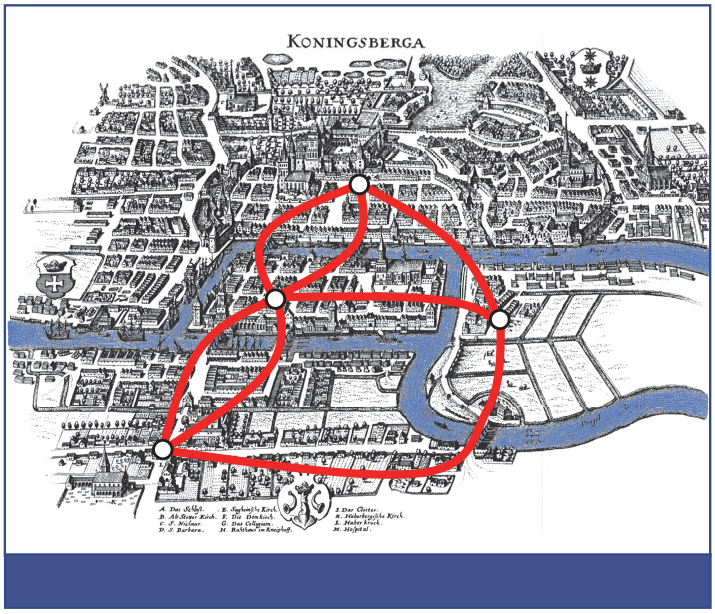
Prof. Dr. Peter Berger

Einführung in die Graphentheorie



Stand: 23.11.2021

Inhalt

0 Einstieg 3

0.1 Was ist Graphentheorie? 3
0.2 Wie geht Graphentheorie? 5

1 Grundlagen 13

1.1 Graphen 13
1.2 Bäume und Wälder 23
1.3 Isomorphie von Graphen 25
1.4 Bipartite Graphen 27
1.5 Vollständige Graphen 32
1.6 Multigraphen und gerichtete Graphen 34

2 Bäume 37

2.1 Eigenschaften von Bäumen 38
2.2 Spannbäume 39
2.3 Minimale Spannbäume 48
2.4 Alkane – Graphentheorie und Chemie 55

3 Eulersche Graphen 61

3.1 Das Königsberger Brückenproblem 61
3.2 Der Eulertour-Algorithmus 66

4 Hamiltonsche Graphen 69

4.1 Hamiltons Puzzle 69
4.2 Hinreichende Kriterien für Hamiltonkreise 73
4.3 Das Problem des Handlungsreisenden 77

5 Matchings 81

5.1 Maximale Matchings 82
5.2 Perfekte Matchings 85
5.3 Matchings in bipartiten Graphen 86
5.4 Matchings in regulären bipartiten Graphen 91
5.5 Das Briefträgerproblem 92

6 Plättbare Graphen 99

6.1 Polyedergraphen 100
6.2 Streckengraphen 105
6.3 Die Zweidrittel-Ungleichung 106
6.4 Die Plättbarkeit von Graphen 108
6.5 Die Plättbarkeit von Multigraphen 111

7 FÄRBUNGEN 113
7.1 Färbungen und chromatische Zahl 114
7.2 Das Vierfarbenproblem 115

8 DIGRAPHEN 117
8.1 Schlichte Digraphen 117
8.2 Turniere 120

9 MATERIALIEN 125
9.1 Euler 125
9.2 Hierholtzer 137

10 LÖSUNGSHINWEISE 139

0 Einstieg

0.1 Was ist Graphentheorie?

Im Vergleich zur Geometrie, mit der sie einige Gemeinsamkeiten hat, ist die Graphentheorie ein recht junges Gebiet der Mathematik. Zwar hat schon um die Mitte des 18. Jahrhunderts der große Mathematiker *Leonhard Euler* ein Problem mit Ideen gelöst, die für uns heute geradezu Musterbeispiele für graphentheoretisches Denken sind. Doch eine einzelne Abeit macht im Allgemeinen noch kein neues Fachgebiet.

In Gang kam die Graphentheorie erst hundert Jahre später, als Elektrotechnik und Kohlenwasserstoff-Chemie rasante Entwicklungen erlebten. So verschieden beide Gebiete auch sind, in beiden kamen sehr schnell die gleichen grundsätzlichen Fragen auf: „Unsere elektrischen Netzwerke, unsere Kohlenwasserstoff-Moleküle – wie können sie eigentlich aufgebaut sein? Welche figurativen Möglichkeiten (Strukturen) gibt es dafür überhaupt? Und wie viele sind das?“

Antworten konnte in beiden Wissenschaften niemand geben, was nicht verwundert. Denn es sind keine elektrotechnischen Fragen und keine chemischen, sondern mathematische. Es waren denn auch Mathematiker, die bald antworten konnten. Allerdings erst, nachdem sie Ideen zu einer Art ‚figurativer Kombinatorik’ entwickelt hatten: die Ideen der Graphentheorie.

Eine ähnlich rasante Entwicklung wie Elektrotechnik und Chemie im 19. Jahrhundert hat in den letzten rund 50 Jahren auch die Graphentheorie erlebt. Und mit durchaus vergleichbaren Auswirkungen im Alltag der Menschen. Allerdings bemerkt das kaum jemand, weil die Innovation zumeist nach Technik aussieht – obwohl sie eigentlich doch pure Mathematik ist.

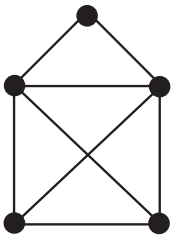
Ihr Navigationsgerät zum Beispiel ist doch reine Computertechnik, oder? Und die Software? Informatik, oder etwa nicht? Ja schon. Doch die Algorithmen, die hier programmiert wurden, hat die Graphentheorie erfunden. Ohne sie gäbe es Ihr Navi nicht. Und vieles andere ebenfalls nicht.

Zum Beispiel optimierte Fahrpläne für die Busse und Bahnen in unseren Großstädten. Fahrpläne können wertvolle Resourcen schonen. Sie können den Energieverbrauch

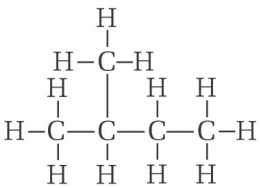
senken und nicht zuletzt die Wartezeiten für Kunden und Personal verkürzen. Ohne die Algorithmen der Graphentheorie wäre auch der schnellste Computer nicht in der Lage, solche Fahrpläne zu entwickeln. Anderes Beispiel: die Müllabfuhr. Die Graphentheorie hilft, ihre Einsatzpläne und Fahrtrouten so zu gestalten, dass mit demselben Fuhrpark erheblich mehr Service möglich ist.

Heute ist die Graphentheorie das am stärksten expandierende Teilgebiet der Mathematik. Und das nicht nur wegen dieser praktischen Anwendungsmöglichkeiten. Graphentheorie ist für Mathematikerinnen und Mathematiker auch deshalb eine spannende, ja geradezu ‚lustvoll' betriebene Disziplin, weil die Graphen Objekte mit einer immensen figurativen Komplexität sind, die eine Form der Intelligenz anspricht, über die Mathematiker im besonderen Maß verfügen: Wir nennen sie die ‚figurative Intelligenz'.

Wie die Kombinatorik gehört auch die Graphentheorie zur sogenannten *diskreten Mathematik*, die sich mit Objekten beschäftigt, die zwar aus relativ wenig Elementen bestehen, aber sehr komplexe Figuren bilden können. Und wie in der Kombinatorik sind auch die Grundideen der Graphentheorie ganz einfach, im wahren Sinn des Wortes *kinderleicht* zu verstehen.







Bei der Graphentheorie liegt das daran, dass ihre Graphen die einfachsten mathematischen Objekte sind, die man sich denken kann: Figuren aus Punkten und Linien (genannt ‚Ecken' und ‚Kanten') zwischen ihnen. Einfache Figuren, die aber eine gigantische Welt an Möglichkeiten enthalten: das *‚Haus des Nikolaus'* (rechts) ebenso wie das Straßennetz Europas oder das Molekül des *Isopentans* (links).

Gerade wegen dieser Einfachheit lassen sich so viele Probleme, innerhalb wie außerhalb der Mathematik, mit Graphen modellieren und lösen. Salopp gesagt: Graphentheorie ist die ‚Theorie für alles und jedes'. Darum ist sie in Teilen kinderleicht und dann wieder sehr schwer. Und mitunter sind es gerade die Fragen, die jedes Kind versteht, die bis heute noch auf eine befriedigende Antwort warten.

Zum Beispiel die Frage, wann genau es in einem Graphen, also einer Zeichnung aus Punkten und Linien, eine Rundreise über diese Linien gibt, die jeden Punkt genau einmal besucht. Und wie man die kürzeste dieser Rundreisen finden kann, in vernünftiger Zeit, auch wenn es mal ein paar Punkte mehr sind. Zur Zeit würden auch die schnellsten Computer dafür (schon bei gar nicht so vielen Punkten) so lange brauchen, dass sie in der Restlebenszeit unseres Sonnensystems nicht mehr fertig würden.

Sollten Sie also Graphentheorie lernen, um diese Probleme zu lösen? Nein, das wäre wohl eine ziemlich irrationale Motivation. Übrigens dürfte eine Lösungsmethode für das Problem der kürzesten Rundreise wohl immer ein schöner Traum der Graphen-

theorie bleiben. Und zugleich auch ein Albtraum. Weil damit dann auch jede Verschlüsselung unserer Kreditkarten und der geheimsten der geheimen Geheimdienstberichte im Handumdrehen geknackt werden könnte.

Nein, in die Graphentheorie einzusteigen, kann sich für Sie aus einem anderen Grund lohnen: In der Welt dieser *‚figurative Kombinatorik'*, wie wir sie genannt haben, werden Sie vermutlich auf eine *neue Art mathematisch zu denken* lernen. So beschreiben jedenfalls die meisten Neueinsteiger ihr Lernerlebnis mit dem graphentheoretischen Denken. Und dieses Denken können Sie leicht auch an interessierte (und etwas weniger interessierte) Menschen weitergeben, an alte und junge. In der Welt der Figuren aus Ecken und Kanten trainieren alle ihre *figurative Intelligenz*. Und das ist immerhin unsere *mathematische Basisintelligenz*. Was es damit auf sich hat, erfahren Sie auf

prof-dr-berger.de unter ***Forum***.

0.2 Wie geht Graphentheorie?

Bisher haben wir darüber gesprochen, was Graphentheorie *ist*. Lassen Sie uns nun gemeinsam sehen, wie Graphentheorie *‚geht'*. Wir können sofort loslegen. Für unsere ersten graphentheoretischen Entdeckungen brauchen wir nicht mehr als ein Blatt Papier und einen Stift.

Der *Zwillingssatz*

Zeichnen Sie auf Ihr Blatt ein paar Punkte (in der Graphentheorie nennen wir sie ‚Ecken'). Für den Anfang reichen vier bis sechs, jede andere Zahl über 1 ist aber auch ok. Nun verbinden Sie einige Ihrer Punkte mit jeweils einem anderen durch eine Linie (‚Kante'). Völlig egal, welche sie auswählen. Zwischen zwei Punkten aber immer höchstens eine Linie. Die Form der Linien ist auch egal, Strecken sind genau so erlaubt wie Kurven. Und nun zählen Sie an jedem Punkt, wie viele Linien von ihm ausgehen (oder ankommen, je nach Sehweise). Am besten schreiben Sie diese Linienzahlen zur Erinnerung irgendwo neben den Punkt.

Stehen neben Ihren Punkten jetzt lauter verschiedene Zahlen, oder gibt es ‚Zwillinge' (Punkte mit gleicher Linienzahl)? Unsere Spielregel soll ab jetzt lauten: *Zwillinge sind verboten!*

Versuchen Sie nun, die Spielregel zu erfüllen. Wenn Sie Zwillinge haben, können Sie neue Linien hinzufügen oder alte wegradieren, oder zusätzliche Punkte zeichnen und die wieder durch Linien mit anderen verbinden. Bis Sie keinen Zwilling mehr haben. Wir warten jetzt, bis Sie fertig sind. Nehmen Sie sich etwa 5 bis 10 Minuten …

Lassen Sie sich Zeit

… Sie schauen wieder ins Buch? Willkommen zurück. Und? Aha. Macht nichts, den anderen geht es auch nicht besser. Sie haben so etwas schon geahnt? Ihr Gefühl hat Sie nicht getäuscht. Man kann hier überhaupt nicht gewinnen. Wie man auch zeichnet, immer gibt es mindestens zwei Punkte mit derselben Linienzahl. Dagegen ist man völlig machtlos.

Hätten Sie das vorher gedacht? Man denkt doch: Punkte und Linien, da gibt es alle Möglichkeiten der Welt, Zwillinge wird man sicher vermeiden können. Jetzt glauben Sie das nicht mehr. Es geht nichts über das Selbermachen. Ihm verdanken Sie eine Verblüffung, die aber ein Erkenntnisfortschritt ist. Andererseits können Sie trotz der vergeblichen Bemühungen noch nicht recht glauben, dass es wirklich nicht möglich sein soll, Zwillinge zu vermeiden? Sehr gut. Dann sind Sie jetzt genau an dem Punkt, wo Sie unbedingt Klarheit und Gewissheit haben wollen. Also genau an dem Punkt, an dem Sie Ihren ersten graphentheoretischen Beweis führen wollen.

Wenn man zeigen will, dass etwas nicht geht, oder dass es etwas Bestimmtes nicht gibt, dann ist es meist eine gute Idee, folgendermaßen vorzugehen: Wir nehmen vorübergehend an, dass es doch geht, dass es das bewusste Objekt doch gibt. Wir glauben das nicht, aber wir ‚nehmen es nur mal an'. Nur vorübergehend und rein hypothetisch. Und dann schauen wir, was aus dieser Annahme so alles gefolgert werden kann; was also wahr sein müsste, wenn denn die Annahme wahr wäre. Ob sie es ist, wissen wir nicht. Im Gegenteil *vermuten* wir ja, dass sie es *nicht* ist. Wir wollen aber zweifelsfrei und überzeugend *beweisen*, dass sie *falsch* ist. Das kann uns folgendermaßen gelingen: Wenn wir es schaffen, unter den Folgerungen etwas zu finden, von dem wir wissen, dass es falsch sein muss, dann kann auch die Annahme nicht wahr sein, aus der wir dieses Falsche, Unwahre gefolgert haben. Wir führen dann, wie man das nennt, einen *indirekten Beweis* oder einen *Beweis durch Widerspruch*.

Also gut, fangen wir mit unserem indirekten Beweis an. Wir nehmen also an, es gäbe doch eine Zeichnung aus Punkten und Linien (also einen ‚Graphen'), der keine Zwillinge hat. In dem also alle Linienzahlen verschieden sind. Wie viele Punkte es insgesamt sind, lassen wir offen. Wir nennen die Punktezahl einfach n. – Am besten gehen wir in einzelnen, überschaubaren Denkschritten vor. Gut ist es auch, wenn wir uns möglichst einfache und klare Detailfragen stellen. Die bringen uns am ehesten Klarheit.

1. Welche Linienzahlen sind bei n Punkten überhaupt möglich? Es kommen nur natürliche Zahlen in Frage. Warum? Weil Linienzahlen Anzahlen sind, und die sind immer natürliche Zahlen.

2. Was ist die kleinste Linienzahl, die vorkommen kann? Nun, Punkte brauchen ja überhaupt nicht mit anderen verbunden zu sein; deren Linienzahl ist dann 0. Die Zahl 0 ist also eine mögliche Linienzahl. Da alle Punkte verschiedene Linienzahlen haben sollen (keine Zwillinge!), kann es hier aber höchstens *einen* Punkt mit Linienzahl 0 geben.

3. Was ist die größte Linienzahl, die vorkommen kann? Oder können sie beliebig groß sein? Vielleicht haben Sie vorhin 10 Punkte gezeichnet. Könnte da z.B. die Linienzahl 100 vorkommen? Oder 11? Oder 10? Nein, das geht alles nicht. Wenn Sie einen Ihrer Punkte wirklich mit allen anderen verbinden (und mehr ist nicht möglich, weil Linien immer von einem Punkt zu einem *anderen* führen müssen), dann haben Sie ihm die größtmögliche Linienzahl verschafft. Bei 10 Punkten ist das also $10-1=9$. Bei n Punkten ist die größtmögliche Linienzahl entsprechend $n-1$.

4. Damit wissen wir: Die n verschiedenen Linienzahlen liegen alle im Bereich von 0 bis $n-1$. Aber dieser Bereich enthält ja überhaupt nur n Zahlen. Also sind die Linienzahlen nicht ‚irgendeine Auswahl' aus diesem Bereich, sondern es müssen *alle* sein.

5. Wenn unsere hypothetische Zeichnung mit n Punkten wirklich keine Zwillinge hat, dann müssen ihre Linienzahlen die n Zahlen 0 bis $n-1$ sein. An einem Punkt der Zeichnung steht also die Linienzahl 0, an einem anderen die Zahl $n-1$.

