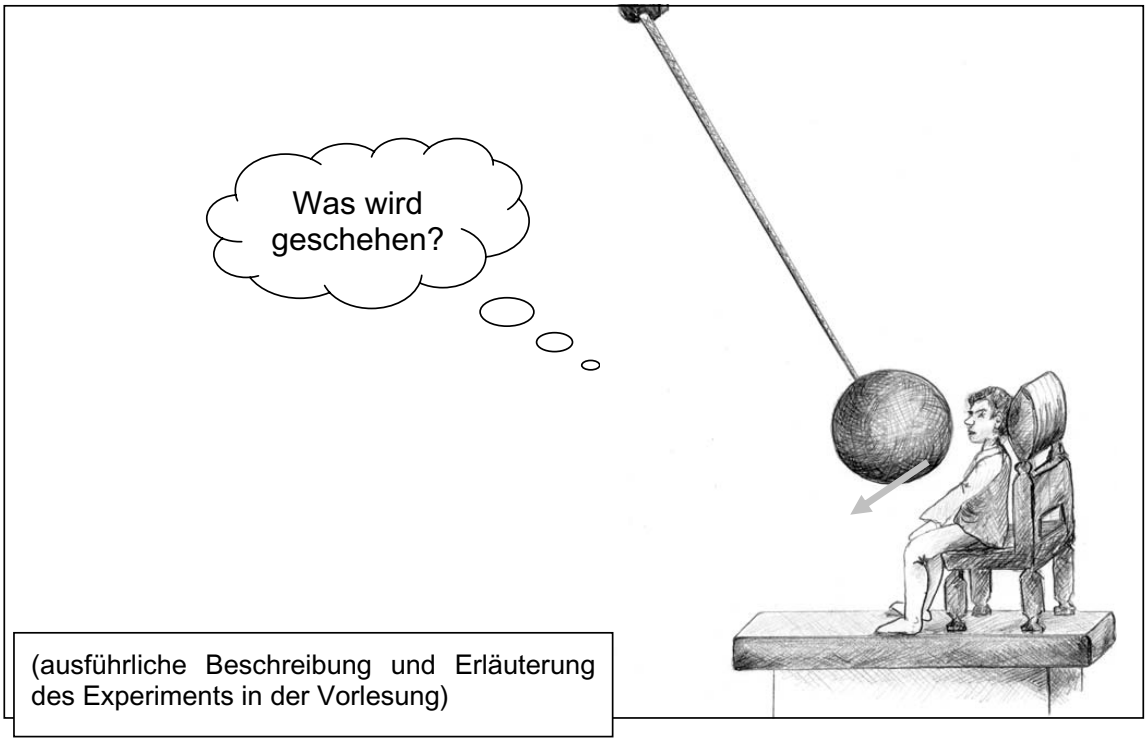
6. Das neue Bild vom Lernen: Konstruktivismus
Oder: Ich lerne nicht durch Belehrung, sondern indem ich mir mein Wissen selbst konstruiere

Das ‚Paul-Experiment'
Eine lehrreiche Anekdote



Wolfgang Paul (1913 – 1993) Direktor des Physikalischen Instituts der Universität Bonn. Prägte entscheidend die Entwicklung von CERN, DESY und der Kernforschungsanlage Jülich. Erhielt **1989 den Nobelpreis für Physik**.

ein physikalisches Experiment
über das Pendel



(ausführliche Beschreibung und Erläuterung des Experiments in der Vorlesung)

ein psychologisches Experiment
über das menschliche Wissen

Folgerungen aus dem Paul-Experiment:

Einige Beobachtungen und Hypothesen über das *menschliche Wissen*

- Das Wissen eines Individuums über die ‚**Welt der Physik**' (der Mathematik, der Informatik etc.) hat oft wenig zu tun mit seinem Wissen über seine ‚**Welt des Alltags**'.

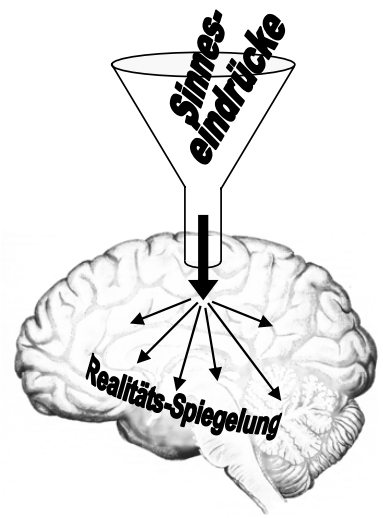
- Es gibt **peripheres Wissen** (*„Pendelausschläge können nicht zunehmen"*) und **zentrales Wissen** (*„Mutproben gehen meistens schief"*). Was für ein Individuum zentral ist, entscheidet nicht das Individuum (und nicht seine Lehrer); die Bewertung von Wissen wird ebenso gelernt wie die Inhalte dieses Wissens.

- Auch in dominant kognitiven Kontexten (Physikvorlesung, Mathematikunterricht etc.) gibt es regelmäßig kognitiv-emotionale ‚Einbrüche des Unbewussten' (Einflüsse latenten Vorwissens). **Keine Kognition ohne Emotion**!

- Wissensbestände eines Individuums sind **nicht global und logisch** geordnet, sondern **lokal und thematisch**. Ein Individuum hat nicht ‚Wissen über die Welt', sondern Wissen über thematisch zusammenhängende ‚Teilwelten' (Welt der Politik, des Sports, der Medizin, der Zahlen, der Maschinen etc.). Es hat **kein umfassendes und konsistentes Weltbild, sondern einzelne, in sich weitgehend konsistente (aber untereinander oft widersprüchliche) Weltbilder**. ‚Wissensbrücken' (gar Vernetzungen) zwischen diesen Teilweltbildern sind nicht die Regel.

- Die verbreitete Vorstellung von der naturgegebenen **Einheit der Person** und der **Widerspruchsfreiheit** des menschlichen Denkens, Fühlens und Handelns ist ein **Vorurteil**. Naturgegeben ist nicht die Einheitlichkeit, sondern gerade die Mannigfaltigkeit, Reichhaltigkeit und eben auch Widersprüchlichkeit.

Die Perspektive der Hirnforschung

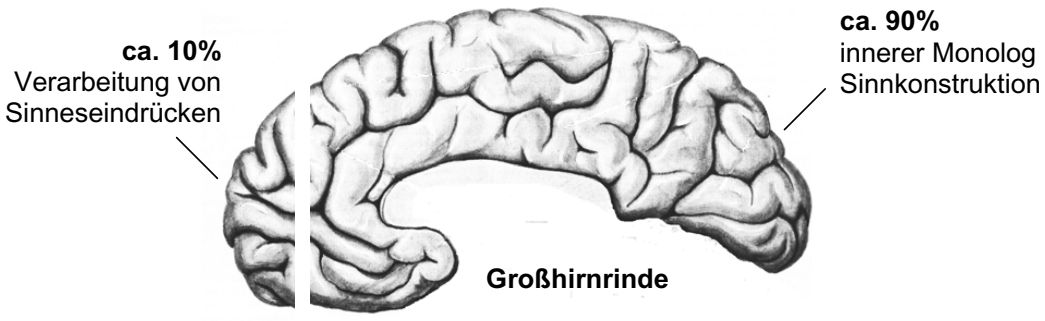


Unsere Gehirn hilft uns, uns in der Welt zurecht zu finden. Doch wie läuft dieses Sich-zurecht-Finden ab?

- Welche Rolle für unser Denken spielt die Realität?
- Welche Rolle spielen Sinneseindrücke? Wie groß ist ihr ‚Beitrag zum Denken'?
- Wie viel Prozent des Gehirns ist mit der Verarbeitung von Sinneseindrücken beschäftigt?

Einige elementare Resultate der Hirnforschung

- Bei jeder Kognition (z.B. Erkennen von Gesichtern, Sprechen, Zählen) ist niemals nur eine Hirnregion aktiv, sondern stets mindestens zwei oder (zumeist) mehrere, oft entlegene. Bei der gleichen Kognitionsart (Erkennen von Gesichtern) können bei verschiedenen Menschen unterschiedliche Kombinationen von Hirnregionen aktiv sein. (Es gibt individuelle und gruppenspezifische Unterschiede. Frauen nutzen beim Erkennen von Gesichtern zumeist eine andere Gehirnhemisphäre als Männer.)
- Denken findet nicht eigentlich ‚in den Nervenzellen/Neuronen' statt, sondern in den **synaptischen Verbindungsstrukturen**, die Neuronen aus unterschiedlichen Hirnregionen miteinander vernetzen.
- Denken operiert nicht auf der Menge der Neuronen, sondern auf deren Potenzmenge. (Es gibt viele Neuronen – doch viel zu wenig, um alles zu kodieren, was ‚man so denkt'. Es gibt aber genug Kombinationen von Neuronen.)
- Zur Antwort auf unsere Frage: Von allen synaptischen Verbindungsstrukturen in einem Gehirn widmen sich nur ca. 10% der Verarbeitung von Sinneseindrücken.