Haben Sie ein Bild vor Augen, was diese Zahlen ‚optisch' bedeuten? Es sind ja Linienzahlen. Wie sieht der Punkt mit der 0 aus? Wie viele Linien kommen bei ihm an? Und der Punkt mit der Zahl $n-1$? Fällt Ihnen etwas auf? (Wenn Sie mit dem ‚Bild vor dem inneren Auge' nicht zufrieden sind, dann zeichnen Sie ein Bild auf Papier; zum Beispiel mit $n=4$ Punkten, einer davon mit 3 Linien, einer ohne.) Wie ist das allgemein bei n Punkten, wenn einer davon die Linienzahl 0 und ein anderer die Linienzahl $n-1$ hat? Machen Sie sich in Ruhe ein Bild. Zeichnen Sie am besten noch weitere Beispiele …

Lassen Sie sich Zeit

… Ok, machen wir weiter. Wir überlegen: Ein Punkt mit Linienzahl $n-1$ muss mit *jedem anderen* Punkt verbunden sein (da unsere Zeichnung insgesamt n Punkte enthält); ein Punkt mit Linienzahl 0 andererseits kann mit *keinem* Punkt verbunden sein. In unserer hypothetischen Zeichnung ohne Zwillinge müsste es demzufolge sowohl einen Punkt A geben, der mit *keinem* Punkt verbunden ist, als auch einen Punkt B, der mit *allen anderen* Punkten verbunden ist. Dies ist aber ein Widerspruch, denn B müsste dann auch mit A verbunden sein, so dass A also doch mit zumindest einem Punkt verbunden wäre. Logischer Schluss: Eine solche Zeichnung ohne Zwillinge kann es überhaupt nicht geben. Jede Zeichnung muss also Zwillinge enthalten. Fertig.

Damit haben wir einen Satz der Graphentheorie bewiesen, der Ihnen in Kapitel 1 als *‚Zwillingssatz'* (S. 20) wiederbegegnen wird. In der Sprache der Graphentheorie lautet er: *In jedem Graphen (mit mindestens 2 Ecken) gibt es mindestens zwei Ecken vom selben Grad.*

Was hier mit ‚Grad' gemeint ist, ist klar: Wir haben dazu bisher ‚Linienzahl' gesagt. Wir wollen von nun an die Fachsprache der Graphentheorie bevorzugen und statt ‚Linienzahl' immer ‚Grad' sagen.

Das *Handschlaglemma*

Zeichnen Sie eine Reihe von Graphen (Zeichnungen aus Punkten und Linien, wie eben). Schreiben Sie wieder alle Grade (Linienzahlen) an die Ecken (Punkte) und bilden Sie in jedem Graphen deren Gesamtsumme. Unsere Spielregel soll diesmal lauten: *Gewonnen hat, wer einen Graphen mit ungerader Grad-Gesamtsumme gefunden hat.* Probieren Sie wieder 10 Minuten …

Lassen Sie sich Zeit

… Da sind Sie ja wieder. Aber 10 Minuten waren das wohl nicht. Nun gut, Sie werden diesmal schnell geahnt haben, dass auch das nicht geht. Sie haben recht, Ihre Ahnung hat Sie wieder einmal nicht getäuscht. Es geht wirklich nicht. Aber warum ist das so?

Stellen Sie sich vor, Sie sind auf einer Party mit vielen Gästen. Wie das meist so ist: Nicht alle kennen einander. Alle begrüßen ihre Bekannten mit Handschlag, aber auch nur diese.

Stellen Sie sich weiter vor, Sie hätten alle Gäste gefragt, wie viele Hände sie geschüttelt haben. Sehen Sie, was diese Zahlen mit den Graden (Linienzahlen) von eben zu tun haben? Sehr gut. Und nun bilden Sie die Summe all dieser Zahlen. Diese Summe muss eine gerade Zahl sein. Es ist dieselbe Situation wie vorhin. Ungerade Summen sind unmöglich. Aber warum? Soweit waren wir ja vorhin auch schon.

Mit dem Gedankenspiel haben wir etwas hinzu gewonnen: ‚Party' ist eine konkretisierende Modellierung der abstrakten Struktur ‚Graph'. Im Modell ‚Party' können wir mit dem Begriff ‚Handschlag' anschaulich sicher operieren. Er entspricht zwar einem einfachen Pendant in der Struktur ‚Graph'; wir haben aber noch nicht gelernt, damit sicher genug zu denken (aber wir lernen es gerade in diesem Augeblick): dieses Pendant zu ‚Handschlag' ist im Graphen einfach der Begriff ‚Kante'. In einigen Minuten werden Sie das Modell ‚Party' gar nicht mehr brauchen.

Wir beginnen wieder mit Fragen:

1. Wenn wir für jeden einzelnen Gast die Zahl der Hände kennen, die er geschüttelt hat, dann können wir daraus für alle Gäste zusammen die Gesamtsumme S bilden (sie entspricht der Summe aller Linienzahlen oder ‚Eckengrade'). Frage: Können wir daraus die Gesamtzahl H aller Handschläge bestimmen, die auf der Party überhaupt ausgeführt worden sind? Das ist uns noch etwas unklar, daher fragen wir weiter:

2. Wenn zwei Gäste X und Y einander die Hände schütteln, wie trägt das zu der Zahl H bei? Und wie zu der Zahl S? Hierzu können wir sofort etwas sagen. Denken Sie erst einmal wieder in Ruhe selbst nach ...

Lassen Sie sich Zeit

… also weiter. Wenn X und Y die Hände schütteln, dann erhöht sich die Zahl der ge-

schüttelten Hände bei jedem der beiden um 1. Insgesamt erhöht dieser eine Handschlag die Zahl *S* also um 2, während die Zahl *H* nur um 1 erhöht wird, da hier nur der eine Handschlag (gewissermaßen als Ganzes) zu Buche schlägt.

An jedem Handschlag sind zwei Gäste beteiligt. Jeder einzelne Handschlag wird also sowohl bei der einen beteiligten Person gezählt wie bei der anderen. *S* erhöht sich daher zweimal um 1, *H* dagegen nur einmal.

Da sich die Summe *S* demnach immer in Zweierschritten erhöht (und bei 0 beginnt), muss sie stets eine gerade Zahl sein. Da *H* sich stets nur in Einerschritten erhöht (und ebenfalls bei 0 beginnt), muss *S* stets das Doppelte von *H* sein. Jedem Einzelschritt bei *H* entspricht ein Doppelschritt bei *S*.

Wenn Sie unser Modell ‚Party' auf die Struktur ‚Graph' zurück übetragen, dann erkennen Sie nun leicht: Die Ecken entsprechen den Gästen, die Kanten den Handschlägen. Schreibt man an jede Ecke ihren Grad (Anzahl ihrer Kanten/Handschläge) und addiert alle diese Gradzahlen (diese Summe ist *S*), so erhält man immer die doppelte Kantenzahl *H*.

Damit haben wir ein ebenso elementares wie grundlegendes graphentheoretisches *‚Lemma'* (‚Sätzchen') entdeckt und bewiesen, das man passend zu unserer Modellierung das *‚Handschlaglemma'* nennt (siehe S. 19): *In jedem Graphen ist die Summe aller Eckengrade gleich der doppelten Kantenzahl.*

Es ist also völlig unmöglich, einen Graphen zu zeichnen, bei dem Summe aller Eckengrade eine *ungerade* Zahl ist. Sie muss ja stets das Doppelte einer natürlichen Zahl (Kantenzahl) sein, also eine gerade Zahl.

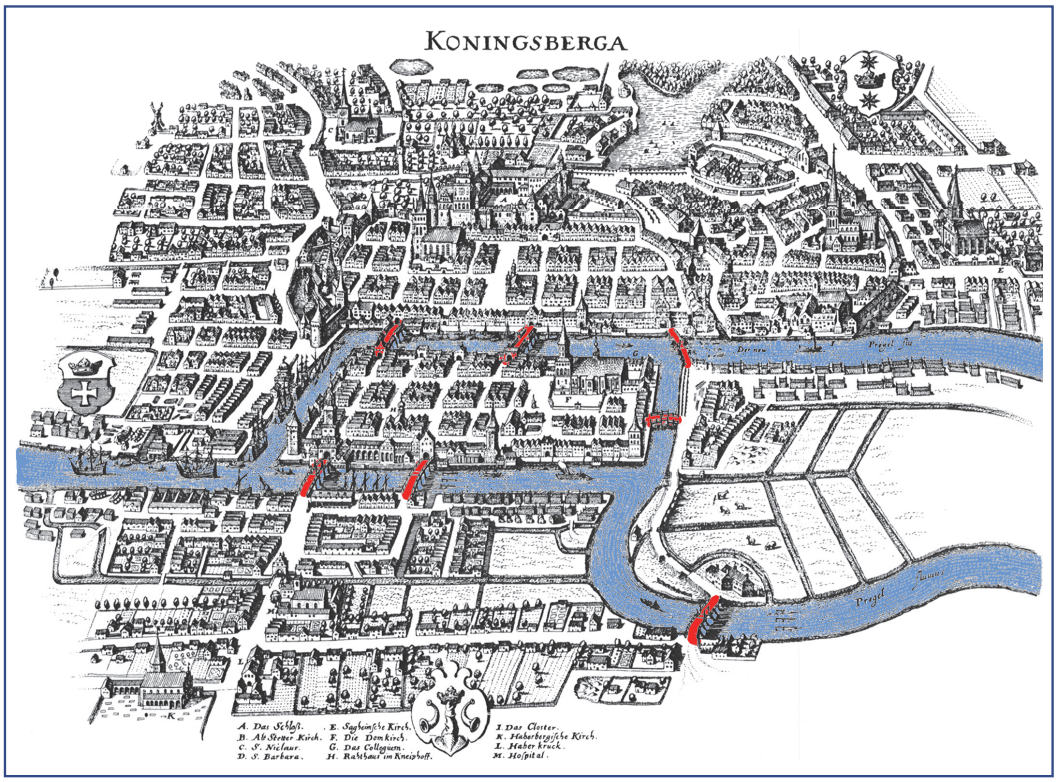
Das *Königsberger Brückenproblem*

Wie erwähnt, stammt die erste graphentheoretische Arbeit (oder doch eine der ersten) von Euler: *Leonhard Euler (1707-1783)*, geboren in der Schweiz, ein genialer Mathematiker, Physiker und Astronom. Im Jahr 1736 veröffentlichte er seine Lösung des heute berühmten *‚Königsberger Brückenproblems'*. Er beantwortete damit eine Frage, die sich viele Bürger von Königsberg – damals seit einem Jahrzehnt preußische ‚Königliche Haupt- und Residenzstadt' – bei ihren Sonntagsspaziergängen offenbar immer wieder stellten: *Gibt es einen Rundweg, der genau einmal über jede der sieben Brücken des Flusses Pregel führt, der durch unsere schöne Stadt fließt?* (s. Abb.)

Finden Sie einen solchen Rundweg? Oder gibt es gar keinen? Probieren Sie herum, machen Sie Skizzen. Nehmen Sie sich wieder 10 Minuten …

Lassen Sie sich Zeit

… Genug probiert? Rundweg gefunden? Nein, nicht in 10 Minuten. Vielleicht gibt es ja auch keinen. Und wenn es ihn gibt, schafft man es vermutlich nicht in so kurzer Zeit, ihn zu finden. Das Spiel ist also noch offen.



Königsberg im 18. Jahrhundert:
Gesucht: Ein Rundweg, der alle 7 Brücken überquert, aber keine mehrmals

Sind Sie bei Ihren ‚Wanderungen' durch Königsberg durch die Straßen gelaufen, haben Sie Gebäude umrundet? Nein, haben Sie nicht? Weil es nur um die Brücken geht? So ist es. Die 10 Minuten Probieren, Zeichnen und Denken haben sich gelohnt. Immerhin sind Sie zu derselben Erkenntnis gelangt wie der große Leonhard Euler. Er schrieb damals in seiner Lösung: „Meine ganze Methode besteht nun [schlicht] darin, dass ich das Überqueren der Brücken auf geschickte Weise beschreibe." (In Kapitel 9 finden Sie seine Lösung im lateinischen Original und in deutscher Übersetzung.) Euler achtete also wie Sie nur auf die Brücken.

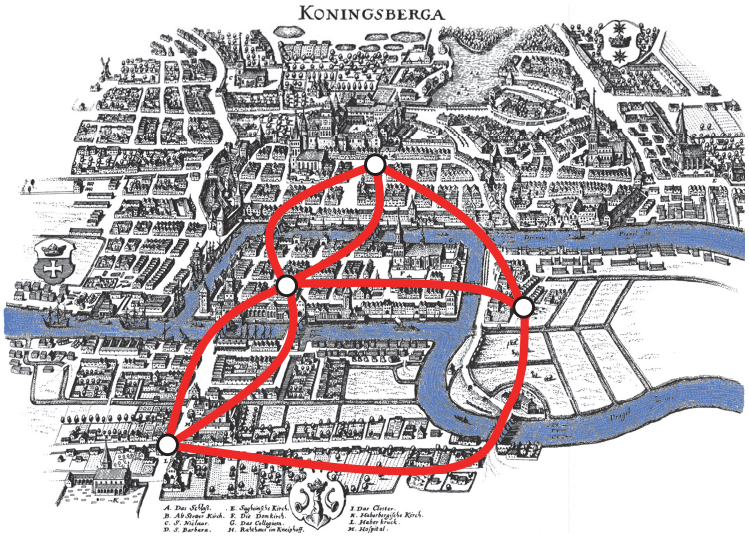
Idee: Nicht denken wie SpaziergängerInnen, sondern wie GraphenteoretikerInnen! Das heißt, in Punkten und Linien. Nicht in Straßen, Brücken, Treppen, Häusern, Hunden, Katzen …

Wie die Stadt im Einzelnen aussieht, ist für unsere Frage gar nicht wichtig. Sehen Sie die Insel in der Mitte des Bildes? Fünf Brücken führen von ihr weg. Die Insel und die Brücken sind wichtig, die Straßen und Häuser aber nicht. Und wie lang die Brücken sind, wo genau sie auf der Insel stehen und ob sie gerade oder krumm sind – das alles brauchen wir bei unserer Lösung nicht zu beachten. Denn davon hängt die Möglichkeit oder Unmöglichkeit eines Rundwegs nicht ab. Wenn es einen Rundweg gibt, dann bestimmt nicht deshalb, weil die eine Brücke 50 Meter lang ist und nicht 66 Meter. Das alles ist nicht nur unwichtig, es lenkt uns auch ab.

Am besten, wir lassen das alles weg und zeichnen neu, aber nur das Wesentliche. Die Insel ist ein Ort mit fünf Brücken. Wir zeichnen also einen Punkt, von dem fünf Linien losgehen, also eine Ecke mit fünf Kanten. Wir werden die gesamte Struktur der Königsberger Brücken in einen Graphen übersetzen.

Es gibt nicht nur die Insel. Zwei ihrer Brücken führen in den Stadtteil im Norden, zwei weitere in den südlichen Stadtteil, eine in den östlichen. Diese drei weiteren Stadtteile zeichnen wir als drei neue Ecken in den enstehenden Graphen. Die bisher ins Leere laufenden Kanten (Brücken) verbinden wir ensprechend dem Stadtplan mit der entsprechenden neuen Ecke. Die beiden restlichen Brücken werden zu neuen Kanten zwischen Nord- und Ost- bzw. Süd- und Ost-Ecke.

Schauen Sie auf Ihren Graphen. Kommt Ihnen das Bild bekannt vor? Richtig, es ist der Graph von unserem Titelbild. Was Sie gezeichnet haben, und was Sie in der Abb. nebenan in rot sehen, ist der sogenannte ‚Königsberger Graph'. Als Stadtplan kann man ihn nicht gebrauchen. Zum Finden von Rundwegen ist er aber ideal.



Er zeigt genau das, was wir dazu brauchen: die Struktur der Brückenverbindungen zwischen den vier Stadtteilen. Nicht mehr und nicht weniger. Vier Stadtteile, sieben Brücken – vier Ecken, sieben Kanten. Jeden Rundweg ‚genau einmal über jede Brücke', den es in Königsberg gibt (falls es einen gibt), können wir direkt übersetzen in einen Rundweg ‚genau einmal über jede Kante' in unserem Graphen.

Nebenbei: Ist Ihnen aufgefallen, dass dieser Graph einen grundsätzlichen Unterschied zu unseren bisherigen Graphen aufweist? Beim Zwillingssatz haben wir gefordert: ‚Aber zwischen zwei Punkten immer höchstens eine Linie.' Beim Königsberger Graph gibt es zwischen zwei Punkepaaren jeweils zwei ‚Doppelkanten'. Bisher hatten wir stets sogenannte ‚schlichte Graphen' (Mehrfachkanten verboten) betrachtet. Der Königsberger ist dagegen ein ‚Multigraph' (Mehrfachkanten erlaubt, sogar Schlingen, aber davon später). Welche Art von Graph man verwendet, hängt ganz davon ab, was man damit modellieren will. Da es in Könnigsberg nun einmal ‚Doppelbrücken' gibt, also Brücken zwischen denselben zwei Stadtteilen, müssen wir zur Modellierung einen Multigraphen wählen.