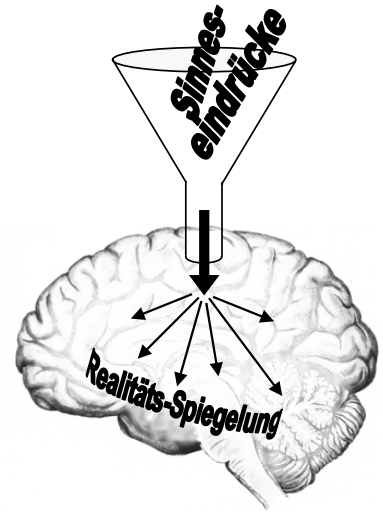


Wolf Singer (Direktor am Max-Planck-Institut für Hirnforschung, Frankfurt):

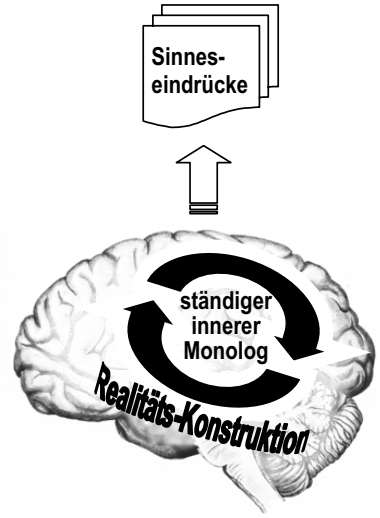
- „Die Welt ist nur ganz diskret eingekoppelt in das System Gehirn. Das System beschäftigt sich hauptsächlich mit sich selber. 90% der Synapsen sind '**innerer Monolog**'. Was schon darauf hinweist, dass in dem Gehirn etwas vor sich gehen muss, was nicht erst anfängt, wenn draußen irgendwelche Reize sind. Es werden hier nicht [von außen] Aktivitäten erzeugt, die dann [in das Gehirn] durchgeschaltet werden, sondern es ist [im Gehirn] ständig Aktivität, und die Einkopplung in die Welt ist relativ lose."
- „Unsere Wahrnehmung hängt in hohem Maße von **Mutmaßungen** ab, die unser Gehirn über die Welt anstellt. Das Gehirn entwickelt fortwährend Vorstellungen und **passt diese an die jeweils verfügbaren Sinnessignale an**."
- „**Wahrnehmen ist Überprüfen von Hypothesen.**"

Fazit:

Gehirntätigkeit ist nicht ***Spiegelung von Realität*** (diese wäre viel zu komplex)



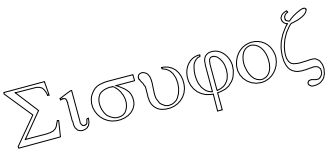
sondern ***Konstruktion von Realität*** (dadurch Möglichkeit zur Reduktion der Komplexität der Welt)

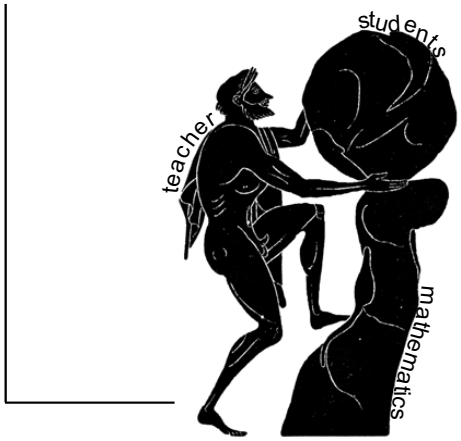


„Ein Organismus betreibt seiner Ausstattung entsprechend die Reduktion von Informationskomplexität durch Selektion, wodurch für ihn die Objektvielfalt seiner Lebenswelt zu Objekt-Klassen verdichtet wird, denen gegenüber er eine konsistente, und das meint eine von allen denkbaren Situationen unabhängige, innerhalb derselben Klasse nicht mehr differenzierende Reaktionsbereitschaft ausbildet." (Haubl 1994)

Die Konstruktion von Sinn durch Reduktion von Komplexität ist ein allgemeines und grundlegendes Adaptionsverhalten von Individuen, Gruppen und Gesellschaften. Prozesse/Tätigkeiten/Methoden, die nicht mittelfristig dazu taugen, Komplexität zu reduzieren, werden von Individuen und Gruppen auf Dauer als sinnlos wahrgenommen und abgelehnt. Dieses Verhalten ist vernünftig.

Die ‚Sisyphos-Metapher' – Eine professionelle Leitmetapher von MathematiklehrerInnen





Ergebnis einer empirischen Untersuchung[2]: MathematiklehrerInnen verwenden zur Beschreibung ihres beruflichen Alltags häufig die Sisyphos-Metapher.

Und zwar vorwiegend hinsichtlich des Fachs Mathematik (selten ihrer anderen Fächer).

- Die Metapher gehört zum 'folkloristischen' kulturellen Bildungs- und Bilderrepertoire, das im Sprachgebrauch der Gegenwart noch verankert ist.
- Inhalt: ‚Sisyphos' ist die *Metapher eines aufrechten Scheiterns*, das vor der unentrinnbaren Vergeblichkeit allen Tuns nicht kapituliert, sondern sie im Ethos einer unentwegten und unbeirrbaren Aktion aufhebt.
- radikale Deutung Camus': Da Sisyphos dem Selbstmord – als dem eigentlich einzig konsequenten Ausweg – entgeht (indem er die Suche nach einem Ausweg überhaupt aufgibt), muss man sich Sisyphos letztlich als einen glücklichen Menschen vorstellen.

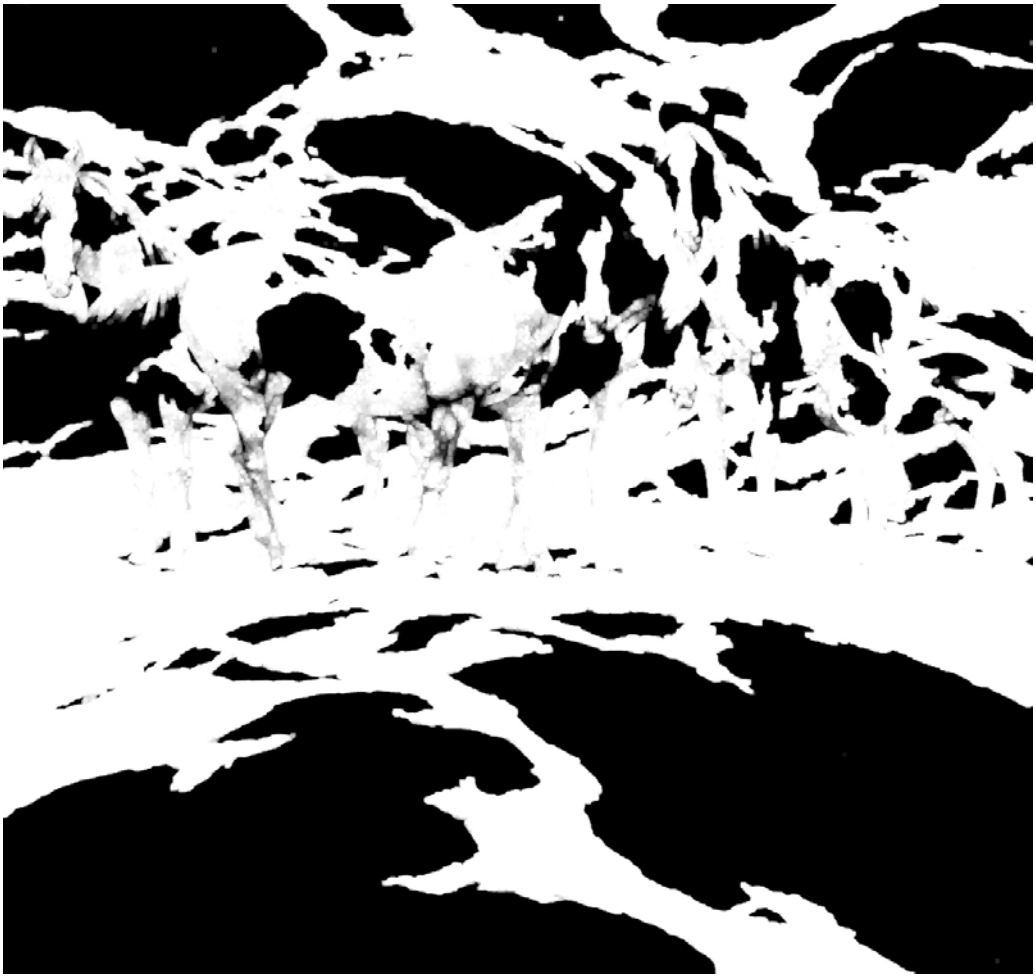
Die Sisyphos-Metapher als professionelle Metapher von Mathematiklehrern ist durch eine **‚spezifische Profitabilität'** motiviert:

- sie bietet den Vorteil der ***Sublimation***: Sie hebt subjektive Erfahrungen persönlichen Scheiterns auf eine allgemeinere, intersubjektive Ebene; sie wertet das Scheitern des Einzelnen damit auf zu einer grundsätzlichen Frage schicksalhaften Charakters.
- sie bietet den Vorteil der ***Entlastung***: Sie konstituiert eine soziale Gruppe als 'Schicksalsgemeinschaft' und vermittelt Entlastung von persönlicher Verantwortung, indem sie das Individuum zu einem Teil der sozialen, professionellen Kultur dieser Gruppe macht und so dem fundamentalen Bedürfnis des Individuums nach Sicherheit und Bindung entspricht.

---

2 Berger, P. (1999): The Hidden Dimension in Maths Teaching and Learning Processes. Exploring Entrenched Beliefs, Tacit Knowledge, and Ritual Behaviour Via Metaphors. In: G. Philippou (Hg.) Proceedings of the 8th European Workshop for Research on Mathematical Beliefs (MAVI-8), Nicosia (Cyprus), March 11–15, 1999. Nicosia: University of Cyprus, S. 8–17.

Das konstruktivistische Konzept vom Lernen



1. Konstruktivismus: eine ‚postpositivistische' Lerntheorie

Auf der Basis von Resultaten der Kognitionswissenschaft, die insbesondere auf Vorarbeiten Maturanas, Varelas und von Foersters beruhen, ist ein Konzept entwickelt worden, das sich als die **Lern- oder Wissenstheorie des postpositivistischen Paradigmas** charakterisieren lässt: der aus der konstruktivistischen Lerntheorie Piagets entstandene ***Radikale Konstruktivismus*** Ernst von Glasersfelds. Er hat erheblichen Einfluss auf Sozialwissenschaft, Psychologie, Literaturwissenschaft, Didaktik und insbesondere auf die Mathematikdidaktik genommen. Der Radikale Konstruktivismus basiert auf drei zentralen Positionen, die markante Abweichungen von den epistemologischen Grundüberzeugungen des positivistischen Paradigmas formulieren:

– Wissen wird vom Individuum nicht passiv erworben, sondern **aktiv konstruiert**.

- Wissen dient nicht der objektiven Darstellung irgendeiner absoluten Realität, sondern der **adaptiven Orientierung** des Individuums innerhalb seiner subjektiven Lebenswelt.
- Die **kognitiven Strukturen** der Wissenskonstruktion sind weder bei allen Individuen gleich noch beim einzelnen Individuum konstant, vielmehr werden sie, soweit nicht angeboren, ihrerseits **in konstruktiven Prozessen adaptiv fortentwickelt.**

Der konstruktivistische Ansatz hat das Ziel, ein Verständnis von Struktur, Genese und Modifikationsweisen von Wissen zu entwickeln, das insofern angemessener ist als das klassische Verständnis, als es nicht im Wesentlichen auf theoretischen Setzungen beruht, vielmehr **empirische Erkenntnisse von Biologie, Neurophysiologie und Kognitiver Psychologie** verarbeitet. Die dieser Konzeption zugrunde liegenden Befunde fassen Fischer und Peschl gemäß dem aktuellen Forschungsstand folgendermaßen zusammen:

> Die Repräsentation im neuronalen Substrat erfüllt nicht mehr eine Abbildfunktion zwischen Umwelt und kognitivem Apparat, sondern sie konstruiert durch kontinuierliche physische Veränderung das zum Überleben und zur Reproduktion des Organismus adäquate Verhalten und stellt damit eine stabile Beziehung zwischen Umwelt und Organismus sicher. Das Repräsentationssystem nimmt aktiv an den Konstruktionsprozessen teil. Die Dynamik der Umwelt spielt dabei nur die Rolle eines Auslösers (Perturbation), welche die durch das Repräsentationssystem determinierten Verhaltensweisen selektiert. [...] Die Repräsentationsstruktur wird solange versuchsweise verändert und durch Verhalten externalisiert, bis ein intern oder extern festgestellter Fehler minimiert bzw. der homöostatische Zustand hergestellt ist.[1]

Als eine **neue Lerntheorie** trägt der Konstruktivismus insbesondere dem Anpassungsdruck der Umwelt auf das Individuum, der daraus resultierenden adaptiven Wandlungsfähigkeit von Wissen und der multiplen, auf verschiedene Subkulturen und 'Welten' gleichzeitig bezogenen Struktur des Bewusstseins Rechnung. Er hat dementsprechend zur Revision bestehender und zur Entwicklung neuer Konzeptionen vom Lernen und Lehren geführt.[2] Im Rahmen der Sozialforschung kann diese neue Lerntheorie das Verständnis des Forschers in doppelter Hinsicht vertiefen: einmal, indem sie es ihm ermöglicht, Aspekte der **Vielschichtigkeit und Disparität im Denken und Handeln** seiner Forschungssubjekte als Reflex soziokultureller Einflüsse ihrer Lebenswelten zu verstehen; und zum anderen, indem sie ihm einen ähnlich vertieften **introspektiven Einblick** in Wesen und Bedingtheit auch des eigenen Denkens vermittelt.

Berger, P. (2001): Computer und Weltbild. Habitualisierte Konzeptionen von der Welt der Computer, Wiesbaden: Westdeutscher Verlag, S.142ff

---

1 Fischer & Peschl 1996, S. 330.

2 Vgl. Noddings 1990.

2. Die Sinnlosigkeit ‚deterministischen' Lehrens

Aus konstruktivistischer Perspektive sind Individuen durch folgende grundlegende Merkmale gekennzeichnet: Sie sind **strukturdeterminiert**, **selbstreferentiell** und **nicht-trivial**. Einfach gesagt umfaßt diese Auffassung, daß eine Person nicht von außen zu einer bestimmten Reaktion veranlaßt bzw. determiniert werden kann, sondern daß immer die interne Struktur der Person bestimmt, wie sie sich mit Anregungen, die aus dem umgebenden Milieu kommen, auseinandersetzt. Jede Form der Beeinflussung, ob sie nun von pädagogischen, therapeutischen, wirtschaftlichen etc. Interessen abgeleitet wird, muß sich damit auseinandersetzen, daß es keine direkten, instruktiven Interaktionsbeziehungen geben kann.

Unterrichten ist somit der Versuch der Anregung von komplexen affektiv-kognitiven Systemen, die nach ihrer eigenen Logik operieren. Sie sind selbstreferentiell, weil jede ihrer Handlungen auf ihre Struktur zurückwirkt und diese bestätigen oder verändern kann. Aufgrund der funktionalen Beziehungsstruktur zwischen Organismus und Umwelt werden ständig Wirklichkeitskonstruktionen als Routinen angewendet, teilweise neu entwickelt, überprüft, bestätigt, verworfen usw. Diese aktive Beziehungsgestaltung zwischen Subjekt und Umwelt ist der Ansatzpunkt jeder Beeinflussung.

Lehren ist nicht die Vermittlung und Lernen ist nicht die Aneignung eines extern vorgegebenen ‚objektiven' Zielzustandes, sondern **Lehren ist die Anregung des Subjekts, seine Konstruktionen von Wirklichkeit zu hinterfragen, zu überprüfen, weiterzuentwickeln, zu verwerfen, zu bestätigen etc.**

Das bedeutet auch, eine **Vielfalt von Lernwegen** zu **ermöglichen**, wie sie in Formen des offenen Unterrichts, des projektorientierten Unterrichts und des forschenden Lernens umgesetzt wird. Vielfalt bedeutet die Öffnung der Räume.

Werning, R. (1998): Konstruktivismus. Eine Anregung für die Pädagogik?, *Pädagogik* 7–8 (98), S. 39–41

3. Eigenaktivität

Lernen heißt „**selbst erfahren, ausprobieren, experimentieren**, immer **in eigene Konstruktionen** ideeller oder materieller Art **überführen** und in den Bedeutungen für die individuellen Interessen-, Motivations- und Gefühlslagen thematisieren."

Reich 1996, 119 zitiert nach Timm, J.-P. (1996): Neue Perspektiven: Konsequente Schülerorientierung. In: Bach, G. & Timm, J.-P. (1996): Englischunterricht. Tübingen und Basel: Francke, S. 268–284

4. Bedeutung eigener Lernstrategien

Die lerntheoretischen Konzepte der kognitiven und der konstruktivistisch orientierten Psychologie weisen dem strategischen Verhalten des Lernenden eine ganz zentrale Bedeutung bei. **Lernen** wird als eine **aktive Tätigkeit** gesehen, die **vom Lernenden selbständig durchgeführt** werden muß. Der Lernende konstruiert sich sein Wissen aus den angebotenen Informationen – Lernen wird als „**kreativer Konstruktionsprozeß**“ gesehen. Für die Wissenskonstruktion benötigt der Lernende aber Instrumente, Werkzeuge, d.h. Strategien. Das Gelingen eines Lernprozesses, so lehrt uns die Lernpsychologie, ist **abhängig vom Vorhandensein eines möglichst umfassenden Repertoires an Lernstrategien** und der Fähigkeit, diese angemessen einsetzen zu können“.

Wolff, D. (1997): Lernstrategien: Ein Weg zu mehr Lernerautonomie.

5. Lernerorientierter Unterricht

1. Unterricht geht stets von den **vorhandenen Wirklichkeitskonstruktionen** der Lernenden aus;
2. Lernende gestalten das eigene Lernen weitgehend selbstständig und **in eigener Verantwortung**;
3. **Selbstkontrolle und Kontrolle im sozialen Kontext der Lerngruppe** tritt auf weiten Strecken an die Stelle der Fremdkontrolle durch die Lehrkraft.

Wendt, M. (1998): Fremdsprachenlernen ist konstruktiv. *Der fremdsprachliche Unterricht Französisch* 2/1998, 3–10.Wendt 1998, S. 7

6. Autonomes lernen – Lernerautonomie

Kognitive und konstruktivistische Lerntheoretiker betonen also gleichermaßen die **Eigenständigkeit und Selbstverantwortlichkeit** des Lernenden bei allen Informationsverarbeitungs- und Lernprozessen. Sie stellen heraus, daß **Lernen ein aktiver Prozeß** ist, und sie unterstreichen, daß Lernprozesse für jeden Lernenden **zu unterschiedlichen Ergebnissen** führen. Sie heben die **Notwendigkeit der sozialen Interaktion** zwischen den Lernenden hervor und verweisen darauf, daß **Strategien beim Lernen eine entscheidende Rolle** spielen. Sie betonen die **Fähigkeit zur Evaluation der eigenen Lernprozesse**.

Wolff, D. (1997). Lernstrategien: Ein Weg zu mehr Lernerautonomie.

7. Konstruktion statt Instruktion

‚OUT'	*‚IN'*
Instruktivismus	Konstruktivismus
Schule = Belehrungsanstalt	Schule = Lernwerkstatt
isoliertes Faktenwissen	vernetzte Wissensinhalte
Mathe als statisches System / Mathe = Formelsammlung	Mathe als dynamischer Prozess / Mathe = Problemlösen
Mathe lehren	Mathe erfahren / konstruieren
monomethodische /monomediale Wissensvermittlung	multimethodischer / multimedialer Wissenserwerb

Stark modifiziert nach: Donath, R.: Englischunterricht in der Informationsgesellschaft

8. ‚Klientenzentrierter' Ansatz

Je mehr ich gegenüber den Realitäten in mir und im anderen offen bin, desto weniger verfalle ich dem Wunsch herbeizustürzen und „die Dinge in Ordnung zu bringen". Je mehr ich versuche, mir und den Erfahrungsvorgängen, die sich in mir ereignen, zuzuhören, und je mehr ich versuche, die gleiche **zuhörende Einstellung** auf einen anderen Menschen auszudehnen, desto mehr **Respekt** empfinde ich **vor den komplexen Prozessen des Lebens**. So werde ich immer weniger dazu neigen, hinzueilen, um die Dinge in Ordnung zu bringen, Ziele zu setzen, Menschen zu formen, sie in die Richtung zu manipulieren und zu schieben, in die ich sie haben möchte. **Ich bin weit mehr damit zufrieden, einfach ich selbst zu sein und einen anderen sich selbst sein zu lassen.** […]

Aber das ist gerade der **paradoxe Aspekt** meiner Erfahrung: je mehr ich einfach gewillt bin, inmitten dieser ganzen Komplexität des Lebens ich selbst zu sein, und je mehr ich gewillt bin, die Realitäten in mir selbst und im anderen zu verstehen und zu akzeptieren, **desto mehr scheint Veränderung in Gang zu kommen**.

Carl Ransom Rogers (1902–1987), Amerikanischer Psychologe, Begründer der sog. **‚klientenzentrierten' Psychotherapie**, die auf einer Person-Person-Beziehung zwischen Therapeut und ‚Klient' (Patient) basiert und beide gleichberechtigt neben einander stellt.