Natürlich löst der Graph unser Problem noch nicht. Aber dieses Modell macht unser Denken nun leichter. Das müssen Modellierungen auch, das ist schließlich ihr Sinn.

Versuchen Sie nun, im Königsberger Graphen einen Rundweg zu finden, der jede Kante genau einmal benutzt. Nehmen Sie sich wieder 10 Minuten …

Lassen Sie sich Zeit

… Willkommen zurück. Vielleicht sammeln wir jetzt einmal, was uns so aufgefallen ist. Die Überlegungen, die wir beim Probieren angestellt haben, sind individuell natürlich ganz unterschiedlich. Wahrscheinlich gibt es aber Gemeinsamkeiten, Übereinstimmungen. Vielleicht können wir sie in vier Erkenntnissen bündeln, die wir so oder ähnlich alle gewonnen haben, die wir jedenfalls alle nachvollziehen können:

1. Auf einem Rundweg kann man an jedem Punkt starten (und später wieder ankommen), sonst wäre es kein Rundweg.

2. Wenn man an einem Punkt losgeht, benutzt man schon die erste Brücke, die man danach nie mehr verwenden darf. Wenn man am Ende dorthin zurückkehrt, hat man eine weitere Brücke ‚verbraucht'. Der Punkt muss also mindestens zwei Brücken haben (unsere Kurzsprechweise für: mindestens zwei Brücken müssen mit dem Punkt verbunden sein/davon losgehen/dort ankommen; oder auch: seine Linienzahl ist ≥ 2). Sollte der Weg auch zwischendurch noch ein- oder mehrmals über diesen Startpunkt führen, dann wird jedes Mal eine hinführende Brücke und eine wegführende ‚verbraucht'. Damit erhöht sich die Brückenzahl, die der Startpunkt haben muss, mit jedem Zwischendurch-Besuch um 2 (vor dem Start ist sie 0). In jedem Fall muss der Startpunkt also eine *gerade Zahl von Brücken* haben.

3. Was ist mit den Punkten, über die man nur hinwegläuft, an denen man also nicht startet? Auch für sie gilt, was wir gerade schon für einen Zwischendurch-Besuch des Startpunkts überlegt haben: Über eine Brücke gehen wir auf den Punkt, über eine andere gehen wir wieder von ihm weg. Bei jeder Überquerung ‚verbrauchen' wir zwei weitere Brücken. Es gilt also für diese Punkte das Gleiche wie für den Startpunkt: Auch jeder Nicht-Startpunkt muss immer *eine gerade Zahl von Brücken* haben.

4. Fazit: Wenn es auch nur einen einzigen Punkt mit einer *ungeraden* Zahl von Brücken gibt, dann kann es keinen Rundweg geben, der genau einmal über jede Brücke führt. Beim Königsberger Graph haben aber sogar *alle vier* Punkte (Stadtteile) eine ungerade Brückenzahl. Es kann also keinen Rundweg geben, der jede Brücke genau einmal benutzt. Ob Eulers Lösung die Königsberger enttäuscht hat, ist nicht bekannt.

Falls Sie mögen – hier noch ein paar Fragen zum Weiterdenken:

Welche Bedeutung hat die Tatsache, dass hier *alle* Punkte eine ungerade Brückenzahl haben? Einer hätte bereits gereicht, um einen Rundweg unmöglich zu machen. Hier kommt eine neue Frage ins Spiel: Könnte man evtl. einen Rundweg dadurch ermöglichen, dass man zusätzliche Brücken baut? Wie viele Brücken müssten das sein? Geht das im Fall Königsberg überhaupt, egal wie viele Brücken man dazu neu bauen müsste? Wie wäre das, wenn im Königsberger Graph nur zwei Punkte ungerade Brückenzahl hätten. Wie wäre das bei nur einem solchen Punkt?

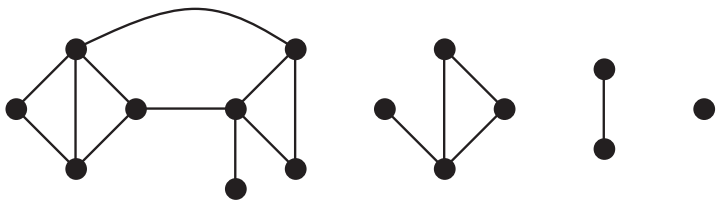
1 Grundlagen

1.1 Graphen

Graphen sind einfache Strukturen, die aus nur zwei Sorten von Bausteinen zusammengesetzt sind: aus *Ecken* und *Kanten*. Wenn wir Graphen zeichnen, stellen wir die Ecken durch fette Punkte und Kanten durch verbindende Linien dar.

In *schlichten* Graphen verbindet eine Kante immer genau zwei Ecken, und zwischen zwei Ecken gibt es höchstens eine Kante. In *Multigraphen* kann es zwischen zwei Ecken auch mehrere Kanten geben (sogenannte Mehrfachkanten), und auch Kanten, die von einer Ecke zu dieser zurück laufen (sogenannte Schlingen). Wir werden uns hier zumeist mit schlichten Graphen beschäftigen.

Um besser über Graphen sprechen zu können, werden wir eine Reihe von Spezialbezeichnungen einführen. Der folgende (schlichte) Graph hat zum Beispiel 15 Ecken, 16 Kanten, 4 Komponenten, 4 Endecken und 1 isolierte Ecke. Seine Gradfolge ist (0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4).



Zu den *Stern-Übungen in diesem Buch

Bitte bearbeiten Sie die mit ***Stern** markierten Übungen stets **sofort, bevor Sie auch nur eine Zeile weiterlesen**. Bei jedem *Stern können Sie nämlich eine kleine Entdeckung machen, die Ihr Denken für die zentrale Idee des unmittelbar folgenden Textabschnitts öffnen soll (‚**mind opener**'). Und bitte: Werfen Sie dabei **keinen Blick auf die nächsten Zeilen**. Wenn Sie schon ahnen, um was es geht, können Sie nichts mehr entdecken.

ÜBUNG 1 *

Was könnte mit ‚Gradfolge' gemeint sein, und was ist ein ‚Grad'?

Zeichnen Sie einen Graphen mit der Gradfolge $(2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$. Gibt es mehr als einen?

Was ist der höchste Grad, der in einem Graphen mit 10 Ecken möglich ist? Wie viele Kanten hat ein Graph mit 5 Ecken höchstens?

Beschreiben Sie anschaulich, was eine Komponente ist. Wie würden Sie den Begriff ‚Komponente' definieren? Welche Begriffe sollten Sie zuvor definieren?

Definition 1 Graphen, Ecken, Kanten

(1) Ein *Graph* ist ein Paar $G=(E,K)$ aus einer *Eckenmenge* E und einer *Kantenmenge* $K \subseteq \binom{E}{2}$. Jede Kante ist also eine 2-elementige Teilmenge $k=\{a,b\}$ der Eckenmenge E.

(2) Zur Vereinfachung der Schreibweise schreiben wir statt $k=\{a,b\}$ kurz $k=ab$ (oder gleichwertig $k=ba$).

(3) Wir sagen, die Kante $k=ab$ *verbindet* die Ecken a und b; wir nennen a und b *die Ecken der Kante* k und sagen, dass k mit a und b *inzident* ist. Zwei verschiedene Kanten k_1 und k_2 heißen *inzident*, wenn sie eine Ecke gemeinsam haben. Zwei Ecken a, b heißen *adjazent (benachbart)*, wenn es eine Kante $k=ab$ gibt.

(4) Unter dem *Eckengrad* (kurz *Grad*) einer Ecke a verstehen wir die Zahl $d(a)$ der mit a inzidenten Kanten. Eine Ecke mit Eckengrad 0 heißt *isolierte* Ecke. Eine Ecke mit dem Eckengrad 1 heißt *Endecke*. In der *Eckengradfolge* geben wir die Grade aller Ecken eines Graphen aufsteigend geordnet an.

(5) Ein Graph, in dem alle Ecken denselben Grad haben, heißt *regulär*. (Haben alle Ecken den Grad k, so heißt er auch *k-regulär*.)

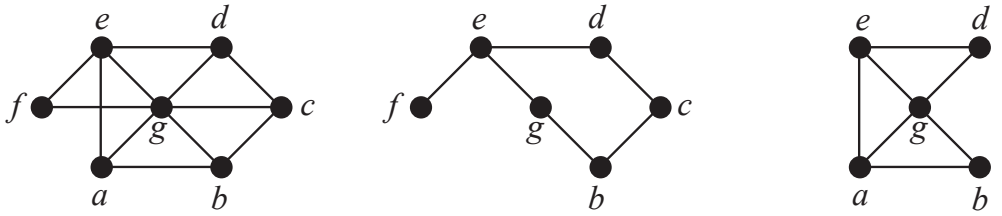
(6) Ein Graph heißt *endlich* bzw. *unendlich*, je nachdem, ob seine Eckenmenge endlich oder unendlich ist. Wir vereinbaren, dass wir mit ‚Graph' stets einen endlichen Graphen meinen, wenn wir nicht ausdrücklich etwas anderes formulieren. – Den Graphen $G=(\varnothing,\varnothing)$ ohne Ecken und Kanten nennen wir den *leeren Graphen*.

ÜBUNG 2 *

Betrachten Sie die folgende Abbildung (nächste Seite). G_1 und G_2 sind *Untergraphen* von G. Wie würden Sie diesen Begriff definieren?

G_2 ist ein sogenannter *induzierter* Untergraph von G, G_1 dagegen

nicht. Was könnte mit ‚induziert' gemeint sein? Was hat G_2 (im Verhältnis zum Ausgangsgraphen G), was G_1 nicht hat?



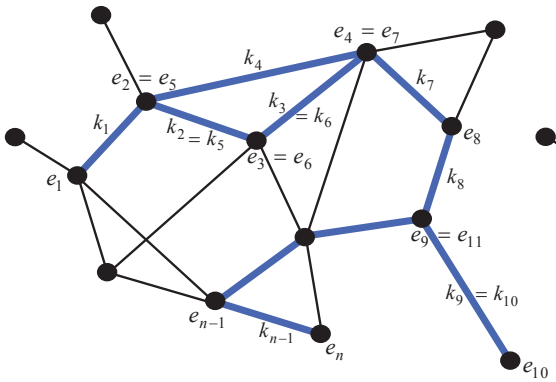
Definition 2 Untergraph, induzierter Untergraph

(1) Ein Graph $G'=(E',K')$ heißt *Untergraph* des Graphen $G=(E,K)$, wenn $E'\subseteq E$ und $K'\subseteq K$ (d.h. G' enthält nur Ecken und Kanten, die auch Ecken und Kanten von G sind).

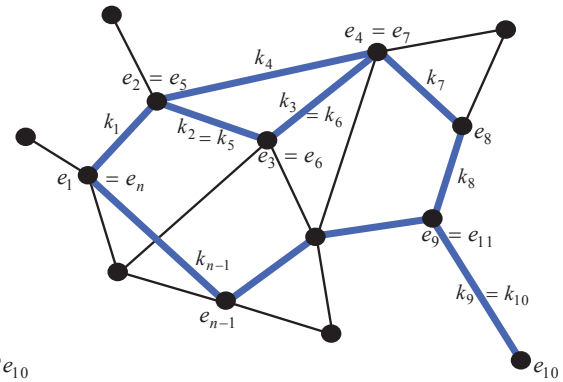
(2) Ein Untergraph $G'=(E',K')$ heißt *induzierter Untergraph*, wenn $K'=K\cap\left(\frac{E'}{2}\right)$ (d.h. G' enthält sämtliche Kanten zwischen Ecken aus E', die auch in G vorkommen). Statt *induzierter Untergraph* sagt man auch *Teilgraph*.

Wenn wir uns vorstellen, dass wir in einem Graphen von Ecke zu Ecke wandern, dann wollen wir vereinbaren, dass wir nicht springen. Sondern wir gehen ganz bequem über die Kanten, die diese Ecken miteinander verbinden. In der Sprache der Graphentheorie formuliert: Wir wandern über *sukzessive inzidente* Kanten (Schritt für Schritt aneinanderhänge Kanten).

Gehen wir dabei irgendeine beliebige Zickzacklinie, wobei wir Ecken und Kanten auch mehrmals passieren können, dann nennen wir die Wanderung ganz allgemein eine *Kantenfolge*. Eine Kantenfolge schreiben wir formal auf, indem wir die Folge $e_1k_1e_2k_2e_3\ldots e_{n-1}k_{n-1}e_n$ der dabei passierten Ecken und Kanten notieren. Wichtig ist dabei nur, dass jede der Kanten k_i die beiden Ecken e_i und e_{i+1} verbindet (formal: $k_i=e_ie_{i+1}$). Führt uns der Weg zu unserer Startecke zurück, so nennen wir die Kantenfolge *geschlossen*. Die Zielecke ist dann also gleich der Startecke ($e_1=e_n$). Sind dagegen Start- und Zielecke verschieden, so sprechen wir von einer *offenen* Kantenfolge ($e_1\neq e_n$). Die Anzahl der durchlaufenen Kanten nennen wir die *Länge* der Kantenfolge. Die Kantenfolge $e_1k_1e_2k_2e_3\ldots e_{n-1}k_{n-1}e_n$ hat n Ecken (die nicht verschieden sein müssen) und $n-1$ Kanten (die ebenfalls nicht verschieden sein müssen); sie hat also die Länge $n-1$. Die folgenden Kantenfolgen haben beide die Länge 13 (13 Kanten und 14 Ecken).

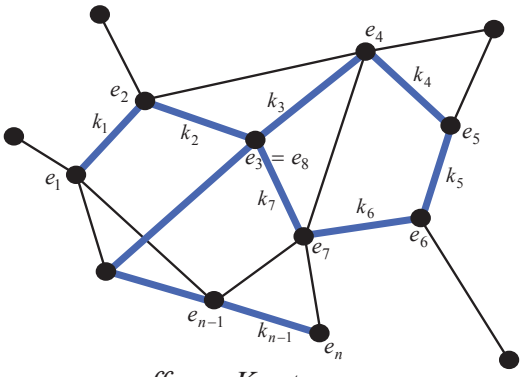


offene Kantenfolge

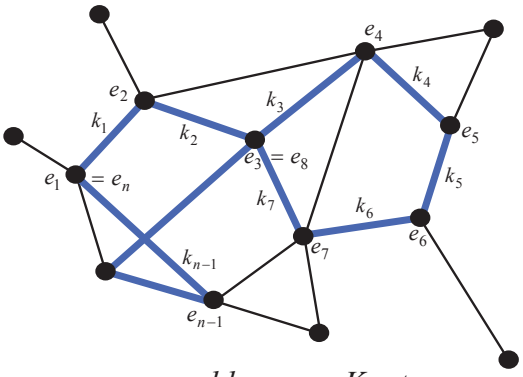


geschlossene Kantenfolge

Eine Kantenfolge, in der *alle Kanten verschieden* sind, heißt Kanten*zug*. Hier können zwar Ecken immer noch mehrmals passiert werden, Kanten dagegen nicht. Die Begriffe *Länge*, *Offenheit* bzw. *Geschlossenheit* übertragen sich natürlich automatisch von Kantenfolgen auf Kantenzüge, da Kantenzüge spezielle Kantenfolgen sind.

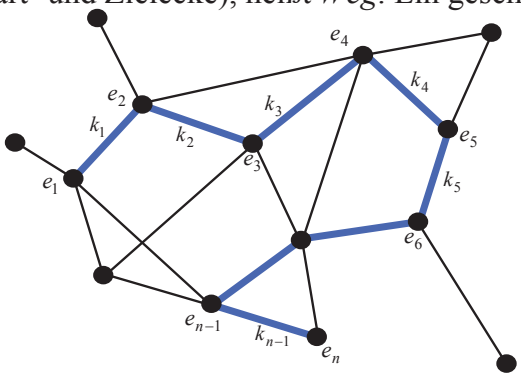


offener Kantenzug

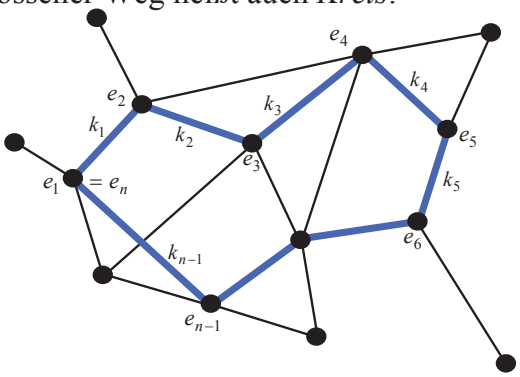


geschlossener Kantenzug

Eine Kantenfolge, in der *alle Kanten und alle Ecken verschieden* sind (außer evtl. Start- und Zielecke), heißt *Weg*. Ein geschlossener Weg heißt auch *Kreis*.



offener Weg



geschlossener Weg (Kreis)

Wenn wir bei Kantenfolgen nach Kanten- und Eckenzahl fragen, müssen wir unterschieden, ob wir die Zahl *verschiedener* Ecken bzw. Kanten meinen (das sind Mächtigkeiten von Mengen, kein Element einer Menge wird mehrfach gezählt) oder die Zahl der bei der Wanderung insgesamt *passierten* Ecken bzw. Kanten (hier werden

Wiederholungen mitgezählt). Bei Kanten*zügen* müssen wir so vorsichtig nur noch bei den Ecken sein, denn die Kanten sind alle verschieden. Bei Wegen und Kreisen brauchen wir diese Vorsicht nicht mehr, denn hier sind alle Kanten und – bis evtl. auf Start- und Zielecke – auch alle Ecken verschieden. Da bei allen Kantenfolgen – also auch bei Kantenzügen, Wegen und Kreisen – als Länge die Zahl der passierten Kanten gilt, können wir folgenden einfachen Zusammenhang festhalten: Bei einem Kreis sind Start- und Zielecke identisch, mithin hat die Eckenfolge $e_1k_1e_2k_2e_3\ldots e_{n-1}k_{n-1}e_n$ nur $n-1$ verschiedene Ecken, also ebenso viele wie Kanten. In einem Kreis gilt daher: $\textit{Länge} = \textit{Kantenzahl} = \textit{Eckenzahl}$. Ein offener Weg hat dagegen eine Ecke mehr als Kanten. Daher gilt für offenen Wege: $\textit{Länge} = \textit{Kantenzahl} = \textit{Eckenzahl} - 1$.