9. Schoenfelds ‚Theoreme'

Theoreme:

1. Mathematik ist eine lebendige und aufregende **Disziplin der Sinn-Konstruktion**.
2. Schüler werden sie dann – und nur dann – so sehen, wenn sie sie so **im Klassenraum erleben**.

Korollar:

Praktisch der gesamte normale Unterricht sollte aufgegeben werden. Er sollte ersetzt werden durch Kurse, in denen Schüler sich mit dem Stoff auf intellektuell redliche Weise auseinandersetzen.

Alan Schoenfeld (1991), amerikanischer Mathematikdidaktiker

10. Mathematischer Wissenserwerb: Vorwissen + soziale Interaktion in ergiebigen Problemfeldern

Nach dem heutigen Erkenntnisstand in der Mathematikdidaktik wird mathematisches Wissen **in sozialer Interaktion** durch **aktive Auseinandersetzung der Lernenden mit ergiebigen Problemstellungen** erworben. Die Lernenden stützen sich dabei auf das, **was sie schon wissen**, und **führen es produktiv weiter**.

Für die Wissens»vermittlung« durch den Lehrer gibt es dabei grundsätzliche systemische Grenzen. Mathematisches Wissen, selbst in seinen elementarsten Formen, ist so komplex, dass Lernen **ohne Selbstorganisation der Lernenden gar nicht möglich** ist.

[…] Innovative Forschungsgruppen innerhalb der Mathematikdidaktik [arbeiten] mit Nachdruck an der **Ablösung des belehrenden Unterrichts durch aktiv-entdeckende Lernformen,** wie die gerade erschienene OECD-Studie »Changing the Subject: Innovations in Science, Mathematics and Technology Education« gut illustriert (OECD 1996). Die größten Fortschritte sind dabei bisher im Bereich der Grundschule erzielt worden. Das **Vorwissen der Kinder**, das neuen Forschungsbefunden zufolge **viel höher** ist **als bisher angenommen**, wird heute nicht mehr ignoriert, sondern **in den Unterricht einbezogen**. **Eigen-Produktionen** der Kinder im Verlauf des Lernprozesses […] werden nicht mehr als Wildwuchs gesehen, den die Lehrerin auszumerzen und durch »Normalverfahren« zu ersetzen hat. Die Vielfalt der Lösungen ist ja lediglich Ausdruck dafür, dass Rechengesetze unterschiedlich genutzt und unterschiedliche Schreibweisen gewählt werden können. Wie empirische Befunde zeigen, **eignen sich die kreativen Leistungen der Kinder sehr gut als Verständnisgrundlage für den weiteren Lernprozess**. Die notwendige Konventionalisierung der Verfahren und Schreibweisen lässt sich ohne große Mühe erreichen.

Erich Ch. Wittmann (2002): Von Plato bis Piaget – Wie kommt die Mathematik in den Kopf? In R. Voß (Hg.): Unterricht aus konstruktivistischer Sicht. Neuwied: Luchterhand, S. 133–151.

11. „Man sieht nur, was man weiß“

Wenn ich weiß, dass da Pferde sind, sehe ich sie schließlich auch (zum vorigen Bild). Viele Menschen können in dem oberen Bild zunächst nichts erkennen. Sobald sie aber den Hinweis ‚Pferde!’ vernehmen, können sie plötzlich Pferde wahrnehmen. Die Wahrnehmung der Pferde wird also nicht von der ‚Realität außerhalb von mir’ (Bild) ausgelöst, nicht von dem ‚sensorischen Input’, sondern von ‚etwas in mir’, meinem eigenen mentalen Konzept ‚Pferde’, dessen Aktivierung allerdings von außen angestoßen wird, was dazu führt, dass ich in dem sensorischen Input durch aktive Konstruktion das Muster ‚Pferd’ erzeuge. – Auch ‚Lehren’ bedeutet in Wahrheit ‚äußeres Anstoßen interner konstruktiver Prozesse’.

… eine Sehhilfe:



7. Die Entwicklung des mathematischen Denkens
Oder: Lernen geht von den Phänomenen zu den Begriffen

7.1 Wie wir mathematische Begriffe lernen

Wir können sagen: ‚Lernen von Mathematik' ist ‚die Bildung mathematischer Begriffe'. Doch wie läuft diese Begriffsbildung ab? Wenn wir Mathematikvorlesungen (Mathematikunterricht, Mathematikbücher) betrachten, dann könnten wir den Eindruck gewinnen, mathematische Begriffsbildung liefe nach streng logischen und systematischen Regeln ab. Das ist zwar ein weit verbreitetes Vorurteil (nach dem immer noch unterrichtet wird), aber eines, das unserer einfachen Selbstbeobachtung beim Lernen (und auch den Forschungsergebnissen von Psychologie und Hirnforschung) widerspricht. Es ist eigentlich verblüffend, dass eine so offensichtlich unzutreffende Vorstellung von so vielen so intensiv und so lange geglaubt werden konnte.

In vielen Mathematikvorlesungen wird der Stoff in strenger logisch-systematischer Ordnung präsentiert (Schema: *Definition-Satz-Beweis*). Das ist die Perspektive der ‚schon fertigen Mathematik'. In solchen Vorlesungen wird die Mathematik als ein fertiges Gebäude beschrieben; hier ‚baut' man also kein Haus, sondern man führt vor, wie alles in einem fertigen Haus funktioniert, wie man das Haus ‚benutzt'. In einer solchen Vorlesung kann man daher auch nur (bestenfalls) lernen, wie man die Mathematik benutzt. Um die Mathematik zu begreifen, muss man aber verstehen (erleben), wie sie gebaut wird. Bauen ist ein konstruktiver Prozess; es läuft nicht so ab, dass man einfach ein fertiges Haus in die Landschaft setzt. Ebenso kann auch niemand die ‚fertige Mathematik' lernen. Fertig wird jeder Stoff (jedes Wissen) erst allmählich, indem wir ihn in unserem Kopf aufbauen. Wir konstruieren unser Wissen nicht aus vielen Steinen, sondern aus einer Vielfalt von beobachteten Phänomenen, doch das geht nicht viel anders als beim Häuserbauen, nur noch komplexer und individueller.

Halten wir fest:

- **‚Mathematik-Lernen' ist ‚Mathematische Begriffsbildung'.**
- **Das Bilden (Konstruieren) mathematischer Begriffe steht nicht am Anfang des Lernens von Mathematik.**
- **Begriffsbildung ist vielmehr ein langfristiger Lernprozess. Dieser Lernprozess geht stets von (vorsprachlichen) Erfahrungen aus, die in Handlungszusammenhängen gemacht werden. Sprache entwickelt sich im Tun.**
- **Begriffsentwicklung ist immer ein aktives und konstruktives Tun. Lernen ist niemals ‚Aufnahme von Information', sondern stets konstruktives Handeln.**

Was heißt das für den Mathematikunterricht (für Mathematikvorlesungen)? Man kann nicht ‚zuerst die Begriffe klären' und dann die Sachverhalte. Man kann z. B. nicht erst lernen, was ein rechtwinkliges Dreieck ist, und später, welche Eigenschaften und Beziehungen solche Dreiecke haben. Was ein rechtwinkli-

ges Dreieck ist, wissen wir nämlich erst, wenn wir alle möglichen Eigenschaften - einfache und kompliziertere, naheliegende und verblüffende - beobachtet, untersucht und einigermaßen verstanden haben.

Der ‚kognitive Weg' verläuft also nicht logisch-systematisch (von den Definitionen zu den Sätzen, von den Begriffen zu den Phänomen), sondern gerade umgekehrt: **von den Phänomenen zu den Begriffen**, vom Handeln zum Denken. (Piaget: „Denken ist vorgestelltes Handeln.")

Beispiel: Die ‚Welt der Geometrie' besteht aus

- geometrischen **Objekten**
  - ebene Objekte (Dreieck, Kreis, Strecke, Gerade ...)
  - räumliche Objekte (Würfel, Kugel, Quader ...)
- diese haben **Eigenschaften**
  - qualitative Eigenschaften (regelmäßig, viereckig, quadratisch, symmetrisch...)
  - quantitative Eigenschaften (Längen-, Inhaltsmaße)
- und **Beziehungen** untereinander (parallel, deckungsgleich, symmetrisch...),
- und man kann auf sie **Operationen** anwenden (Verschieben, Spiegeln, Zerlegen, Zusammensetzen...)

Entsprechend gibt es verschiedene Arten geometrischer Begriffe:

- Objektbegriffe
- Eigenschaftsbegriffe
- Beziehungsbegriffe (Relationsbegriffe)
- Operationsbegriffe

Das ist die logisch-systematische Sicht der Geometrie, die das fertige Gebäude betrachtet. Die mathematikdidaktische (lernpsychologische) Sicht der Geometrie ist aber eine ganz andere. Würde der geometrische Begriffserwerb wirklich logisch-systematisch ablaufen, dann würde man zuerst Objektbegriffe lernen, dann Eigenschaftsbegriffe, dann Beziehungs- und Operationsbegriffe. So läuft der Begriffserwerb aber nicht ab. **Vielmehr macht man Erfahrungen (lernt man) immer in bestimmten Sachzusammenhängen, in einem bestimmten Phänomenbereich, in einer bestimmten Lernumgebung**, zum Beispiel im Bereich ‚Würfel und andere Körper'.

In einer solchen Lernumgebung lernt man die dazu gehörenden Begriffe (Objekt-, Eigenschafts-, Beziehungs- und Operationsbegriffe) **meist ‚auf einmal'** (gleichzeitig, also nicht systematisch nacheinander) und **eher zufällig** (durch Entdecken, also nicht logisch durch Schlussfolgern) und **vernetzt** (also nicht hierarchisch geordnet) und **selektiv** (also meist nicht vollständig) und **individuell** (also nicht alle gleich).

7.2 Die Stufentheorie von Jean Piaget [1]

sensomotorische Stufe (ungefähres Alter: bis 2 Jahre)

prä-operationale Stufe (ungefähres Alter: 2 bis 6 Jahre)

– Das Denken ist vorwiegend an konkretes Handeln und unmittelbare Anschauung gebunden. (Piaget: ‚Stadium der anschaulichen Intelligenz')
– Die Kinder haben zumeist noch kein tragfähiges Mengeninvarianzkonzept (Knetmasseversuch, Umschüttversuch, Umordnungsversuch)
– *Geometrie*: Lernen *topologischer Beziehungen* (zumeist als Entweder-oder-Beziehungen: verbunden/unverbunden; innen/außen; nah/fern; offen/geschlossen ...)

konkret-operationale Stufe (ungefähres Alter: 7 bis 11 Jahre)

– Das Denken ist vorwiegend an konkrete Vorstellungen (konkrete Handlungen, unmittelbare Anschauung, aber auch *Erfahrungen* damit) gebunden
– Die Kinder haben zumeist noch kein abstraktes Deduktionskonzept (Vergleichsversuch: ‚Maria ist größer als Stefanie, Maria ist kleiner als Esther; wer ist die kleinste?')
– *Geometrie*: Lernen *projektiver Beziehungen* (meist als Ordnungsrelationen oder Lagebeziehungen: ‚A kommt vor B', ‚liegt rechts von', ‚oberhalb von' usw.; Lernen der *Standpunkt-Abhängigkeit* von Aussagen (‚dein rechtes Auge ist aus meiner Sicht das linke'); Lernen *euklidischer Beziehungen* (meist als Entfernungsbeziehungen: Konstruktion von Linien, Figuren, Körpern; konstante Maßeinheiten; konstantes Bezugssystem)

formal-operationale Stufe (ungefähres Alter: ab 12 Jahren)

– Das Denken kann sich von konkreten Vorstellungen lösen; abstrakte, formale Vorstellungen werden gebildet und logisch-deduktiv miteinander verbunden; hypothetisches, deduktives Denken wird entwickelt

Modifizierungen und Kritik

Piagets Stufentheorie ist mehrfach modifiziert und ausgebaut worden (Bruner, Aebli, van Hiele, Galperin, Lompscher, u.a.). Oft wurde kritisiert, dass Piaget seine (zugegebenermaßen bahnbrechenden) Versuche **zu schematisch interpretiert** habe, und dass seine Theorie eine **zu strikte zeitliche Abfolge** postuliert. Wiederholt man Piagets Versuche, so erkennt man in der Tat häufig, dass eine differenziertere Interpretation zu Ergebnissen kommt, die den Schlussfolgerungen von Piaget widersprechen. So zeigt etwa **Bruners ‚Abschirm-Versuch'** (s. Vorlesung), dass Kinder auf der prä-operationalen Stufe sehr wohl über ein Mengeninvarianzkonzept verfügen, das allerdings durch ‚fehlinterpretierte Anschauung' (optische Täuschungen etc.) verdeckt werden kann.

---

[1] Siehe F. Zech (1998): Grundkurs Mathematikdidaktik, Weinheim/Basel: Beltz, S. 89 ff.

7.3 Das Stufenmodell von Pierre u. Dina van Hiele für das Lernen von Geometrie

0. Denkniveau (Grundniveau) Räumlich-anschauungsgebundenes Denken (Geometrisch-ganzheitliches Denken)

1. Denkniveau Geometrisch-analysierendes Denken
- Sortieren von Figuren nach Eigenschaften
- Überprüfen von Figuren auf bestimmte Eigenschaften
- Beschreiben von Figuren durch bestimmte Eigenschaften
- Erkennen von Figuren bei allmählichem Aufdecken

2. Denkniveau Geometrisch-abstrahierendes Denken
- Systematisieren (‚Haus der Vierecke')
- Klassifizieren (Arten von Dreiecken)
- Vergleichen von Körpern

3. Denkniveau Geometrisch-schlussfolgerndes Denken (Verständnis der Rolle von Axiom, Definition, Satz, Beweis)

4. Denkniveau Abstrakte Geometrie (Verständnis der Rolle verschiedener geometrischer Axiomensysteme: euklidische, nichteuklidische Geometrie)

Welche Niveaus werden wo realisiert?

- Primarstufe: Denkniveaus 0 und 1 (in Ansätzen 2)
- Sekundarstufe I: Denkniveaus 0, 1 und 2 (in Ansätzen 3)
- Sekundarstufe II: Denkniveaus 0, 1 , 2 , 3
- Lehramtsstudium: Denkniveaus 0, 1, 2, 3 (in Ansätzen 4)

Resultate empirischer Untersuchungen:

- Die ‚van-Hiele-Stufen' sind beim geometrischen Problemlösen beobachtbar.
- Sie sind nicht altersspezifisch: Kinder gleichen Alters arbeiten oft auf unterschiedlichen Stufen/Denkniveaus.
- Sie sind oft problemabhängig: ein Kind kann je nach Problem auf unterschiedlichen Stufen/Denkniveaus arbeiten.
- Sie sind oft arbeitsphasenabhängig: oft wechseln Kinder die Stufe/das Denkniveau im Verlauf einer Problemlösung (am häufigsten zwischen 1 und 2; aber auch zwischen 2 und 3).
- Sie lassen sich also nicht bestimmten Altersstufen/Klassenstufen zuordnen!

– Oft braucht der Stufen-Wechsel einen Anstoß von außen (Anregung durch Lehrer).
– Das van-Hiele-Modell erlaubt eine gute Beschreibung des geometrischen Denkens von Kindern.
– Anforderungen müssen an das Denkniveau des einzelnen Kindes angepasst sein (Unter- wie Überforderung bewirkt Frustration); durch Beobachtung und Analyse der Arbeitsweise des Kindes und Beschreibung seines Denkens mit Hilfe des van-Hiele-Modells ist eine solche Anpassung möglich.

8. Aspekte guten Mathematikunterrichts
Oder: Das einzige sinnvolle ‚Rezept für guten Unterricht' lautet, dass Rezepte fast immer zu schlechtem Unterricht führen

8.1 Tätigkeiten von LehrerInnen

Wohl an kaum eine andere Berufsgruppe werden in der öffentlichen (bzw. „veröffentlichten") Meinung gegenwärtig so hohe und so vielfältige Anforderungen gestellt wie an Lehrerinnen und Lehrer (eine Parallele ist die Berufsgruppe der Ärzte und Krankenschwestern, allgemein alle im Gesundheitsbereich Tätigen).

Mögliche Ursachen dafür:

– Einerseits wecken die wirklich komplexen und wichtigen Prozesse von Erziehung und Bildung bei Eltern, LehrerInnen, PolitikerInnen und anderen Gruppen zurecht viele und ganz verschiedenartige Wünsche nach möglichst optimalen Bedingungen dieser Prozesse.
  Die Bildungs- und Erziehungskultur wird also in der Öffentlichkeit als immer wichtiger angesehen; gleichzeitig wird sie als immer komplizierter und schwieriger zu steuern wahrgenommen.

– Andererseits aber fühlen sich immer mehr gesellschaftliche Gruppen, insbesondere immer mehr Eltern und PolitikerInnen, gerade wegen dieses hohen Anspruchsniveaus davon überfordert, selbst einen angemessenen Beitrag zu dieser Kultur zu leisten; die Aufgabe, die Bildungs- und Erziehungskultur erfolgreich zu gestalten, wird immer stärker „delegiert", d.h. einer Gruppe von „Spezialisten, die dafür bezahlt werden" zugeschoben.
  Es ist also auch hier (wie z.B. bei der Gesundheitsvorsorge) eine **Tendenz** zu erkennen, die sich als **Rückzug aus der eigenen Verantwortlichkeit**, als **Delegieren eigener Verantwortung auf Institutionen** beschreiben lässt.

Allerdings ist das „professionelle Profil" von Lehrerinnen und Lehrern in der Tat und aus guten Gründen in den vergangenen Jahrzehnten immer anspruchsvoller und vielfältiger geworden. Dies betrifft nicht nur die Qualität ihrer eigenen Ausbildung, ihr berufliches Reflexionsniveau und ihre ethische „Haltung" etc., an die ja immer schon hohe Maßstäbe angelegt wurden und angelegt werden mussten. Deutlich ausgeweitet hat sich aber die **Vielfalt der Tätigkeiten von LehrerInnen**, die heute selbstverständlicher Bestandteil ihres Berufsalltags geworden sind. Betrachten wir nur einmal die wichtigsten Tätigkeiten (die oft wieder andere „Subtätigkeiten" zur Folge haben):

Tätigkeit	*Adressaten / Gegenstand*
unterrichten	SchülerInnen
beurteilen	SchülerInnen
erziehen	SchülerInnen
beaufsichtigen	SchülerInnen
beraten	SchülerInnen, Eltern
evaluieren	Unterricht
verwalten / organisieren	Akten, Klassenfahrten, Feste, ...
Unterricht vorbereiten	Stoff, SchülerInnen, ...
sich fortbilden	Stoff, Methoden, Verwaltung ...
planen / entwickeln / 'innovieren'	Materialien, Schulprofil, Kooperation mit anderen Schulen, ...
repräsentieren / informieren / werben	Öffentlichkeit, Presse, Eltern, „abgebende" Schulen, ...

Was ein guter Lehrer, eine gute Lehrerin ist, lässt sich daraus natürlich nicht ableiten. Meistens schaffen wir Menschen es ja nicht, in allen Disziplinen gut zu sein. Aber sicher kann ein Lehrer, eine Lehrerin nicht allein z.B. nach ihrem Unterricht bewertet werden, auch wenn dies natürlich ein ganz besonders wichtiger Teil ihres Berufs ist. (Aber ist es der wichtigste? Ist Unterrichten wirklich wichtiger als Beraten? Wie steht es mit Erziehen?)

Gut zu sein, bedeutet für LehrerInnen wohl,

– in allen ihren zentralen professionellen Tätigkeiten gut zu sein,
– in möglichst vielen ihrer weniger zentralen Tätigkeiten gut zu sein und
– in keiner Tätigkeit schlecht zu sein.

Was aber „gut" dabei jeweils bedeutet, und welche Tätigkeiten wirklich „weniger zentral" ist – das können wir nicht vollständig, nicht endgültig und nicht für alle Menschen übereinstimmend erklären. (Es gibt ja auch keine Musik, keine Speise, keine Therapie, die wir alle übereinstimmend als „gut" bezeichnen würden.)