Definition 3 Kantenfolge, Kantenzug, Weg, Kreis

(1) Eine *Kantenfolge* in einem Graphen $G=(E,K)$ ist eine Folge $e_1k_1e_2k_2e_3\ldots e_{n-1}k_{n-1}e_n$ von Ecken e_i und Kanten k_i mit $k_i = e_ie_{i+1}$ (für $i=1,\ldots,n-1$). Sind Start- und Zielecke gleich ($e_1 = e_n$), so heißt die Kantenfolge *geschlossen*. Sind Start- und Zielecke verschieden ($e_1 \neq e_n$), so heißt die Kantenfolge *offen*. Die Anzahl ihrer Kanten heißt *Länge* der Kantenfolge.

(2) Ein *Kantenzug* in einem Graphen $G=(E,K)$ ist eine Kantenfolge, in der alle Kanten paarweise verschieden sind.

(3) Ein *Weg* in einem Graphen $G=(E,K)$ ist eine Kantenfolge, in der alle Kanten und alle Ecken paarweise verschieden sind.

(4) Ein *Kreis* in einem Graphen $G=(E,K)$ ist ein geschlossener Weg.

Als Grenzfall bezeichnen wir eine Folge e_1 mit nur einer Ecke als Kantenfolge (Kantenzug, Weg, Kreis) der Länge 0. – Wenn es in einem Graphen die Kantenfolge (den Kantenzug, den Weg) $e_1k_1e_2\ldots e_{n-1}k_{n-1}e_n$ von e_1 nach e_n gibt, dann ist natürlich die umgekehrte Folge $e_nk_{n-1}e_{n-1}\ldots e_2k_1e_1$ immer Kantenfolge (Kantenzug, Weg) von e_n nach e_1. Daher ist die Aussage *‚Es gibt einen Weg von e_1 nach e_n‘* äquivalent zur Aussage *‚Es gibt einen Weg von e_n nach e_1‘*. Wenn es uns nicht auf die Orientierung (Durchlaufrichtung) eines Weges ankommt, fassen wir beide Folgen als denselben Weg auf und sagen stattdessen *‚Es gibt einen Weg zwischen e_1 und e_n‘*. – Zur Vereinfachung der Schreibweise von Kantenfolgen (Kantenzügen, Wegen, Kreisen) lassen wir mitunter die Kanten fort und schreiben statt $e_1k_1e_2\ldots e_{n-1}k_{n-1}e_n$ kurz $e_1e_2\ldots e_n$.

Können Sie einen Graphen ‚an einer Ecke hochheben’? Das funktioniert nur bei bestimmten Graphen. Denn Sie ziehen nur die Ecken mit nach oben, die mit der gegriffenen Ecke zusammenhängen. Sie heben also immer nur eine Komponente des Graphen hoch (eben die, in der die gegriffene Ecke liegt). Gibt es weitere Komponenten, so bleiben sie liegen. – Diese einfache Erkenntnis können wir nutzen, um zu definieren, was eine Komponente ist: Eine Komponente besteht einfach aus allen

Ecken, die mit einer bestimmten Ecke zusammenhängen. Und wann hängen zwei Ecken zusammen? Klar: Wenn es einen Weg zwischen ihnen gibt.

Definition 4 zusammenhängender Graph, Komponente

(1) Wir nennen zwei Ecken eines Graphen *zusammenhängend*, wenn es zwischen ihnen einen Weg gibt.

(2) Wir nennen einen Graphen *zusammenhängend*, wenn je zwei seiner Ecken stets zusammenhängend sind.

(3) Eine *Komponente* eines Graphen G ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph G' von G (d.h. G' ist nicht Untergraph eines größeren zusammenhängenden Untergraphen G'' von G).

Die Relation ‚zusammenhängend' ist in jedem Graphen symmetrisch, reflexiv und transitiv – kurz, sie ist eine Äquivalenzrelation. Jede Äquivalenzrelation zerlegt ihre Grundmenge bekanntlich in sogenannte Äquivalenzklassen. Was sind die Äquivalenzklassen der Zusammenhangsrelation?

Richtig: Die Äquivalenzklassen der Zusammenhangsrelation sind gerade die Komponenten des Graphen (genauer: die Eckenmengen der Komponenten).

Satz 1

Die Relation ‚zusammenhängend' auf der Eckenmenge eines Graphen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis

Jede Ecke hängt mit sich selbst durch einen Weg (der Länge 0) zusammen. Die Relation ist also *reflexiv*.

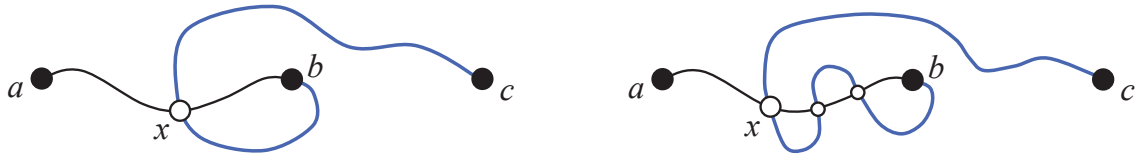
Wenn es einen Weg W von a nach b gibt, dann gibt es auch einen Weg W' von b nach a. Die Relation ist also *symmetrisch*.

Für den Nachweis der Transitivität liegt eine gute Idee nahe: Wenn es einen Weg von a nach b gibt und einen Weg von b nach c, dann können wir doch die beiden Wege einfach zu einem Weg von a über b nach c verketten. Damit wäre die Transitivität doch gezeigt, oder nicht?



Prinzipiell ist diese Idee auch genau die richtige. Aber ist die Verkettung zweier Wege wirklich immer ein Weg? Das ist nur dann so, wenn die beiden Wege nur die Verkettungsecke b gemeinsam haben. Es kann aber sein, dass sich die beiden Ein-

zelwege kreuzen (d.h. Ecken gemeinsam haben, die nicht Start- oder Zielecken sind), und dann würden auf ihrer Verkettung nicht alle Ecken verschieden sein (was unsere Definition für Wege aber fordert).



Wir können unsere Anfangsidee an diese neue Erkenntnis anpassen: Wenn die beiden Teilwege einander kreuzen, dann gehen wir von a bis zu der Kreuzungsecke x; dort biegen wir vom a-b-Weg ab und folgen dem Rest des b-c-Weges bis nach c.

Falls es mehrere Kreuzungen geben sollte, biegen wir einfach an der ersten Kreuzungsecke x, die wir auf unserem Weg erreichen, ab; x ist dann die *erste* Kreuzungsecke auf dem Weg von a nach b, auf dem Weg von b nach c aber die *letzte*. Da wir den ersten Weg *bis* x und den zweiten Weg *ab* x benutzen, kommen wir daher über keine Ecke mehrmals, wir gehen also tatsächlich einen Weg. Damit haben wir die Transitivität gezeigt. ■

ÜBUNG 3 ✻ Zeichnen Sie einige Graphen (zusammenhängende und nicht zusammenhängende) und bilden Sie jeweils die Summe aller Eckengrade. Vergleichen Sie damit die Kantenzahl.

Auf einer Party fragen Sie alle Gäste, wie vielen Leuten sie jeweils die Hand gegeben haben. Wie berechnen Sie daraus die Gesamtzahl der ‚Handschläge'?

Satz 2 Handschlaglemma

In jedem Graphen ist die Summe aller Eckengrade gleich der doppelten Kantenzahl.

Formal: $$\sum_{e \in E} d(e) = 2|K|$$

Beweis

Die Summe aller Eckengrade zählt jede Kante zweimal, nämlich von jeder ihrer beiden Ecken aus. Also ist diese Summe doppelt so groß wie die Kantenzahl. ■

ÜBUNG 4 ✻ Zeichnen Sie einige Graphen (zusammenhängende und nicht zusammenhängende) und zählen Sie jeweils die Ecken mit ungeradem Grad. Was stellen Sie fest?

Satz 3 Folgerung aus dem Handschlaglemma

Jeder Graph hat eine gerade Anzahl von Ecken ungeraden Grades.

Beweis

Sei A die Menge der Ecken ungeraden Grades und B die Menge der Ecken geraden Grades. Dann gilt nach dem Handschlaglemma:

$$2|K| = \sum_{e \in E} d(e) = \underbrace{\sum_{e \in A} d(e)}_{\substack{\text{Summe ungerader} \\ \text{Zahlen}}} + \underbrace{\sum_{e \in B} d(e)}_{\substack{\text{gerade, da alle} \\ \text{Summanden gerade}}}$$

Die Summe der beiden Summen auf der rechten Seite muss also gerade sein. Das ist aber (da die rechte Summe gerade ist) nur möglich, wenn auch die linke Summe gerade ist. Da dies eine Summe ungerader Zahlen ist, kann sie nur dann gerade sein, wenn die Anzahl ihrer Summanden gerade ist (eine Summe ungerader Zahlen ist genau dann gerade, wenn die Anzahl ihrer Summanden gerade ist). D.h. die Anzahl der Ecken ungeraden Grades muss gerade sein. ■

ÜBUNG 5 * Konstruieren Sie einen Graphen, in dem alle Ecken unterschiedlichen Grad haben. Was stellen Sie fest?

Satz 4 Zwillingssatz

In jedem Graphen (mit mindestens 2 Ecken) gibt es mindestens zwei Ecken vom selben Grad.

Beweis (indirekt)

Annahme: Die Behauptung ist falsch, d.h. es gibt (mindestens) einen Graphen, in dem alle n Ecken unterschiedliche Grade $d_1 < d_2 < \ldots < d_n$ haben.

Der Maximalgrad eines Graphen mit n Ecken ist $\leq n-1$, da jede Ecke höchstens mit allen übrigen Ecken benachbart sein kann. Also ist $d_1 < d_2 < \ldots < d_n \leq n-1$. Die einzige Lösung dieser Ungleichungskette in natürlichen Zahlen (einschl. 0) ist

$$\underbrace{0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < n-1}_{n \text{ Zahlen}}.$$

Da der Grad 0 auftritt, gibt es eine isolierte Ecke. Die Ecke vom Grad $n-1$ kann also nicht mit allen übrigen Ecken benachbart sein (das wären $n-1$ Ecken). Also kann sie nicht den Grad $n-1$ haben. Widerspruch. ■

ÜBUNG 6 Der Zwillingssatz gilt nicht für unendliche Graphen. Konstruieren Sie einen unendlichen Graphen, der für jede natürliche Zahl n genau eine Ecke mit diesem Grad enthält.

ÜBUNG 7 Zeichnen Sie einen zusammenhängenden Graphen und markieren Sie darin einige Wege mit maximaler Länge (*längste Wege*). Können Sie den Graphen so konstruieren, dass es zwei *kreuzungsfreie* längste Wege (längste Wege ohne gemeinsame Ecke) gibt?

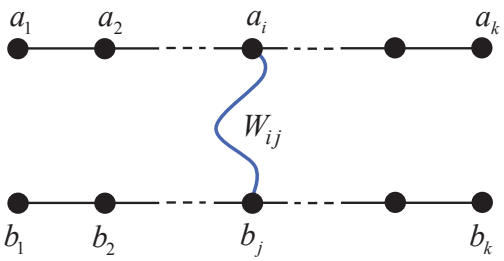
Satz 5 Kreuzungssatz

In einem zusammenhängenden Graphen haben zwei längste Wege stets (mindestens) eine Ecke gemeinsam.

Beweis

Wir führen den Beweis indirekt. Annahme: Es gäbe zwei längste Wege $A = a_1 \ldots a_k$ und $B = b_1 \ldots b_k$ mit jeweils k Ecken (also der Länge $k-1$), die *keine Ecke gemeinsam* haben (d.h. es gilt $a_i \neq b_j$ für alle $i, j \in \{1,\ldots,k\}$).

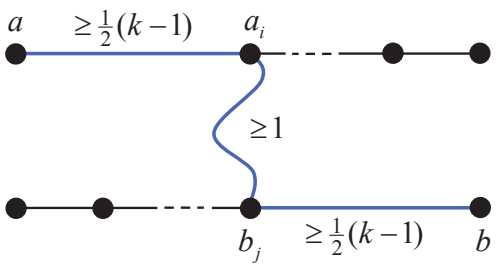
Der Beweistrick besteht darin, dass wir Teile dieser beiden längsten Wege – wenn sie wirklich keine Ecke gemeinsam hätten – über einen Verbindungsweg zu einem neuen Weg zusammensetzen könnten, der noch länger sein müsste als die längsten Wege. Da es längere Wege als längste natürlich nicht geben kann, hätten wir damit die Annahme widerlegt. (Zwei längste Wege haben eben doch immer gemeinsame Ecken. Der Trick kann nur deshalb funktionieren, weil wir annehmen, sie hätten keine.)



Betrachten wir also zwei beliebige Ecken a_i und b_j (a_i auf dem Weg A und b_j auf dem Weg B). Da der Graph zusammenhängend ist, muss es einen Weg W_{ij} zwischen a_i und b_j geben, und da a_i und b_j nicht gleich sein können (A und B haben nach unserer Annahme ja keine Ecke gemeinsam), hat W_{ij} mindestens die Länge 1. Indem wir W_{ij} als Verbindung verwenden, können wir nun aus Teilen der beiden ursprünglichen Wege A und B einen neuen Weg zusammensetzen, der länger als die beiden Wege A und B wäre: Wir suchen einfach die von a_i auf dem Weg A am weitesten entfernte der beiden Ecken a_1 oder a_k (diese nennen wir a); sind beide gleichweit entfernt, wählen wir irgendeine davon. Entsprechend wählen wir die von b_j auf dem Weg B am weitesten entfernte der beiden Ecken b_1 oder b_k (diese nennen wir kurz b). Jedes der beiden Wegstücke $a \ldots a_i$ und $b_j \ldots b$ hat dann mindestens die halbe Länge des ursprünglichen Weges A bzw. B, also jeweils mindestens $\frac{1}{2}(k-1)$.

Fügen wir nun die drei Wege $a \ldots a_i$, W_{ij} und $b_j \ldots b$ in dieser Reihenfolge anein-

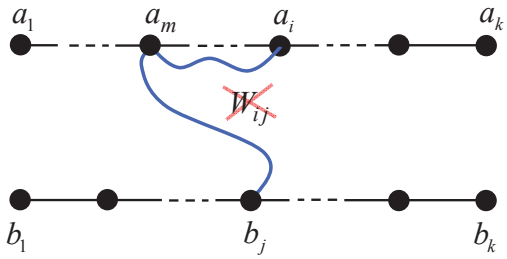
ander, so hat der Gesamtweg eine Länge $\geq \frac{1}{2}(k-1)+1+\frac{1}{2}(k-1)=k$. Er hätte also mindestens die Länge k und wäre damit länger als die längsten Wege A und B mit der Länge $k-1$. Damit haben wir den angekündigten Widerspruch.



Wir sind allerdings noch nicht ganz fertig. Wir haben nämlich noch nicht gezeigt, dass beim Aneinanderfügen der Wege $a\ldots a_i$, W_{ij} und $b_j\ldots b$ wirklich wieder ein Weg entsteht. Das ist dann (und nur dann) der Fall, wenn sämtliche darin vorkommende Ecken verschieden sind (wie wir es für Wege in unserer Definition ja gefordert haben). Dass auf den beiden Wegstücken $a\ldots a_i$ und $b_j\ldots b$ keine Ecke mehrfach vorkommt, ist sicher: Denn erstens sind alle Ecken auf $a\ldots a_i$ untereinander verschieden und ebenso alle Ecken auf $b_j\ldots b$, weil beides Teile von Wegen sind. Und zweitens kann keine der Ecken auf $a\ldots a_i$ mit einer Ecke auf $b_j\ldots b$ identisch sein, weil nach Annahme die Wege A und B keine gemeinsame Ecke haben.

Woher wissen wir aber, dass der Verbindungsweg W_{ij} außer den Ecken a_i und b_j nicht noch weitere Ecken der Wegstücke $a\ldots a_i$ und $b_j\ldots b$ enthält? Das ist in der Tat keineswegs ausgeschlossen. Zumindest dann, wenn W_{ij} *irgendein* Verbindungsweg ist. Wenn wir aber diesen Verbindungsweg ein wenig geschickter wählen, dann können wir leicht erreichen, dass er ausschließlich die Ecken a_i und b_j mit A und B gemeinsam hat.

Dazu müssen wir lediglich unter allen Verbindungswegen W_{ij} (zwischen sämtlichen Ecken a_i auf A und sämtlichen Ecken b_j auf B) einen wählen, der *so kurz wie möglich* ist. (Es mag mehrere kürzeste Wege geben, wir wählen irgendeinen davon.)



Ein solcher *kürzester* Verbindungsweg W_{ij} kann außer a_i und b_j keine weiteren Ecken der beiden Wege A und B enthalten. Denn läge etwa a_m ebenfalls auf W_{ij}, so wäre der Weg W_{mj} zwischen a_m und b_j kürzer als W_{ij} (analog für b_m auf B).

Wenn wir im ersten Teil des Beweises mit W_{ij} also einen *kürzesten Verbindungsweg* bezeichnen, dann ist sicher, dass die Zusammenfügung der Teilwege $a\ldots a_i$, W_{ij} und $b_j\ldots b$ ebenfalls ein Weg ist (der, wie wir gezeigt haben, länger ist als die längstmöglichen Wege, was den von uns angestrebten Widerspruch liefert). ■

1.2 Bäume und Wälder

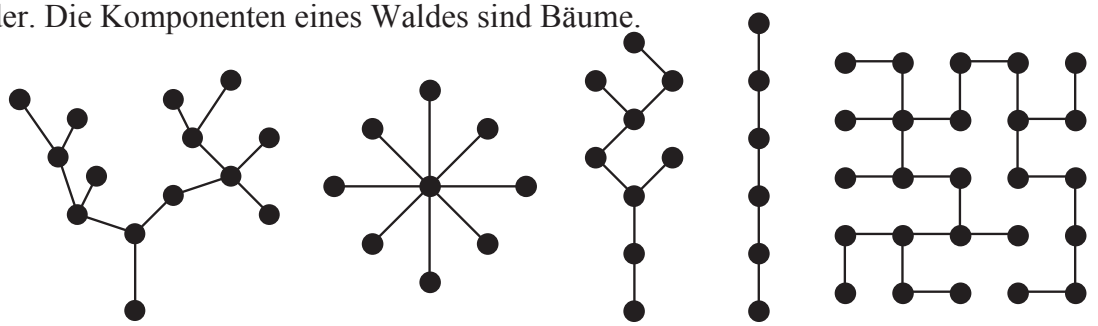
ÜBUNG 8 * Zeichnen Sie einige kreislose zusammenhängende Graphen und vergleichen Sie ihre Ecken- und Kantenzahl.

Definition 5 Bäume, Wälder

Ein kreisloser zusammenhängender Graph heißt *Baum*.

Ein kreisloser Graph heißt *Wald*.

In der Graphentheorie ist also jeder Baum ein Wald, und zwar ein zusammenhängender. Die Komponenten eines Waldes sind Bäume.



Wald mit 5 Bäumen

ÜBUNG 9 Konstruieren Sie alle Bäume mit höchstens 5 Ecken.

Satz 6 Ecken-/Kantenzahlkriterium für Bäume

Ein Graph ist genau dann ein Baum, wenn er zusammenhängend und seine Kantenzahl um 1 niedriger als seine Eckenzahl ist ($|K| = |E| - 1$).

Beweis

(1) *Richtung* $\Rightarrow$ Wir zeigen: Jeder Baum mit n Ecken hat $n-1$ Kanten. (Dass er zusammenhängend ist, gilt bei Bäumen nach Definition automatisch.) Wir führen den Beweis durch *Induktion über die Eckenzahl n*.

Verankerung: Ein Baum mit $n=1$ Ecke hat $0=n-1$ Kanten. Also gilt die Behauptung für $n=1$.

Vererbung (Schluss von n auf n+1):

Voraussetzung: Die Behauptung gilt für alle Bäume mit n Ecken (d.h. alle Bäume mit n Ecken haben $n-1$ Kanten).

Behauptung: Dann gilt die Behauptung auch für Bäume mit $n+1$ Ecken (d.h. alle Bäume mit $n+1$ Ecken haben n Kanten).

Beweis: Sei B ein Baum mit $n+1$ Ecken. Da jeder Baum mindestens 2 Endecken hat (siehe Übung 12), gibt es eine Endecke e in B. Wir entfernen diese Endecke (zusammen mit ihrer inzidenten Kante), den Restgraphen nennen wir B^*. Da B^* weiterhin zusammenhängend und kreislos ist, ist er ebenfalls ein Baum. Da er nur noch n Ecken hat, gilt für ihn die Induktionsvoraussetzung, er hat also $n-1$ Kanten. Der Ausgangsbaum B hat eine Kante mehr als B^*, also n Kanten. Das war zu zeigen.

(2) *Richtung* $\Leftarrow$ Wir zeigen: Jeder zusammenhängende Graph mit n Ecken und $n-1$ Kanten ist ein Baum. Wir führen den Beweis *indirekt*: Wir nehmen an, es gäbe einen zusammenhängenden Graphen mit n Ecken und $n-1$ Kanten, der *kein* Baum ist.

Da ein Baum ein zusammenhängender kreisloser Graph ist, muss ein zusammenhängender Graph, der kein Baum ist, mindestens einen Kreis enthalten. Wir können diesen Graphen kreislos machen, indem wir schrittweise aus jedem seiner Kreise eine Kante entfernen (solange noch ein Kreis vorhanden ist, wählen wir darin irgend eine Kante und entfernen sie, nicht aber die damit inzidenten Ecken). Dabei bleibt der Graph stets zusammenhängend, weil die beiden Ecken der entfernten Kante auf einem Kreis lagen, also noch über die verbliebenen Kreiskanten zusammenhängen. Bei dieser Operation wird also die Kantenzahl pro Kreis um 1 verringert, während sich die Eckenzahl nicht ändert.

Der verbleibende Restgraph hat mindestens eine Kante weniger als der ursprüngliche $(i=1,\ldots,t)$ Graph, und er ist weiterhin zusammenhängend, aber nun kreislos – er ist also ein Baum. Daher hat dieser Restgraph nach Teil (1) unseres Beweises n Ecken und $n-1$ Kanten. Da der ursprüngliche Graph dieselben n Ecken hat, aber mindestens eine Kante mehr als der Restgraph, kann er nicht ebenfalls n Ecken und $n-1$ Kanten haben. Widerspruch zur Annahme. ■

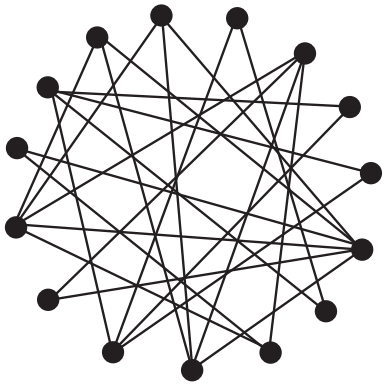
ÜBUNG 10 Zeichnen Sie alle Bäume mit 6 Ecken.

ÜBUNG 11 Wie viele Kanten hat ein Wald mit n Ecken und t Komponenten?

ÜBUNG 12 Beweisen Sie: Ein Baum mit mehr als einer Ecke (eine isolierte Ecke ist keine Endecke) hat stets mindestens zwei Endecken.

ÜBUNG 13 Charakterisieren Sie die zusammenhängenden Graphen, bei denen Kantenzahl und Eckenzahl gleich sind.

ÜBUNG 14 Wie viele Komponenten hat der abgebildete Graph? Beschreiben Sie, wie Sie hier und in ähnlich unübersichtlichen Fällen vorgehen.



Satz 7 Kanten in Wäldern

Ein Wald mit n Ecken und t Komponenten (Bäumen) hat $n-t$ Kanten.

Beweis

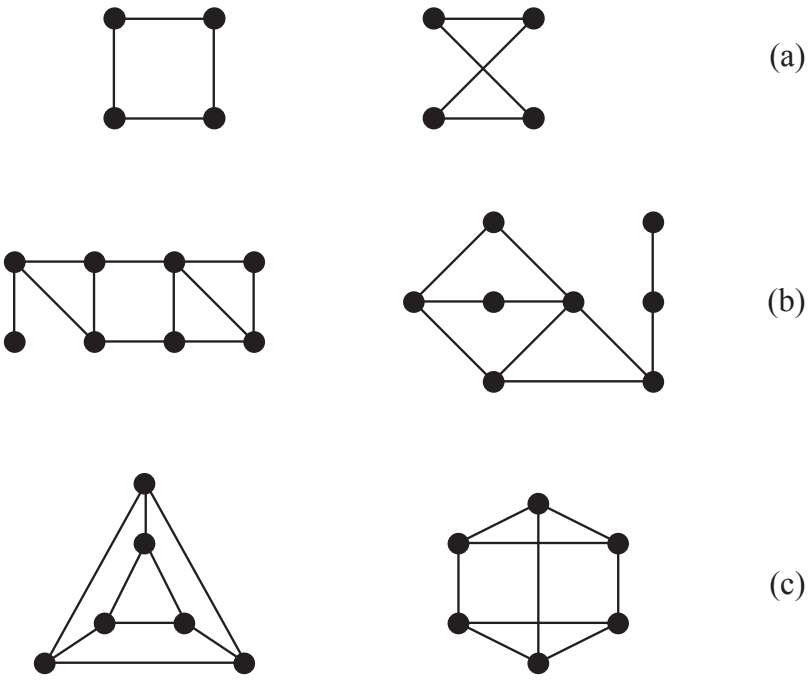
Bezeichnen wir mit n_i die Eckenzahl und mit k_i die Kantenzahl der i-ten Komponente des Waldes ($i=1,\ldots,t$), so ist $\sum_{i=1}^{t} n_i = n$ (denn die Eckenzahl eines Graphen ist die Summe der Eckenzahlen seiner Komponenten) und nach dem vorigen Satz $k_i = n_i - 1$ (denn alle Komponenten eines Waldes sind Bäume). Damit gilt für die Kantenzahl k des Waldes:

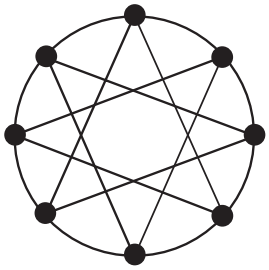
$$k = \sum_{i=1}^{t} k_i = \sum_{i=1}^{t} (n_i - 1) = \sum_{i=1}^{t} n_i - \sum_{i=1}^{t} 1 = n - t \qquad \blacksquare$$

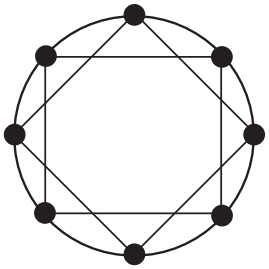
1.3 Isomorphie von Graphen

ÜBUNG 15 ✻

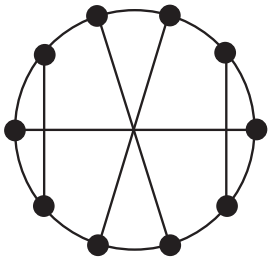
Untersuchen Sie die folgenden Graphenpaare: Handelt es sich jeweils um verschiedene Graphen oder ist es beide Male derselbe Graph, nur anders gezeichnet? Wieso können zwei unterschiedliche Zeichnungen denselben Graphen darstellen?

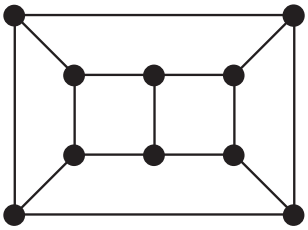






(d)





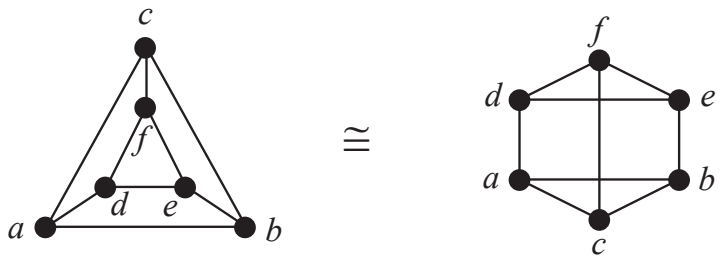
(e)

Definition 6 isomorphe Graphen

Zwei Graphen $G=(E,K)$ und $G'=(E',K')$ heißen *isomorph* ($G \cong G'$), wenn es eine Bijektion $\varphi: E \to E'$ der Eckenmengen gibt, so dass für beliebige $a,b \in E$ gilt: $ab \in K \Leftrightarrow \varphi(a)\varphi(b) \in K'$.

Die Bijektion φ heißt dann *Graphen-Isomorphismus*.

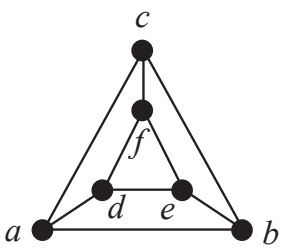
Einfacher gesagt: Isomorph sind zwei Graphen dann, wenn man in beiden die Eckennamen (z.B. *a, b, c, ...*) so vergeben kann, dass zwei Ecken im einen Graphen genau dann benachbart sind, wenn im anderen Graphen die entsprechend benannten Ecken ebenfalls benachbart sind.



In den meisten Fällen interessiert uns nur die Struktur eines Graphen. Dann werden wir isomorphe Graphen einfach als ‚gleich' ansehen.

Um über Isomorphie zu entscheiden, müssen wir demnach einen vollständigen Überblick über die gesamte Struktur eines Graphen haben, wir müssen über die vollständige ‚Nachbarschaftsinformation' seiner Ecken verfügen. Die übliche bildhafte Darstellung von Graphen ist dazu weniger geeignet, weil man in komplexen Bildern oft Details übersieht. Besser geeignet sind schematische Darstellungsformen, die es

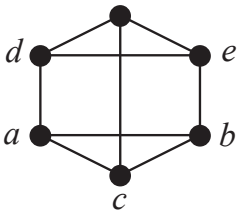
uns erlauben, die gesamte Information nicht auf einmal, sondern Schritt für Schritt zu erfassen und abzuarbeiten. Besonders geeignet sind dazu die *Adjazenzmatrix* sowie die *Adjazenzlisten* eines Graphen. In der *Adjazenzmatrix* wird die Nachbarschaftsrelation eines Graphen G für jedes Eckenpaar dargestellt:



G

	a	b	c	d	e	f
a	0	1	1	1	0	0
b	1	0	1	0	1	0
c	1	1	0	0	0	1
d	1	0	0	0	1	1
e	0	1	0	1	0	1
f	0	0	1	1	1	0

Adjazenzmatrix von G und von G'



G'

Dieselbe Information können wir auch durch *Adjazenzlisten* für jede Ecke von G ausdrücken (also durch eine Liste von Listen):

a: b,c,d , b: a,c,e , c: a,b,f , d: a,e,f , e: b,d,f , f: c,d,e

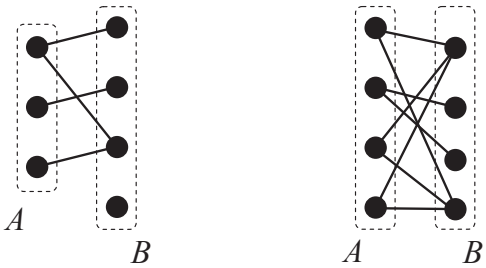
Zwei Graphen sind nach Definition genau dann isomorph, wenn sie bei geeigneter Benennung der Ecken in ihrer Adjazenzmatrix bzw. in ihren Adjazenzlisten genau übereinstimmen. Daraus folgt insbesondere:

Satz 8

Ein Graphen-Isomorphismus bildet eine Ecke stets auf eine Ecke vom selben Grad ab.

1.4 Bipartite Graphen

Mitunter können wir in einem Graphen die Eckenmenge so in zwei Teilmengen (‚Sorten') A und B zerlegen, dass Kanten nur zwischen Ecken *verschiedener Sorten* verlaufen. Zwei Ecken derselben Sorte sind dann also niemals adjazent. Solche Graphen nennen wir *bipartit* (‚zweiteilig').



bipartite Graphen

Denken Sie an ein Heiratsinstitut: Wir modellieren die Struktur der Kundenkartei, indem wir eine Kundin mit einem Kunden genau dann durch eine Kante verbinden, wenn beide einander als mögliche Heiratspartner ansehen. In einem konservativ orientierten Institut können Kanten dann nur zwischen Männern und Frauen verlaufen.

Definition 7 bipartite Graphen

Ein Graph $G = (A \oplus B, K)$, dessen Eckenmenge die disjunkte Vereinigung zweier Teilmengen A, B ist, und in dem es höchstens Kanten zwischen Ecken aus A und Ecken aus B gibt, heißt *bipartiter Graph* (auch *paarer Graph*).

Da jede der beiden Eckenteilmengen A, B auch leer sein kann, sind der leere Graph und der Graph mit genau einer Ecke bipartit.