8.2 Guter Mathematikunterricht

Was „guter Matheunterricht“ ist und wie Sie ihn erreichen können, das ist keine Frage, auf die ich (oder irgendwer sonst) mit einem „Kochrezept“ oder mit einem „Rezeptbuch“ antworten kann. Im Gegenteil: Eher ist es so, dass die sicherste Methode, keinen guten Unterricht zu machen, in der sturen Anwendung von Rezepten besteht.

Was „gut“ bedeutet, darüber konstruieren Sie im Laufe Ihres Studiums wie auch im Laufe Ihres Berufslebens fortlaufend ein Netz von Vorstellungen (Vermutungen, Hypothesen, Ideen, Idealen, Träumen, …). Dieses Netz haben Sie schon, Sie konstruieren, genau genommen, schon seit Ihren Kindertagen daran herum. Und dieses Konstruieren hört nie auf.

Was andere dazu denken, nehmen Sie (vielleicht) mit Interesse auf, aber nur, wenn es in Ihr Netz passt. Und selbst wenn jemand die „absolut richtige Antwort“ wüsste, könnte es sein, dass Sie sie nicht verwerten können, weil ihr Netz nicht gut genug ist. Eine wichtige Voraussetzung dafür, guten Unterricht zu machen, ist daher, daran zu arbeiten, dass das eigene Wissensnetz vielfältig genug und genügend sicher geknüpft ist, dass es Erfahrungen und Anregungen aufnehmen (also bewerten und verwerten) kann, einfach deshalb, weil es ständig darin „trainiert“ wird, aus Erfahrungen und Anregungen zu lernen, indem es sie laufend reflektiert.

Natürlich gibt es Merkmale (im Lehrerverhalten, in der Gestaltung der Lernumgebung etc.), die einen guten Unterricht begünstigen, wie es auch solche gibt, die ihn behindern. Solche Merkmale sollten Sie bedenken, studieren, kritisch befragen, umzusetzen versuchen usw. In dieser Vorlesung sind eine Reihe davon vorgekommen. Fassen wir einmal zusammen, was wir wissen:

Guter Mathematikunterricht ist

- **beobachtungsgestützt**
- **schülerorientiert**
- **handlungsorientiert**
- **aktiv-entdeckend**
- **problemorientiert.**

Doch bei alledem sollten Sie die folgende Maxime (=Lebensegel, Denkspruch) nicht aus den Augen verlieren; es soll Ihnen nicht so gehen wie denen, die nicht damit anfangen wollen, guten Unterricht zu machen, bevor ihnen nicht jemand genau erklärt, was das ist …

Maxime:

Einen guten Unterricht machen Sie am ehesten dann, wenn Sie ihn machen wollen und sich stets darum bemühen. Auch wenn Sie sich nie sicher sein werden, wie er wirklich aussieht.

Die Ratschläge, mit denen man wirklich etwas anfangen kann (auch wenn man das meist nicht sogleich einsieht), sehen oft ziemlich paradox aus …

8.3 Zur Beurteilung von Unterricht

Die Beurteilung von Unterricht ist eine der wichtigsten Tätigkeiten von Lehrern/Lehrerinnen (sie ist eine „Subtätigkeit“ des Evaluierens).

– Sie sollte bewusst, gezielt und regelmäßig erfolgen.
– Die Fähigkeit zur Beurteilung von Unterricht ist nicht angeboren, sie muss gelernt werden.
– Die Beurteilung von Unterricht basiert stets auf eingehender und sorgfältiger Beobachtung.
– Bei der Beurteilung von Unterricht muss stets das Kind im Zentrum stehen. Nicht die Mathematik (‚der Stoff’, der Lehrplan) und auch nicht die Lehrerin/der Lehrer (für sie ist der Unterricht nicht da).

Bei der Beurteilung von Unterricht können wir uns zum Beispiel an den folgenden Leitfragen (Beurteilungskriterien) orientieren.

Das Kind als Persönlichkeit

– Behandelt die Lehrerin[1] das Kind höflich und respektvoll und als der Lehrerin prinzipiell gleichwertig?
– Vermeidet die Lehrerin konsequent Situationen, die für das Kind unangenehm oder gar peinlich sind?

Das Kind als soziales Wesen

– Hat das Kind ausreichend Gelegenheit, sich aktiv in das Unterrichtsgeschehen einzubringen?
– Achtet die Lehrerin darauf, dass nicht einzelne Kinder sich auf Kosten anderer in den Vordergrund spielen?
– Hört die Lehrerin dem Kind zu? Hören die anderen Kinder dem Kind zu?
– Sprechen die Kinder im Unterrichtsgespräch auch miteinander oder immer nur mit der Lehrerin?
– Hält sich die Lehrerin so weit wie möglich zurück oder ist sie häufig dominant?
– Lässt die Lehrerin auch falsche Beiträge ohne sofortige Bewertung zu, damit die Kinder Fehler selbst erkennen (und evtl. korrigieren) können?
– Lernt das Kind nur von der Lehrerin, oder auch von anderen Kindern?

[1] auch im folgenden stets mitgemeint: der Lehrer

Das Kind als MitarbeiterIn am Mathematikunterricht

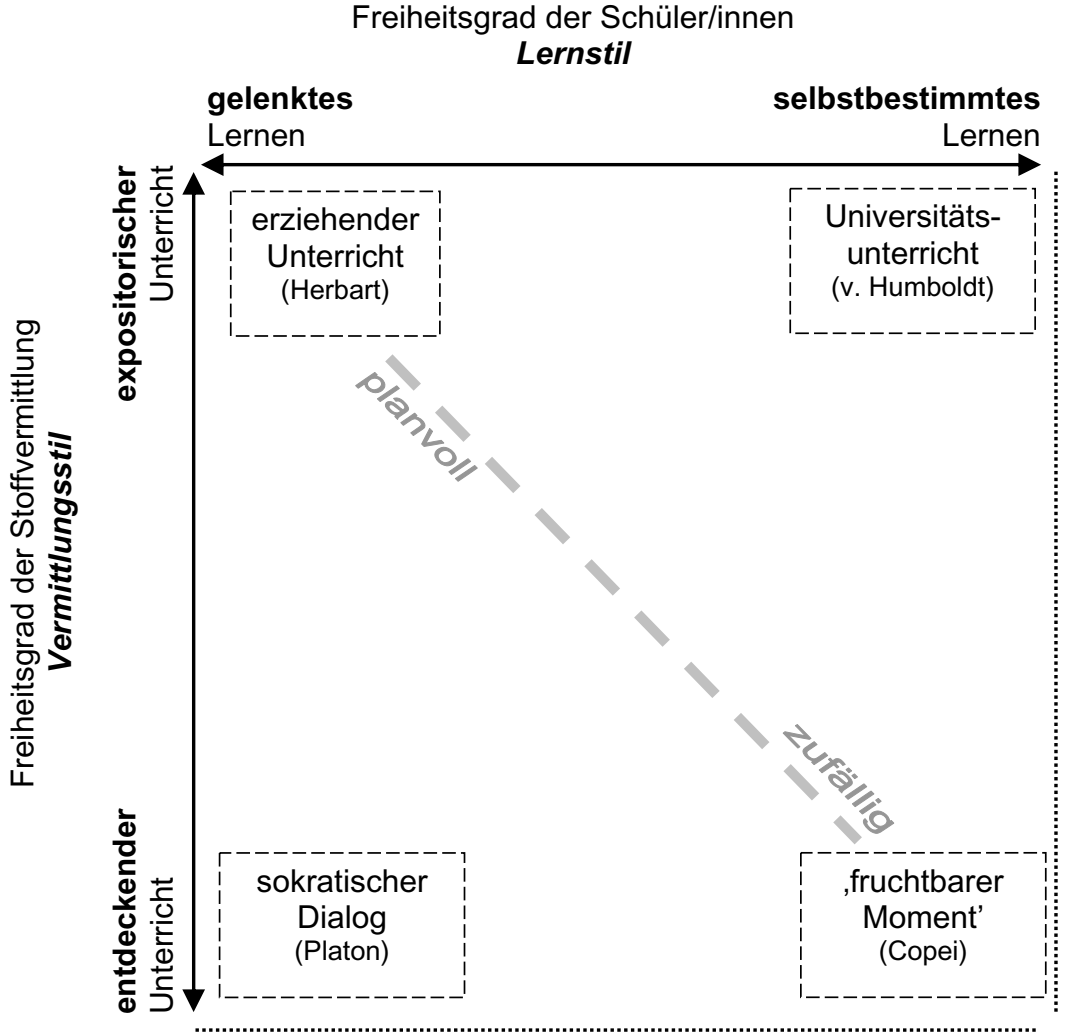
- Auf welcher Entwicklungsstufe sind die (meisten) Kinder der Klasse?
- Haben die Kinder (entsprechend ihrer Entwicklungsstufe) genügend Gelegenheit, an (konkreten oder vorgestellten) Handlungssituationen Erkenntnisse zu entwickeln – und zwar eigenständig und in ausreichender Langsamkeit?
- Ist das Übungsmaterial geeignet für den Aufbau eigener Erkenntnisse?
- Ist der Unterricht zu kognitiv orientiert (verläuft er zu lange auf der symbolischen Ebene)?
- Wird das EIS-Prinzip adäquat berücksichtigt?
- Werden in der Stunde von der Lehrerin Situationen organisiert,
  - die dem Kind ein genügend langsames Beobachten, Analysieren, Verstehen ermöglichen?
  - die das Kind zu eigenem Denken und eigenem Handeln anregen und ermutigen?
  - die das Kind zum kreativen Weiterdenken anregen?
  - die dem Erfahrungsbereich und dem täglichen Leben des Kindes entnommen sind?
  - bei denen das operative Prinzip Anwendung finden kann? (Motto: „Was passiert eigentlich, wenn wir ...?“)
- Sind viele Kinder in einzelnen Unterrichtsphasen gelangweilt? (Wie viele Kinder zeigen noch auf? Was tun die anderen?)
- Wenn die Kinder gelangweilt oder unruhig sind: Stimmt die Länge der einzelnen Unterrichtsformen und bieten sie genug Abwechslung?
- Gibt es (implizit eingebaute) Differenzierungsmöglichkeiten für unterschiedlich schnelle und gute Kinder?