Disjunkte Vereinigung

Dass eine Menge M die *disjunkte Vereinigung* zweier Mengen X und Y ist (formal: $M = X \oplus Y$), enthält eine doppelte Aussage:

(1) $X \cap Y = \varnothing$ (die beiden Mengen X und Y sind disjunkt)

(2) $M = X \cup Y$ (M ist die Vereinigung von X und Y)

Die Operation $\oplus$ ist also nur zwischen zwei Mengen definiert, die keine gemeinsamen Elemente haben (im Gegensatz zu den Mengenoperationen $\cup, \cap, \setminus$, die für beliebige Mengen definiert sind).

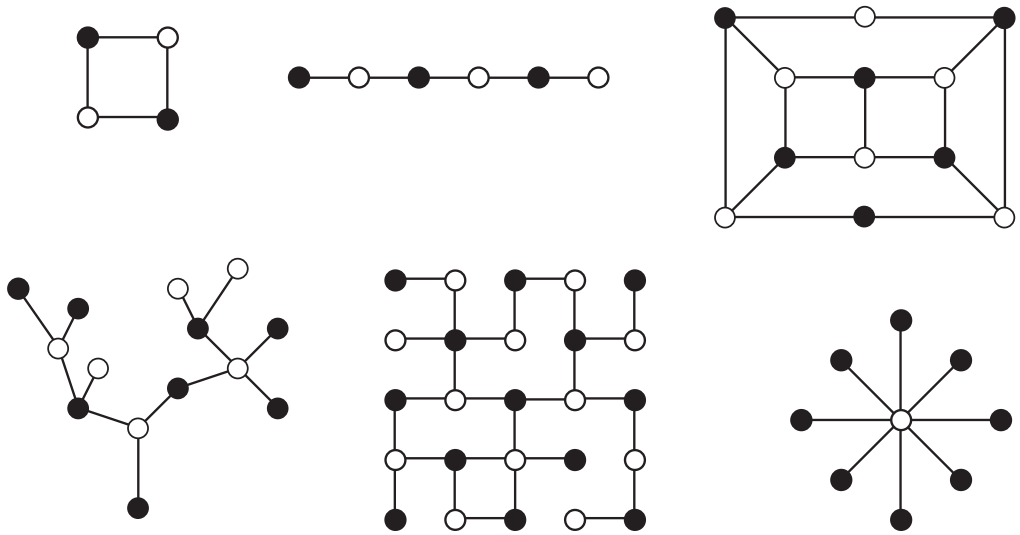
ÜBUNG 16 *

Stellen Sie sich einen Ausflug mehrerer Familien (Kinder und Eltern) vor. Wir modellieren die Situation in einem bipartiten Graphen, indem wir jedes Kind mit jedem anwesenden Elternteil durch je eine Kante verbinden. Wie wird in diesem Modell ‚Familie' graphentheoretisch repräsentiert?

Dass ein Graph bipartit ist, haben wir in der vorigen Abbildung optisch dadurch hervorgehoben, dass wir die Eckenteilmengen A und B parallel nebeneinander angeordnet haben: Kanten verlaufen dann ausschließlich ‚zwischen links und rechts'.

Wir können aber auch die Ecken der beiden Teilmengen A und B unterschiedlich färben, zum Beispiel alle Ecken in A weiß, alle Ecken in B schwarz. Kanten verlaufen dann ausschließlich zwischen schwarz und weiß. Eine solche Färbung nennen wir *2-Färbung* (mit Färbungen werden wir uns ausführlich in Kapitel 0 beschäftigen). Dass ein Graph bipartit ist, ist gleichbedeutend damit, dass er 2-färbbar ist. Denn statt zu sagen „Jede Ecke liegt entweder in A oder in B, und Kanten verlaufen nur zwischen einer A-und einer B-Ecke" können wir völlig gleichbedeutend sagen „Jede

Ecke ist entweder weiß oder schwarz, und Kanten verlaufen nur zwischen einer weißen und einer schwarzen Ecke“.



Darstellung bipartiter Graphen durch 2-Färbung

ÜBUNG 17 * Betrachten Sie die bipartiten Graphen in der letzten Abbildung und zeichnen Sie weitere Beispiele. Betrachten Sie die Kreise, die in ihnen vorkommen. Was fällt Ihnen auf? Formulieren Sie eine allgemeine Vermutung. Können Sie sie beweisen?

Satz 9 Kreiskriterium für bipartite Graphen

Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keine Kreise ungerader Länge enthält.

Beweis

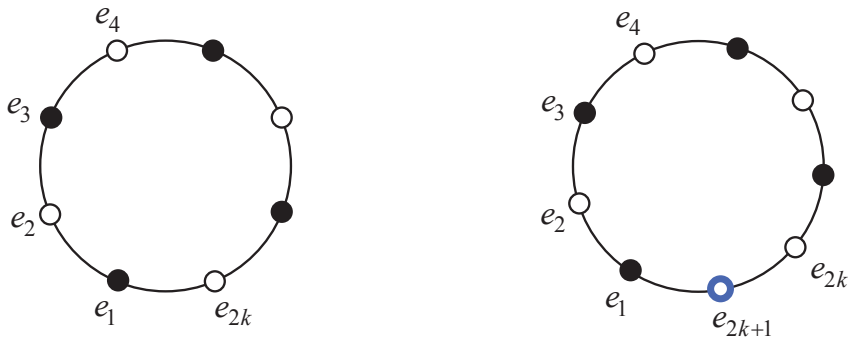
Zunächst machen wir uns klar, dass es reicht, die Behauptung für *zusammenhängende* Graphen zu zeigen. Denn beide Einzeleigenschaften (keine Kreise ungerader Länge, bipartit) hat ein Graph genau dann, wenn jede seiner Komponenten sie hat, und das sind eben zusammenhängende Graphen: Ein Kreis ungerader Länge muss ganz in einer Komponente liegen (denn zwischen verschiedenen Komponenten verlaufen keine Kanten). Also hat ein Graph genau dann keinen Kreis ungerader Länge, wenn jede seiner Komponenten keinen Kreis ungerader Länge hat.

Ebenso ist ein Graph genau dann bipartit (2-färbbar), wenn jede seiner Komponenten bipartit ist: Denn wenn der Graph bipartit ist, dann auch jede seiner Komponenten; und wenn jede seiner Komponenten bipartit ist, muss auch der Graph selbst bipartit sein, da jede Kante, die zwei gleichfarbige Ecken verbinden würde, schon in einer

Komponente vorhanden wäre, die dann eben nicht bipartit wäre. (Auch hier argumentieren wir damit, dass zwischen verschiedenen Komponenten keine Kanten verlaufen).

(1) Sei G ein *bipartiter* Graph. Es ist klar, dass G keinen Kreis ungerader Länge haben kann. Denn ein solcher Kreis wäre nicht 2-färbbar. Wenn aber ein Untergraph nicht 2-färbbar ist, dann natürlich auch nicht der Gesamtgraph. Die Eigenschaften ‚2-färbbar' und ‚bipartit' sind aber, wie wir überlegt haben, äquivalent.

Um bei einem Kreis mit möglichst wenig Farben auszukommen, müssen wir die Ecken abwechselnd färben, da Nachbarecken verschiedene Farben erfordern. Bei einem Kreis gerader Länge ist das leicht möglich (s. folgende Abb. links): Wenn wir alle Ecken mit ungerader Nummer mit einer gemeinsamen Farbe färben und alle mit gerader Nummer mit einer anderen gemeinsamen Farbe, so sind adjazente Ecken stets verschieden gefärbt. Starten wir bei irgendeiner Ecke e_1, so trägt die letzte Ecke, bevor wir wieder die Startecke e_1 erreichen, eine gerade Nummer (e_{2k}); erste und letzte Ecke e_1, e_{2k} unseres Färbungsdurchlaufs sind also verschieden gefärbt. – Bei einem Kreis ungerader Länge tragen jedoch sowohl die erste Ecke e_1 als auch die letzte Ecke e_{2k+1} ungerade Nummern; d.h. wir brauchen für die Ecken mit ungerader Nummer zwei Farben, insgesamt also drei. Kreise ungerader Länge sind also 3-färbbar, aber nicht 2-färbbar (s. Abb. rechts).



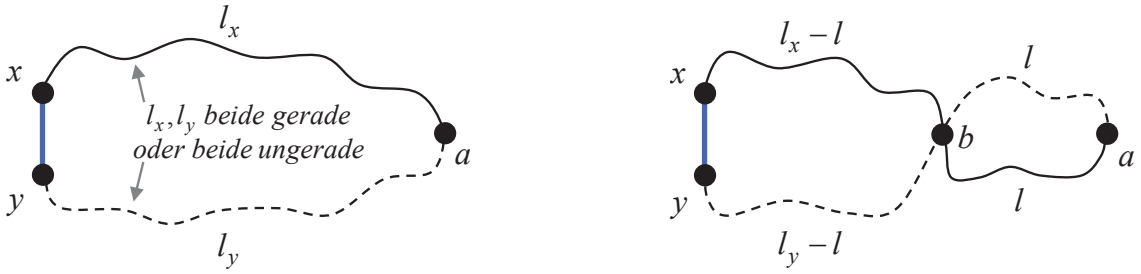
(2) Sei nun umgekehrt G ein (nichtleerer) zusammenhängender Graph *ohne Kreise ungerader Länge*. Wir wollen zeigen, dass G bipartit ist. Wir müssen dazu irgendwie eine disjunkte Zerlegung seiner Eckenmenge konstruieren, so dass Kanten nur von der einen in die andere Teilmenge verlaufen.

Als erstes wählen wir eine Ecke a, die zwar beliebig ist, die wir aber im Folgenden festhalten. Da G zusammenhängend ist, gibt es von jeder Ecke mindestens einen Weg nach a ; unter diesen wählen wir jeweils einen mit kürzester Länge aus. (Es gibt übrigens auch einen kürzesten Weg von a nach a, er hat die Länge 0.) Für jede Ecke hat nun dieser kürzeste Weg entweder eine gerade oder eine ungerade Länge. Damit haben wir die gesuchte disjunkte Zerlegung der Eckenmenge auch schon gefunden: Bezeichnen wir die Menge der Ecken, bei denen der kürzeste Weg nach a gerade Länge hat, mit *Ger*, und die mit ungerader Länge mit *Ung*, dann gehört jede Ecke von

G entweder zu *Ger* oder zu *Ung*, es ist also $G = (Ger \oplus Ung, K)$. Damit muss G aber noch nicht bipartit sein; wir müssen noch zeigen, dass Kanten nur zwischen *Ger* und *Ung* verlaufen. Das ist aber tatsächlich der Fall, weil es sonst in G einen Kreis ungerader Länge geben würde, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Das können wir mit einem *indirekten Beweis* zeigen:

Angenommen, es gäbe doch zwei Ecken $x, y \in Ger$ oder $x, y \in Ung$ (also beide in derselben Teilmenge), die über eine Kante verbunden sind. Dann wären die Längen l_x, l_y ihrer kürzesten Wege nach a entweder beide gerade oder beide ungerade. Zusammen mit der angeblich existierenden Kante zwischen x und y würden die beiden kürzesten Wege dann also einen Kreis bilden mit einer Länge *‚gerade plus gerade plus 1'* oder *‚ungerade plus ungerade plus 1'*. In beiden Fällen wäre die Länge also ungerade, was unmöglich ist, weil G ja keinen Kreis ungerader Länge hat.

Diese Argumentation hat allerdings noch einen Schönheitsfehler: Die beiden kürzesten Wege von x bzw. y nach a müssen zusammen mit der Kante xy nicht in jedem Fall wirklich einen Kreis bilden; das wäre nur dann so, wenn sie außer a keine Ecke gemeinsam haben. Es ist aber möglich, dass sie sich kreuzen, evtl. sogar mehrfach (s. folgende Abb. rechts).



Immer würde ein Kreis ungerader Länge entstehen

Das ändert für uns aber nicht sehr viel: Statt a wählen wir dann einfach den (von x bzw. y aus gesehen) *ersten dieser Kreuzungspunkte* (nennen wir ihn b). Dann müssen auch die beiden Restwege von b nach a kürzeste Wege sein (und damit haben sie gleiche Länge, sagen wir l). Gäbe es nämlich zu einem der Restwege einen kürzeren, dann wäre der zugehörige Gesamtweg (von x oder y nach a) ebenfalls kein kürzester Weg, weil man ihn auf dem Restweg hinter b ja noch abkürzen könnte. Damit ist also sicher, dass beide Restwege dieselbe Länge l haben. Und nun können wir wieder wie eben argumentieren: Wenn l_x, l_y beide gerade oder beide ungerade sein, dann müssen auch $l_x - l$, $l_y - l$ beide gerade oder beide ungerade sein. Der Kreis von b über x, über die Kante xy und von y zurück nach b wäre dann wieder ein Kreis ungerader Länge, was ausgeschlossen ist. Und dass es diesmal wirklich ein Kreis sein muss, ist sicher, weil b die *erste* Kreuzungsecke der beiden kürzesten Wege ist, der Kreis also wirklich keine Ecke mehrfach durchläuft. ■

Da Wälder und Bäume überhaupt keine Kreise enthalten – also auch keine ungerader Länge –, ergibt sich als unmittelbare Folgerung aus dem letzten Satz:

Satz 10 Folgerung aus dem Kreiskriterium

Kreislose Graphen (Wälder und Bäume) sind stets bipartit.

Denken Sie hier noch einmal über die Begriffe *Baum* und *Wald* nach: Die kreislosen Graphen heißen Wälder; jeder Baum ist kreislos (und zusätzlich zusammenhängend), und daher ist ein Baum stets ein Wald. Wir können also sagen: Ein Baum ist ein zusammenhängender Wald. Oder: Ein Baum ist ein Wald mit nur einer Komponente. Unsere eigentliche Definition ist aber logisch viel klarer – und einfacher: Ein kreisloser Graph heißt *Wald*; ein kreisloser *und zusammenhängender* Graph heißt *Baum*.

1.5 Vollständige Graphen

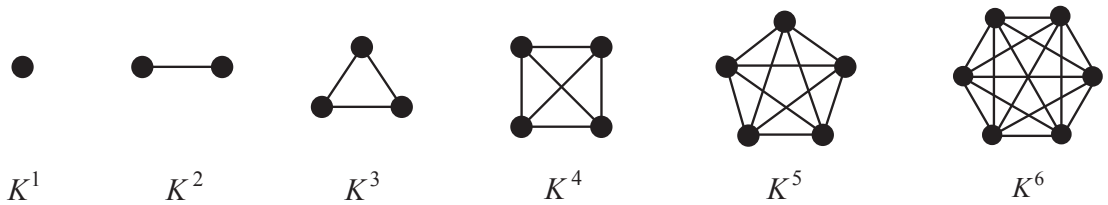
ÜBUNG 18 Wie viele Kanten kann ein Graph mit 100 Ecken maximal haben?
*

Definition 8 vollständige Graphen, vollständige bipartite Graphen

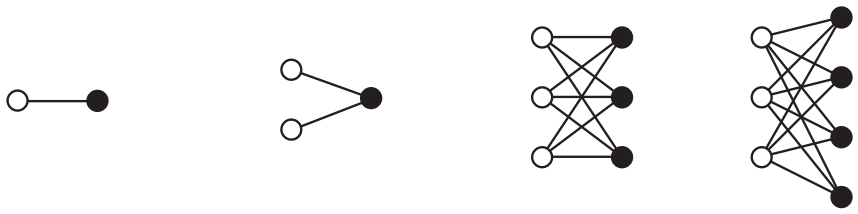
(1) Ein Graph, in dem jede Ecke zu jeder anderen adjazent ist, heißt *vollständiger Graph* (auch: *Simplex*). Der vollständige Graph mit n Ecken wird mit K^n bezeichnet ($n > 0$).

(2) Ein bipartiter Graph $G = (A \oplus B, K)$, in dem jede Ecke aus A mit jeder Ecke aus B durch eine Kante verbunden ist (und also auch umgekehrt), heißt *vollständiger bipartiter Graph*. Der vollständige bipartite Graph mit $m = |A|$ und $n = |B|$ wird mit $K^{m,n}$ bezeichnet ($n, m > 0$).

Besonders übersichtlich können wir den vollständigen Graphen K^n in der Standardform *‚n-Eck mit sämtlichen Diagonalen'* darstellen.



Die kleinsten vollständigen Graphen



$K^{1,1}$ $K^{2,1}$ $K^{3,3}$ $K^{3,4}$

Einige vollständige bipartite Graphen

Die Kantenzahlen vollständiger Graphen und vollständiger bipartiter Graphen ergeben sich unmittelbar aus einfachen kombinatorischen Überlegungen:

Satz 11

Der vollständige Graph K^n hat $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.

Beweis

Jede der n Ecken ist mit allen übrigen Ecken benachbart, das sind jeweils $n-1$ Stück. In dem Produkt $n(n-1)$ ist jede Kante doppelt gezählt (nämlich jeweils von ihren beiden Ecken aus). Das halbe Produkt ist also die Kantenzahl. ■

ÜBUNG 19 Konstruieren Sie einen Graphen mit 10 Kanten und möglichst wenig Ecken. Was ist die minimale Eckenzahl eines Graphen mit 45 Kanten?