Das Kind als SchülerIn einer allgemeinbildenden Schule

- Lernt das Kind in der Stunde nur Mathematik, oder erfährt es auch Allgemeinbildung?
- Hat der Gegenstand der Stunde etwas mit dem Leben des Kindes bzw. mit dem Leben, in das es hineinwachsen soll, zu tun?
- Werden mögliche Querverbindungen mit anderen Fächern berücksichtigt?

8.4 Das Entscheidungsfeld der Unterrichtsmethoden

nach Wiechmann, J. (Hg.) (1999): Zwölf Unterrichtsmethoden, Weinheim: Beltz.



Die ‚Verortung' klassischer Unterrichtsmethoden

8.5 Was der Methodenvielfalt im Wege steht

LehrerInnen lehren, wie sie gelehrt wurden

Lehren erfolgt nach einem komplexen Handlungsszenario – solche Handlungsszenarien aber werden zumeist durch Imitation gelernt (Abgucken am Vorbild). Daher übernehmen LehrerInnen oft Methoden, ohne Alternativen wirklich zu reflektieren – oder: obwohl Alternativen eigentlich bekannt sind.

Verringerung von Arbeitsbelastung

– LehrerInnen am Berufsanfang beginnen oft engagiert mit vielfältigem Methodeneinsatz, reduzieren diese Vielfalt aber, wenn sie durch den damit verbundenen Arbeitsaufwand überlastet sind.

– Abhilfe: Kooperation mit anderen LehrerInnen; Methoden erst allmählich im Unterricht trainieren und Materialien erarbeiten.

Lieblingsmethode statt Methodenvielfalt

– Radikalisierung, Einengung der Methoden-Perspektive

– Man neigt dazu, eine als praktikabel erfahrene Methode zu ‚verabsolutieren'. „Man liebt, was man kennt und kann". Daher wenden LehrerInnen oft eine Lieblingsmethode immer wieder an, ohne offen für Methodenvielfalt zu sein.

Schemaverliebtheit / Betonung des Gleichartigen

– Methoden werden von LehrerInnen oft als ‚im wesentlichen ähnlich' verstanden; das ihnen Gemeinsame wird hervorgehoben, Unterschiede werden eingeebnet. Aus unterschiedlichen Methoden wird ein ‚gemeinsames Grundprinzip guten Unterrichts' zusammengetragen. Als gut bewertete Aspekte verschiedener Methoden werden ‚amalgamisiert'.

– S werden oft als ‚im wesentlichen ähnlich' verstanden. Das ‚allen Gemeinsame/Typische' wird betont und der Unterricht darauf ausgerichtet, obwohl in Wirklichkeit unterschiedliche Lernertypen existieren, die jeweils mit unterschiedlichen Methoden besonders gut erreicht werden können.

– Vorsicht bei der Strukturierung von Unterricht (Unterrichtsphasen): Es kann nicht stimmen, wenn jemand erklärt, verschiedene Methoden erforderten ‚im Wesentlichen stets dieselben Unterrichtsphasen' (z.B.: Einstiegsphase – Erarbeitungsphase – Vertiefungs-/Sicherungsphase).

Das „Kümmerer-Syndrom"

– LehrerInnen meinen oft, ‚für alles im Unterricht verantwortlich' zu sein, sich ‚um alles kümmern zu müssen'. Sie neigen daher dazu, Lehr-Lern-Prozesse bis ins Detail planen und reglementieren zu wollen. Intensive Unterrichtsvorbereitung ist gut, Lernprozesse lassen sich jedoch nicht determinieren.

– Wer am ‚Kümmerer-Syndrom' leidet, wird nur noch den lehrerzentrierten, eng geführten Frontalunterricht akzeptabel finden (verbunden mit ständiger Konzentrationsforderung an die S: „Passt auf, schaut her, hört zu").
– LehrerInnen müssen sich Entlastung schaffen von diesem unangemessenen und überfordernden Selbstanspruch!
– Nochmals: Planung sollte nicht – und kann nicht – das Ziel haben, Lernprozesse weitgehend vorherzubestimmen, vielmehr ‚vorab zu imaginieren'. Planen von Unterricht heißt nicht ‚determinieren', sondern ‚entwerfen + gestalten'. Unterrichtsplanung ist nicht ‚Fahrplan', sondern ‚Design'.
– Die Planung soll die LehrerInnen im Unterricht entlasten, damit sie ihre S beobachten können, Diagnosen stellen, spontane Impulse setzen können (usw.).
– Modell Arzt: Nicht ‚Behandlung' ist die zentrale Tätigkeit – sondern ‚Diagnose'! LehrerInnen, die immer nur handeln, können nicht beobachten. Das müssen sie aber, um ihr Lehrerhandeln sinnvoll zu machen (s. beobachtungsgestützter Unterricht).

8.6 Fallbeispiel 1: Frontalunterricht

Widersprüche

– Gegenwärtig noch am häufigsten angewandte Unterrichtsform, obwohl die meisten L diese Form ‚eigentlich ablehnen'.
– Wird von vielen L für ‚besonders effektiv' gehalten, obwohl L-Erfahrung und wissenschaftliche Untersuchungen gegen eine solche Effektivität sprechen.
– Wird als ‚gut planbar' empfunden, obwohl die S oft ‚nicht mitmachen und stören' (führt zu dauernder Disziplinierung).

Charakteristika

– Lehrgangscharakter des Unterrichts (Vortrag, Vorführung, Besprechung)
– Lehrerdominanz (L hat weitgehende Kontrolle des Unterrichtsgeschehens)
– Schülerpassivität und -abhängigkeit (Reaktivität)
– ‚sternförmige' Kommunikationsstruktur (alles läuft über L)
– Stofforientierung statt Lernerorientierung (kommt fachwissenschaftlich sozialisierten L entgegen, die in psychologischen/soziologischen /pädagogischen Fragen eher unsicher sind)

Methodische Favoriten des Frontalunterrichts

– Lehrervortrag
– Schülerreferat

– lenkende Lernmaterialien (‚Lückentext')
– fokussierende Sitzordnung (‚Autobus': alles sieht zum Fahrer)
– gelenktes Unterrichtsgespräch (‚fragend-entwickelndes' Unterrichtsgespräch, ‚sokratische' Methode): L bringt die S dahin, das von ihm/ihr vorgegebene Lernziel scheinbar eigenständig und aktiv zu erreichen (doppelter Widerspruch)

Hintergrund: Naive Lerntheorien

Verfechter/innen des Frontalunterrichts verfügen – zumeist unbewusst und daher unreflektiert – über eine subjektive ‚naive Lerntheorie': Zentrale Elemente dieser Lerntheorie sind Vorstellungen wie

– ‚Kein Lernen ohne Lehren' – ‚Lehren löst Lernen aus' – ‚L-Aktivitäten führen zu entsprechenden S-Aktivitäten' – ‚Wie man in den Wald hineinruft, so schallt es heraus'
– ‚Lernen ist Aufnehmen von Information, Lehren ist Vermitteln von Information' – ‚L müssen Wissen zu den S rüberbringen'
– ‚Von nichts kommt nichts' – ‚Von wem sollen die S denn lernen, wenn nicht von mir?!' – ‚Dafür habe ich schließlich doch studiert'
– ‚Wissen muss *vermittelt* werden' – ‚Die geeignete Form dieser Vermittlung hängt von dem ab, was vermittelt werden soll' – ‚Das Wissen ist für alle gleich' – ‚Daher gibt es für jeden Stoff *eine* optimale Form der Wissensvermittlung, die für alle S geeignet ist'
– ‚Gute L kann man daran erkennen, dass sie gut erklären können' – ‚Wenn L gut erklären und S gut aufpassen, dann lernen die S auch etwas'

Solche naiven Lerntheorien sind nicht mehr als Vorurteile. Sie widersprechen bereits der elementaren Erfahrung beim Beobachten von Lernprozessen. Nach allem, was man heute weiß (Psychologie, Soziologie, Ethnologie, Neurowissenschaft, Kognitionswissenschaft, empirische Mathematikdidaktik) ist Lernen ein komplexer, individueller, selbstgesteuerter Konstruktionsprozess (**Konstruktivismus**).

Kritik

– kaum Interaktivität unter den S, kaum Aktivität der einzelnen S, kaum Selbstwahrnehmung der S, kaum Erfolgserlebnisse der S
– trainiert vorwiegend rezeptive Verhaltensweisen der S
– keine Berücksichtigung unterschiedlicher Lernertypen
– ‚manipulativer' Unterrichtsstil
– fördert nicht ‚Selbststeuerungskomptetenz'
– fördert nicht soziale Kompetenz
– nicht-partnerschaftlicher Unterrichtsstil

– keine Beobachtung des Lernprozesses (Diagnose) möglich
– etc.

Einbinden/Öffnen von Frontalunterricht

Frontalunterricht kann nur in ganz bestimmten Lernsituationen (Stoffgebieten) sinnvoll sein. Auch dann nicht als ‚globale Methode' (für eine ganze oder mehrere Unterrichtsstunden), sondern als begrenzte Form (maximal ca. 20 Minuten).

Frontalunterricht kann nur im Rahmen eines Wechsels von geschlosseneren und offeneren Unterrichtsformen sinnvoll sein.

1. Phase: Darbieten
2. Phase: Konstruktives Durcharbeiten
3. Phase: Übendes Wiederholen
4. Phase: Problemorientiertes Anwenden

(nach Wiechmann)

8.7 Fallbeispiel 2: Gruppenpuzzle

„Erfinder"
Israelisch-amerikanische Arbeitsgruppe von Sozialpsychologen (Lehreraus- und fortbildung)

Aronson, E. et al. (1978): The jigsaw classroom. Beverly Hills: Sage.