Satz 12

Der vollständige bipartite Graph $K^{m,n}$ hat $m \cdot n$ Kanten.

Beweis

Jede der m Ecken von A ist mit allen n Ecken von B benachbart (und mit keiner Ecke aus A). Also gibt es insgesamt $m \cdot n$ Kanten. ■

ÜBUNG 20 Im Beweis des Handschlaglemmas musste die Kantenzahl halbiert werden; ebenso im Beweis von Satz 11. Warum muss sie im Beweis von Satz 12 nicht halbiert werden?

ÜBUNG 21 Finden Sie eine anschauliche Sammelbezeichnung für die Graphen $K^{1,n}$.

ÜBUNG 22 Können Sie einen wesentlichen Unterschied zwischen den Graphen $K^{m,n}$ und $K^{n,m}$ finden – oder sind beide vielleicht isomorph?

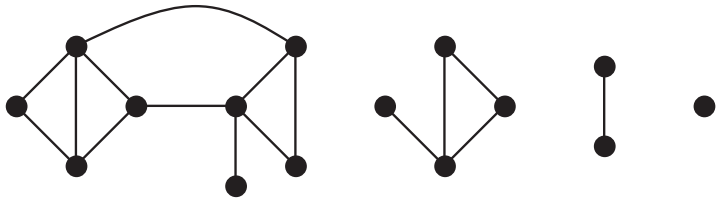
1.6 Multigraphen und gerichtete Graphen

In Graphen, so wie wir sie definiert haben, kann es zwischen zwei Ecken höchstens eine Kante geben; es gibt also keine ‚Mehrfachkanten'. Außerdem kann es keine ‚Schlingen' geben; damit wollen wir Kanten bezeichnen, die Ecken mit sich selbst verbinden.

In manchen Fällen kann es aber durchaus sinnvoll sein, den Graphenbegriff etwas zu erweitern und Mehrfachkanten und Schlingen zuzulassen. Graphen, in denen es Mehrfachkanten und Schlingen geben kann, nennen wir *Multigraphen*. Natürlich *müssen* Multigraphen keine Mehrfachkanten oder Schlingen haben: unsere Graphen sind spezielle Multigraphen. Wenn wir betonen wollen, dass ein Graph keine Mehrfachkanten oder Schlingen hat, bezeichnen wir ihn manchmal auch als *schlichten Graphen*.

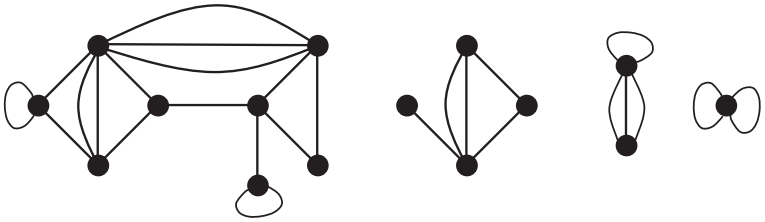
Außerdem kann es sinnvoll sein, die Kanten eines Multigraphen zu orientieren, auf ihnen also eine Richtung festzulegen. Dann zeichnen wir die Kanten als Pfeile. Solche ‚Multigraphen mit orientierten Kanten' nennen wir *gerichtete Graphen* (oder *Digraphen*, von englisch *directed graph*).

Graph
(schlichter Graph)



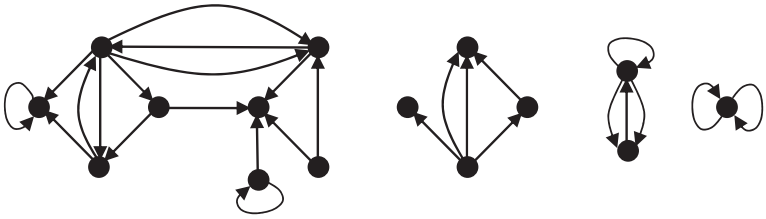
In einem (schlichten) Graphen gibt es zwischen zwei Ecken höchstens eine Kante (es gibt also *keine Mehrfachkanten*).Eine Kante verbindet stets verschiedene Ecken (es gibt also *keine Schlingen*). Die Kanten haben *keine Richtung* (es sind keine ‚Pfeile'); die Kante von *a* nach *b* ist dasselbe wie die Kante von *b* nach *a*.

Multigraph



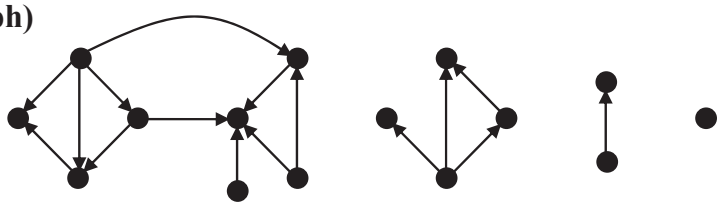
Ein *Multigraph* kann *Mehrfachkanten* und *Schlingen* (auch Mehrfachschlingen) haben. Zwei Kanten sind nicht deshalb schon gleich, weil sie dieselben Ecken verbinden. Jeder Graph ist ein Multigraph.

Digraph
(gerichteter Graph)



Ein *Digraph* entsteht aus einem Multigraphen, indem *jede Kante orientiert* wird (d.h. sie erhält eine *Richtung*). Eine Kante von *a* nach *b* ist etwas völlig anderes als eine Kante von *b* nach *a*. Und es kann auch mehrere verschiedenen Kanten von *a* nach *b* geben.

schlichter Digraph
(gerichteter schlichter Graph)



Ein *schlichter Digraph* entsteht aus einem (schlichten) Graphen, indem *jede Kante orientiert* wird (d.h. sie erhält eine *Richtung*). Er enthält also keine gerichteten Mehrfachkanten und keine gerichteten Schlingen.

ÜBUNG 23 Wie würden Sie *vollständige Multigraphen* und *vollständige Digraphen* definieren? Was heißt eigentlich ‚vollständig'?

2 BÄUME

ÜBUNG 24 ✻ Ein zusammenhängender Graph ist so gebaut, dass er in zwei Komponenten zerfällt, wenn man irgendeine Kante entfernt. Was können Sie über diesen Graphen sagen?

ÜBUNG 25 ✻ Ein kreisloser Graph ist so gebaut, dass stets ein Kreis entsteht, wenn man irgendeine neue Kante (zwischen bestehenden Ecken) hinzufügt. Was können Sie über diesen Graphen sagen?

ÜBUNG 26 ✻ Ein Graph ist so gebaut, dass es zwischen zwei verschiedenen Ecken immer genau einen Weg gibt. Was können Sie über diesen Graphen sagen?

Definition 9 minimal zusammenhängend, maximal kreislos

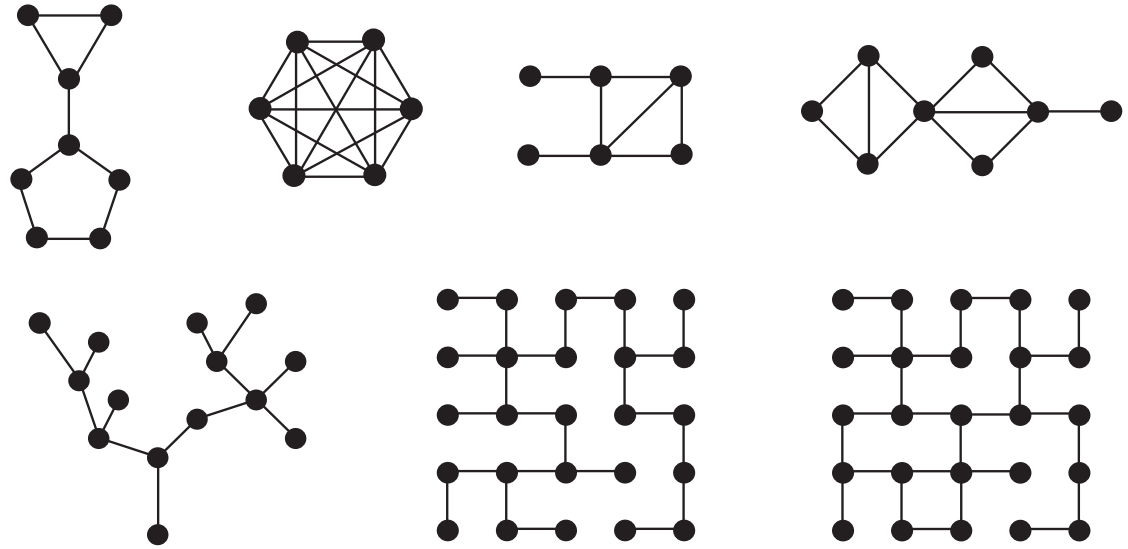
(1) Ein Graph heißt *minimal zusammenhängend*, wenn er zusammenhängend ist und bei Entfernen jeder beliebigen Kante in zwei Komponenten zerfällt.

(2) Ein Graph heißt *maximal kreislos*, wenn er kreislos ist und bei Hinzufügen einer beliebigen neuen Kante (zwischen zuvor nicht-adjazenten Ecken) ein Kreis entsteht.

(3) Eine Kante heißt *Brücke*, wenn sich durch Entfernen dieser Kante die Komponentenzahl des Graphen erhöht.

(4) Eine Ecke heißt *Zerlegungsecke* (auch: *Artikulation*), wenn sich durch Entfernen dieser Ecke (mit den inzidenten Kanten) die Komponentenzahl des Graphen erhöht.

ÜBUNG 27 Markieren Sie alle Brücken und Zerlegungsecken:



ÜBUNG 28 (1) Charakterisieren Sie Brücken, ohne die Begriffe ‚Komponente' und ‚entfernen' zu verwenden. (2) Beweisen Sie: Jede Ecke, von der eine Brücke ausgeht, ist eine Zerlegungsecke. Gilt das auch umgekehrt? (3) Was gilt über Brücken und Zerlegungsecken in Bäumen?

2.1 Eigenschaften von Bäumen

Satz 13 Äquivalenzsatz für Bäume

Die folgenden Aussagen über einen Graphen G sind äquivalent:

(1) G ist ein Baum.

(2) G ist zusammenhängend und kreislos.

(3) G ist zusammenhängend, und die Eckenzahl ist um 1 größer als die Kantenzahl.

(4) Zwei verschiedene Ecken von G sind stets durch genau einen Weg verbunden.

(5) G ist zusammenhängend, und alle Kanten sind Brücken.

(6) G ist zusammenhängend, und jede Ecke ist entweder Endecke oder Zerlegungsecke.

(7) G ist minimal zusammenhängend.

(8) G ist maximal kreislos.

Beweis siehe Vorlesung

ÜBUNG 29 ✻ Wie viele Endecken hat ein Baum (mit mehr als einer Ecke) mindestens? Sind Sie von Ihrer Antwort wirklich überzeugt? Wie würden Sie das beweisen?

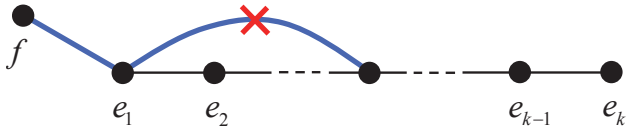
Satz 14 Endeckensatz

Ein Baum (mit mehr als einer Ecke) hat stets mehr als eine Endecke.

Beweis

Wir zeigen, dass in Bäumen (mit mindestens zwei Ecken) die Start- und Zielecken längster Wege immer Endecken sind. Da jeder Graph mindestens einen längsten Weg enthält (andernfalls müsste es Wege beliebiger Länge geben, was bei endlichen Graphen unmöglich ist), muss es demzufolge in jedem Baum mindestens zwei Endecken geben.

Wir argumentieren indirekt: Angenommen, es gäbe einen Baum mit mindestens 2 Ecken und einem längsten Weg $W = e_1,\ldots,e_k$, und mindestens eine der beiden Ecken e_1, e_k hätte einen Grad ≥ 2. Ist dies die Ecke e_1, dann hätte e_1 eine Nachbarecke f, die nicht auf W liegt; denn sonst wäre e_1 außer mit e_2 noch mit einer zweiten Wegecke adjazent, und dann hätte der Baum einen Kreis (nämlich welchen?).

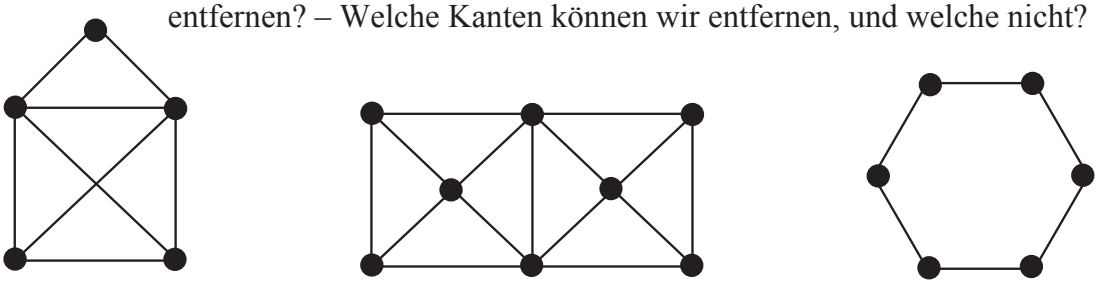


Wenn aber f nicht auf W liegt, dann wäre auch $f, e_1,\ldots,e_k$ ein Weg; und zwar ein längerer als W. Widerspruch zu der Voraussetzung, dass W ein längster Weg ist.

Für die andere Ecke e_k argumentieren wir analog. ■

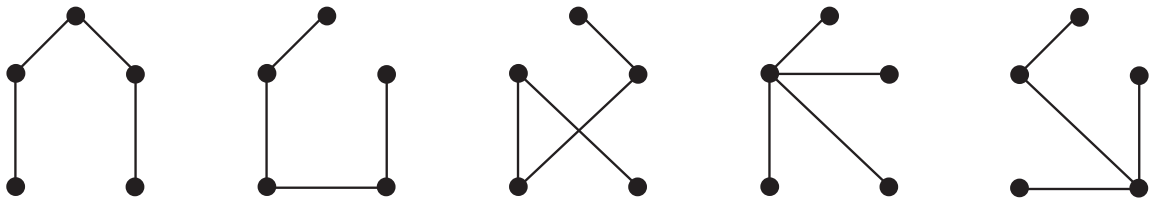
2.2 Spannbäume

ÜBUNG 30 ✻ Wie viele Kanten können wir in den folgenden Graphen jeweils entfernen, ohne dass der Graph ‚auseinander fällt' (d.h. nicht mehr zusammenhängend ist)? Hängt diese Zahl davon ab, *welche* Kanten wir entfernen? – Welche Kanten können wir entfernen, und welche nicht?



5 Ecken	8 Ecken	6 Ecken
⇓	⇓	⇓
4 Kanten sind nötig (4 können gelöscht werden)	7 Kanten sind nötig (8 können gelöscht werden)	5 Kanten sind nötig (1 kann gelöscht werden)

Wir können höchstens so viele Kanten entfernen, dass der Restgraph *minimal zusammenhängend* ist; d.h. er ist ein Baum. In Bäumen ist die Kantenzahl aber gleich der um 1 verminderten Eckenzahl. Die ‚überschüssige' Kantenzahl können wir also entfernen. Welche Kanten können wir *nicht* entfernen? Damit der Graph zusammenhängend bleibt, dürfen wir nie eine Brücke (im Restgraphen) entfernen, jede Nicht-Brücke können wir entfernen. Daher gibt es (in den weitaus meisten Fällen) zahlreiche verschiedenen Möglichkeiten für die Kantenentfernung: So könnten von dem linken Graphen (s. Abb. oben) zum Beispiel die folgenden Restgraphen übrigbleiben:



Dies sind alles *Untergraphen* des ursprünglichen Graphen, und zwar solche, die *alle Ecken enthalten und Bäume sind*. Solche Untergraphen heißen *Spannbäume*.

Definition 10 Spannbaum

Ein Untergraph eines Graphen G, der dieselben Ecken hat wie G und ein Baum ist, heißt *Spannbaum* (oder *Gerüst*) von G.

Natürlich *kann* nur ein zusammenhängender Graph einen Spannbaum haben. *Muss* aber ein zusammenhängender Graph stets einen Spannbaum haben? – Ja, natürlich. Denn in jedem zusammenhängenden Graphen kann man einen Spannbaum sehr leicht auf folgende Weise konstruieren: Man braucht nur Schritt für Schritt alle Kanten zu löschen, die (in dem verbleibenden Restgraphen) zu einem Kreis gehören; sie kann man entfernen, ohne dass der Restgraph auseinander fällt. Wenn es keine solche Kanten mehr gibt, ist der Restgraph notwendigerweise ein Baum (denn er ist immer noch zusammenhängend, enthält aber keinen Kreis mehr). Und da er nach wie vor alle Ecken des Ausgangsgraphen enthält, ist er ein Spannbaum. Welcher (der oft zahlreichen möglichen) Spannbäume bei dieser Löschmethode entsteht, hängt zumeist davon ab, welche Kanten man zuerst löscht.

Formal können wir diesen wirklich sehr einfachen Algorithmus so notieren:

Spannbaum-Algorithmus

{Gegeben ist ein zusammenhängender Graph G.}

Nummeriere die Kanten von 1 bis k (Reihenfolge beliebig).