Auswirkungen des Gruppenpuzzles

– Steigerung des Selbstvertrauens der Schüler/innen
– Abnahme der Aggressionsbereitschaft in der Lerngruppe
– Höhere Wertschätzung der Schüler/innen untereinander
– Tendenziell größerer Lernerfolg (gegenüber lehrerzentriertem Unterricht)

Das Material zum Selbstlernen

– Übersicht: Was du lernen wirst, wie du das einordnen kannst (Advance Organizer)
– Arbeitsanleitung: Vorschlag, wie das Selbstlernen ablaufen kann
– Darstellung des Stoffs: klar, unmittelbar verständlich,produktiv
– Selbstkontrolle: kleine Aufgaben und Tests

Organisation

1. Unterrichtsvorbereitung
   – Stoff gliedern in 4–5 Teilgebiete
   – Stoff darf nicht hierarchisch strukturiert sein
   – Lernmaterial selbst anfertigen oder vorliegendes besorgen
   – Lernziele präzise beschreiben
   – einfache Tests zur Selbstkontrolle dieser Lernziele vorbereiten
   – Aufgaben müssen allen Erfolgserlebnisse vermitteln
   – Zeitrahmen festlegen

2. Didaktisches Training der Schüler/innen
   Vor dem ersten Gruppenpuzzle sollte die Lerngruppe mit grundlegenden Lehr-Lernstrategien vertraut gemacht werden

3. Schüler/innen wählen ‚ihr' Thema

4. Schüler/innen arbeiten individuell an ihrem Thema
   (kleine Fragen und Tests zur Selbstkontrolle)

5. Expertenrunde Teil A: Schüler/innen vertiefen und erproben das Gelernte
   (etwas umfangreichere Tests zur Selbstkontrolle)

6. Expertenrunde Teil B: Schüler/innen planen die Unterrichtsrunde
   – wirkungsvollste Methode
   – geeignete Materialien
   – Zeitplanung
   – Kontrollfragen (einheitlich, Fragen und Antworten schriftlich fixiert)
   – evtl. Abstimmung mit Lehrer/in

7. Unterrichtsrunde: Jede Expertin lehrt ihr Thema; jede lernt die Themen der anderen Experten

8. Evaluation
   – objektive und subjektive Bewertung dieses Gruppenpuzzles
   – Verbesserungsvorschläge werden schriftlich fixiert

9. Die „Coactiv-Studie“
Oder: Didaktik ohne Fachwissen bringt überhaupt nichts!

Bericht der F.A.Z. über die „Coactiv-Studie“, eine empirische mathematikdidaktische Untersuchung

(Quelle: *Frankfurter Allgemeine Zeitung*, 251 (28.10.2006), S. 12
Hervorhebungen P.B.*)*

Fachwissenschaftlich überlegen

Die Ausbildung des Lehrers und ihre Wirkung auf die Lernleistung seiner Schüler / Von Heike Schmoll

Spätestens seit Pisa ist Schule zu einer öffentlichen Angelegenheit geworden. Die internationalen Vergleichsstudien haben in der Bildungspolitik und in der Forschung einen Mentalitätswandel eingeleitet. Vor allem das unbefriedigende Abschneiden deutscher Schüler im internationalen Leistungsvergleich hat dazu geführt, den Blick auf die Lehrer zu lenken. Plötzlich wurde allen bewußt, daß es hierzulande kaum empirische Bildungsforschung und erst recht keine nach Fächern entwickelte Fachdidaktik gibt. Doch **welche Bedeutung haben Fachwissen und Fachdidaktik für die Qualität eines Lehrers, vor allem aber für den Lernerfolg des Schülers?**

Einer neuen Studie zufolge **spielt das Fachwissen des Lehrers die entscheidende Rolle, für die Gestaltung des Unterrichts, vor allem aber für den Lernerfolg des Schülers**. In der sogenannten Coactiv-Studie unser Leitung von Jürgen Baumert, Direktor des Max-Planck-Instituts für Bildungsforschung in Berlin, und anderen Erziehungswissenschaftlern wurden die Mathematiklehrer der getesteten Pisa-Klassen bei der Pisa-Studie 2003/2004 untersucht. Sie mußten zum einen Mathematikaufgaben über den Schulstoff lösen, die für Schüler zu schwierig sind, zum andern sollten die Lehrer angeben, wie sie ihren Schülern schwierige mathematische Sachverhalte am besten erklären oder auf Schülerverhalten im Unterricht reagieren würden. Da **deutsche Lehrer leider noch immer fehlerfixiert** sind, stand vor allem das Fehlerverhalten von Schülern im Mittelpunkt.

Insgesamt 351 Lehrer aus Haupt- und Realschulen, Gymnasien, darunter auch ehemalige Diplomlehrer der DDR, die eine vier- oder fünfjährige Ausbildung durchlaufen hatten, nahmen an der Stichprobenuntersuchung teil. Alle unterrichteten in der neunten und zehnten Jahrgangsstufe. Zu einer Schüler- und Lehrerbefragung kam eine Aufgabenanalyse (Hausaufgaben, Klassenarbeiten, Unterricht). Gefragt wurde aber auch nach der Motivation des Lehrers und seinen persönlichen Überzeugungen sowie nach seinen Belastungen. Dabei stellten die Forscher fest, daß es einen **Zusammenhang zwischen der von Lehrern be-**

schriebenen Erschöpfung, der beruflichen Zufriedenheit und der Beurteilung des Unterrichts durch die Schüler gibt. Lehrer, die sich über alle Maßen belastet oder beansprucht fühlen, werden von den Schülern als weniger unterstützend erlebt, sie kümmern sich weniger um deren persönliche Belange und Schwierigkeiten. **Aufschlußreich ist auch, daß sich nur für die Lehrer Vorteile in der Unterrichtsqualität nachweisen lassen, die angeben, begeistert vom Unterrichten zu sein. Die Begeisterung für das Fach allein scheint sich dagegen nicht unmittelbar auf die Güte de Unterrichts auszuwirken.**

Entscheidend ist jedoch, daß weder eine lange Berufspraxis noch umfangreiche fachdidaktische Kenntnisse fachwissenschaftliche Lücken ausgleichen können. **Wer sein Fach nicht beherrscht, dem nützt auch die Fachdidaktik nichts.** Denn Fachdidaktik dient bei einem Mathematiklehrer dazu, mathematische Inhalte für Lernende zugänglich zu machen. Die besten Ergebnisse erzielten mit Abstand die Gymnasiallehrer, die ein fachorientiertes Studium absolvierten, sowohl beim Fachwissen als auch beim fachdidaktischen Wissen. Ungeklärt ist nach der Studie allerdings, ob das vertiefte mathematische Schulwissen Teil des Universitätswissens ist oder ein Wissensbestand, der davon zu unterscheiden ist.

Aber Coactiv enthält nicht nur Hinweise für einen effektiven Mathematikunterricht, sondern auch wichtige Impulse für die Aus- und Weiterbildung von Lehrern. Lehrer mit einem größeren fachlichen Wissen legen stärkeren Wert auf einen **kognitiv aktivierenden Unterricht**, sie fordern ihre Schüler mehr, lassen **unterschiedliche Lösungswege von Aufgaben vergleichen und bewerten**. Sie **vermeiden ein enggeführtes Vorgehen**, das den Schülern nur einen möglichen Lösungsweg weist. Fachlich weniger kompetente Lehrer indessen versuchen offensichtlich, ihre mangelnde Souveränität durch um so einförmigeres Üben und Wiederholen zu kaschieren.

Gleichzeitig – und dies hat die Forscher überrascht – scheint den fachlich souveränen Lehrern die Klassenführung wesentlich besser zu gelingen als Lehrern mit geringerem Fachwissen. **Hohe Fachkompetenz wirkt sich also auch positiv auf die Disziplin einer Klasse aus.** Solche Erfahrungen könnte zwar jeder aus seinem Schulalltag berichten, durch eine Studie belegt wurden sie bisher jedoch nicht. Ausgerechnet an den Hauptschulen dominiert der Studie zufolge ein Unterrichtsmuster, das mit enormer Engführung – also der Fixierung auf einen Lösungsweg –, dafür aber mit verstärkten Bemühungen um Individualisierung des Unterrichts einhergeht. Schüler nehmen diesen Unterricht häufig nur deshalb als positiver wahr, weil er die persönliche Unterstützung durch den Lehrer klarer erkennen läßt. Kognitiv fordernd sind diese Lehrer nicht. Schon in früheren Veröffentlichungen hat Baumert dargelegt, **daß unterschiedliche Leistungen mit einer großen Leistungsspreizung in einer Klasse nicht als Scheitern des Lehrers gesehen werden dürfen, sondern Ergebnis erfolgreichen Unterrichts sind**.

Drei Grundmerkmale konnte die Studie für einen guten Mathematikunterricht mit entsprechenden Lernerfolgen bei den Schülern identifizieren: die **effektive Nut-**

zung der Unterrichtszeit, ein **kognitiv anspruchsvoller Anregungsgehalt** und die **konstruktive Unterstützung der Lernenden**. Das sind genau die Merkmale, die der verstorbene Münchener Erziehungswissenschaftler und Psychologe Franz Weinert seinerzeit schon als Eigenschaften eines guten Lehrers beschrieben hatte. Bisher jedoch konnten sie nicht durch entsprechende Wirkungen auf die Lernleistungen von Schülern belegt werden. Das geschieht in der Coactiv-Studie, die allerdings auch Fragen offenläßt. So wäre es aufschlußreich, zu fragen, ob die Erkenntnisse unter Mathematiklehrern auch auf andere Fächer zu übertragen sind.

Durch weitere Forschung ist auch zu klären, wie Lehrer sich positiv motivieren könnten und wirkungsvolle Strategien lernen, die beruflichen Belastungen des Schulalltags besser zu bewältigen. Daß solche persönlichen Aspekte zum Gelingen des Unterrichts beitragen, stellt niemand in Frage. Bedenklich ist aber, daß die neukonzipierte Lehrerbildung in den meisten Bundesländern den zentralen Befunden dieser Studie diametral zuwiderläuft: **Die Konzentration auf Fachdidaktik und Praxis auf Kosten der Fachwissenschaften während der universitären Phase wird nicht die fachliche Grundlage schaffen, die bisherige Gymnasiallehrer mitbrachten.** Diese Grundlagen können durch noch so viel Berufspraxis und Fachdidaktik nicht aufgewogen werden. Würde die Coactiv--Studie ernst genommen, müßten die meisten Lehramtsstudiengänge sofort wieder verändert werden, obwohl sie gerade mühsam modularisiert wurden. Vor allem wäre es nötig, schulformbezogene fachwissenschaftliche Studieneinheiten anzubieten, was keineswegs an allen Hochschulen vorgesehen ist.