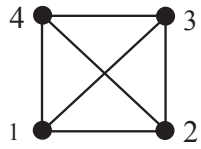
Für $i = 1$ **bis** k **mache folgendes:**

Falls die Kante i im Restgraphen zu einem Kreis gehört, dann lösche sie.

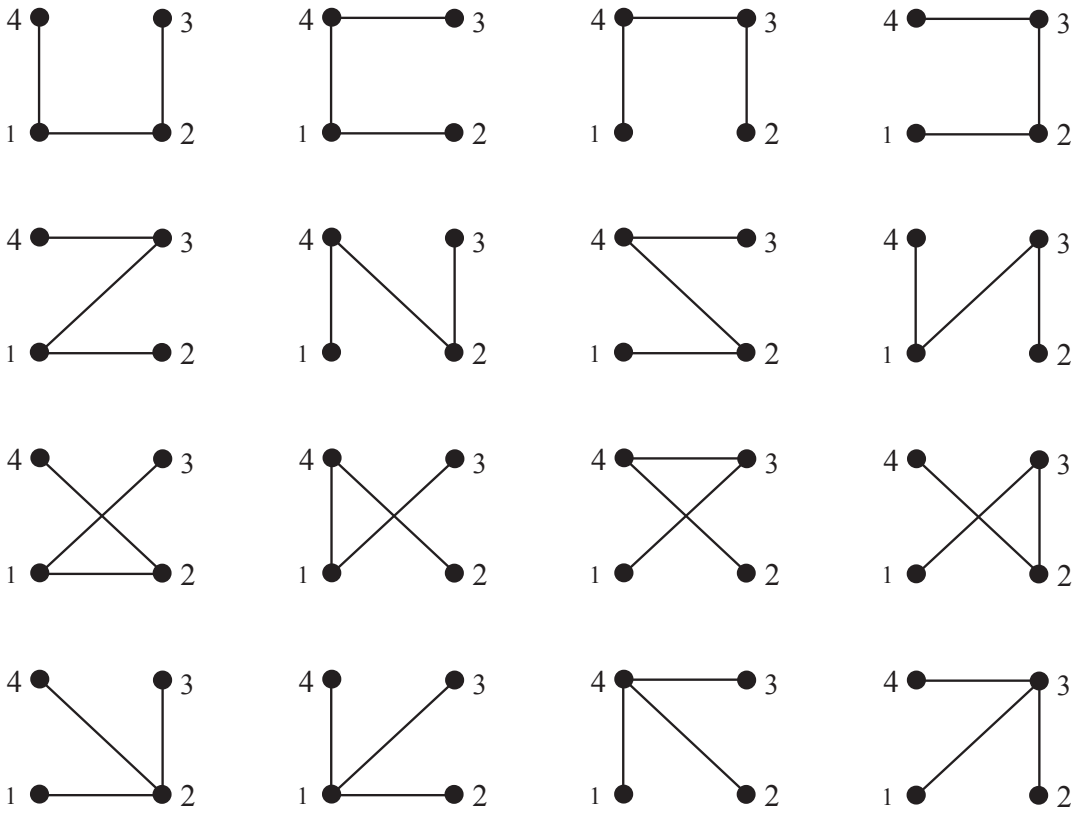
Ende

{Nun bildet der Restgraph einen Spannbaum von G.}

Isomorphe Graphen, deren Ecken für uns ununterscheidbar sind, sind für uns gleich, denn wir können sie nicht voneinander unterscheiden. Wenn wir aber die Ecken unterscheiden können, dann gibt es sehr wohl isomorphe Graphen, die für uns verschieden sind. Das gilt natürlich auch für Spannbäume. Wenn wir zum Beispiel im vollständigen Graphen K_4 die 4 Ecken unterschiedlich nummerieren, so können wir 16 verschiedene Spannbäume unterscheiden (s. Abb.). Denn macht ja sehr wohl einen Unterschied, ob 4 und 1, 1 und 2, sowie *3 und 2* adjazent sind (1. Spannbaum), oder 4 und 1, 1 und 2, sowie *3 und 4* adjazent sind (2. Spannbaum). Beide Spannbäume sind zwar isomorph, aber verschieden.



K^4



Wir sehen, dass es für die 16 verschiedenen Spannbäume des K_4 gibt es nur zwei verschiedene Isomorphieklassen gibt: Die ersten 12 Bäume sind jeweils Wege der Länge 3, sie sind also alle untereinander isomorph. Die letzten 4 Bäume sind jeweils Sterne mit 4 Ecken, also ebenfalls alle isomorph.

Wenn wir die Ecken eines Graphen unterscheidbar machen, indem wir sie einfach durchnummerieren (indizieren), sprechen wir von einem *indizierten* Graphen. (Manche nennen das auch einen *markierten* oder *beschrifteten* Graphen). Da eine Durchnummerierung formal nichts anderes ist als eine Bijektion der Eckenmenge E auf die Menge der ersten n natürlichen Zahlen ($n = |E|$), können wir formal so definieren:

Definition 11 indizierter Graph

Ein *indizierter Graph* ist ein Graph $G = (E, K)$, zusammen mit einer Bijektion $i : E \to \{1, \ldots, |E|\}$. Die Bijektion i heißt *Indizierung* der Eckenmenge E, die Zahl $i(a)$ heißt *Index* der Ecke a.

Zurück zu den Spannbäumen. Welche Graphen haben eigentlich die *meisten* Spannbäume? (Es geht hier stets um verschiedene, wenn auch vielleicht isomorphe Spannbäume; wir betrachten also immer indizierte Graphen.) Hat ein Graph mit n Ecken (der natürlich zusammenhängend sein muss) eher mehr Spannbäume, wenn er viele Kanten hat oder wenn er wenige hat? – Klar: Je mehr Kanten ein Graph hat, desto zahlreicher sind die verschiedenen Möglichkeiten, Kreiskanten zu löschen, um einen Spannbaum herzustellen. Die meisten verschiedenen Spannbäume hat also ein vollständiger Graph. Aber wie viele Spannbäume sind es genau? Können wir sie zählen?

ÜBUNG 31 * Wie viele verschiedene Spannbäume haben die (indizierten) vollständigen Graphen K_2, K_3, K_4? Versuchen Sie, daraus eine Vermutung für eine allgemeine Formel zu entwickeln.

Wie man sich denken kann, ist es zunächst ein ziemlich hoffnungsloses Unterfangen, Gebilde wie Spannbäume zu zählen, die so unterschiedliche Formen haben können. Wie sollen wir sie denn „auf die Reihe bringen“? Denn das steckt ja immer hinter dem Abzählen: etwas auf die Reihe bringen. Beim Zählen bringen Sie die Objekte, die Sie zählen wollen, immer irgendwie mit der Folge der Ordinalzahlen zur Deckung – Stück für Stück, Zahl für Zahl. Beim Zählen machen wir gewissermaßen zwischen den Objekten und den Zahlen „den Reißverschluss zu“.

Wenn man eine ‚unübersichtliche’ endliche Menge abzählen möchte, bietet der folgende *kombinatorische Trick* oft eine gute Hilfe: *Versuche eine übersichtliche Menge zu finden, von der du zeigen kannst, dass es eine Bijektion zwischen ihr und der unübersichtlichen Menge gibt. (Gleichheitsregel)* Wir müssen also jedes Element der

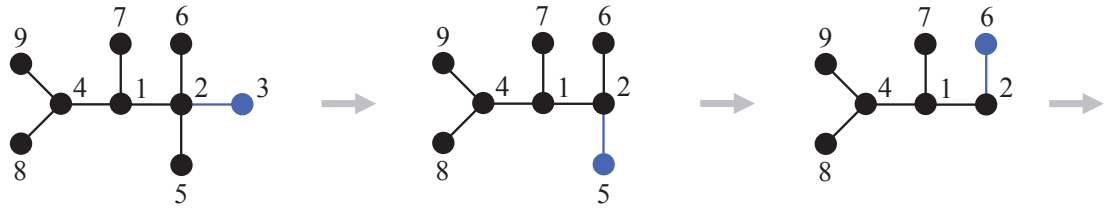
unübersichtlichen Menge mit einem der übersichtlichen Menge ‚verheiraten', so dass auf beiden Seiten ‚alle unter der Haube' sind. Dann wissen wir, dass beide Mengen gleichviele Elemente haben müssen, wir brauchen also nur noch die bequeme Menge abzuzählen, um die Mächtigkeit der unbequemen herauszufinden.

Gleichheitsregel
Gibt es zwischen zwei Mengen A und B eine Bijektion, so sind die Mengen gleichmächtig.

Im Fall der Spannbäume funktioniert das überraschend einfach. Man muss sie nur indizieren. Es ist nämlich möglich, den genauen Aufbau eines Baumes vollständig durch eine einfache Zahlenfolge zu codieren, die aus den Indizes seiner Ecken gebildet wird. Und zwar so, dass jeder Baum durch genau eine solche Zahlenfolge codiert wird, und umgekehrt jede solche Zahlenfolge die Codierung eines Baumes ist. Diese Zahlenfolge heißt nach dem Erfinder der Methode *Prüfer-Code*[1].

Die Idee besteht darin, die Endecken des Baumes Schritt für Schritt zu entfernen und sich zu merken, an welchen Nachbarecken sie jeweils gehangen haben. Der Baum wird dabei so weit abgebaut, bis er nur noch aus einer Kante mit zwei Ecken besteht. Damit der Vorgang rekonstruierbar wird, muss man nur eine Regel festlegen, die eindeutig angibt, welche Endecke in dem jeweiligen Schritt entfernt werden soll. Wir können z.B. festlegen: Entfernt wird stets diejenige noch vorhandene Endecke, die den kleinsten Index hat.

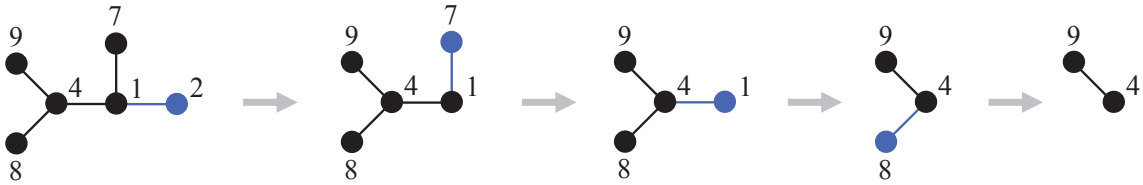
Als Beispiel konstruieren wir den Prüfer-Code für den folgenden Baum mit 9 Ecken:



Die Endecke mit dem kleinsten Index ist 3. Sie wird entfernt, und wir merken uns ihren Nachbarn: **2**

Im Restbaum ist die Endecke mit kleinstem Index nun 5. Sie wird entfernt und ihr Nachbar 2 zum Code hinzugefügt: **2,2**

Minimale Endecke im Restbaum ist nun 6; diese entfernen und ihren Nachbarn 2 an den Code anhängen: **2,2,2**



Code: **2,2,2,1** **2,2,2,1,1** **2,2,2,1,1,4** **2,2,2,1,1,4,4** **fertig**

[1] Prüfer, H. (1918). Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. Arch.Math.Phys. **27**, 742-744.

Um den Überblick zu behalten, notieren wir in einer Tabelle sowohl die entfernten Endecken als auch deren jeweils zugehörige Nachbarecke. Die Folge dieser Nachbarecken bildet den eigentlichen Prüfer-Code des Baumes.

entfernte Endecke	3	5	6	2	7	1	8
zugehörige Nachbarecke	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**4**	**4**

Prüfer-Code

Wir durchschauen das Geheimnis des Prüfer-Codes am besten, wenn wir uns folgende Tatsachen klarmachen:

1. In dieser Tabelle repräsentiert jedes Zahlenpaar eine Kante des Baumes (hier z.B. $\{3,2\}$, $\{5,2\}$, $\{6,2\}$, $\{2,1\}$ usw.). Denn jedes Zahlenpaar wird aus einer entfernten Endecke und ihrer (einzigen) Nachbarecke gebildet, also aus zwei adjazenten Ecken.
2. Ein Baum mit n Ecken hat stets $n-1$ Kanten. Wenn wir diese Kanten alle kennen, können wir den Baum genau rekonstruieren. Der Prüfer-Code enthält aber nur $n-2$ Zahlen; die Tabelle enthält also die Information über nur $n-2$ Kanten. Fehlt da nicht eine? Schon, doch diese fehlende Kante ist in den $n-2$ Tabelleneinträgen bereits versteckt enthalten, wir können ihre beiden Ecken daraus erschließen: Eine von diesen Ecken muss nämlich diejenige sein, die wir im letzten Schritt in den Code aufgenommen haben (hier: 4). Denn da wir in diesem letzten Schritt eine mit ihr adjazente Endecke (hier: 8) entfernt haben, muss sie selbst (also die zuletzt in den Code aufgenommene) zuletzt noch übrig sein. Die andere der beiden übriggebliebenen Ecken muss diejenige sein, die in der ganzen Tabelle nicht vorkommt, also weder als entfernte Endecke noch als zugehörige Nachbarecke (hier: 9).
3. Wenn wir aus dem Prüfer-Code den ursprünglichen Baum rekonstruieren wollen, dann brauchen wir nur die Tabelle zu rekonstruieren, die ja die gesamte Information über alle Kanten des Baumes enthält. Es reicht also, aus dem Prüfer-Code (=Zeile der zugehörigen Nachbarecken) die Zeile der entfernten Endecken zu rekonstruieren. Das geht aber leicht, wenn wir uns an unsere Regel erinnern, in jedem Schritt unter allen Endecken stets die mit minimalem Index zu entfernen. Dann ist klar: In jedem Schritt erhalten wir zu der angegebenen Codezahl die zugehörige entfernte Endecke, indem wir den kleinsten Index (die ‚kleinste Ecke') wählen, die weder im Restcode noch unter den bereits rekonstruierten Endecken vorkommt (s. nächste Tabelle). Diese muss es immer geben, denn die Anzahl der bereits rekonstruierten Endecken plus die Anzahl der Zahlen im Restcode ist in jedem Schritt gleich $n-2$. D.h. es muss unter den insgesamt n Ecken stets mindestens 2 Ecken geben, die weder im Restcode noch unter den bereits rekonstruierten Endecken vorkommen, und die kleinere davon muss die entfernte Endecke sein, die wir suchen.

4. Konkretes Beispiel (Tabelle unten): Wie kommen wir bei den rekonstruierten Endecken auf die 2? Hier ist der Restcode 1,1,4,4 und die bereits rekonstruierten Endecken sind 3,5,6. Die kleinste Zahl, die nicht darin enthalten ist, ist 2. Daher können wir schließen, dass beim Herstellen des Prüfer-Codes an dieser Stelle die 2 die kleinste Endecke des Restbaums gewesen sein muss und 1 deren Nachbar, den wir daher an den Code angehängt haben.

Rekonstruktion des Baumes aus dem Prüfer-Code:

(das erschlossene übrige Eckenpaar)

Restcode

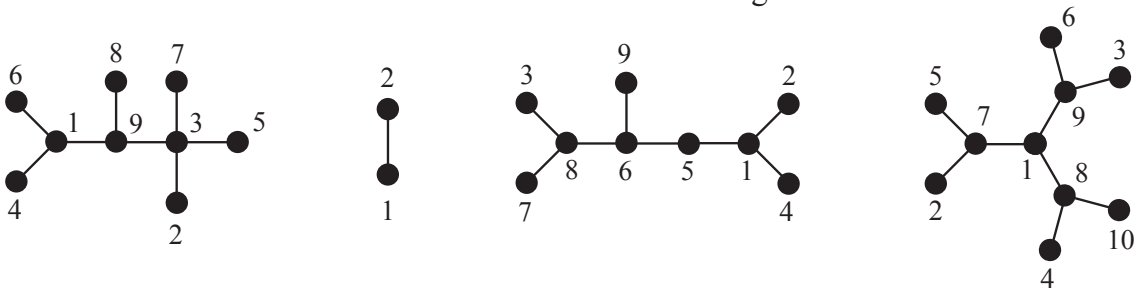
Prüfer-Code

notierte Nachbarecke	**2**	**2**	**2**	**1**	**1**	**4**	**4**	*(4)*
rekonstruierte Endecke	3	5	6	2	7	1	8	*(9)*

bereits rekonstruierte Endecken

kleinster Index, der weder im Restcode noch unter den bereits rekonstruierten Endecken vorkommt

ÜBUNG 32 Konstruieren Sie die Prüfer-Codes der folgenden indizierten Bäume.



Sind diese Tupel: $(1,1,1,1,1)$, $(1,8,1,8,1,8)$, $(1,9,3,1,5)$, $(1,7,3,1,5)$, $(1,2,3,4,\ldots,99,100)$ Prüfer-Codes? Konstruieren Sie ggf. die zugehörigen Bäume. Ist auch das leere Tupel ( ) Prüfer-Code eines Baumes?

Wir formulieren die Konstruktionsmethode des Prüfer-Codes noch einmal präzise:

Prüfer-Code-Algorithmus

{Gegeben ist ein indizierter Baum B mit mindestens zwei Ecken.}

$C := (\ )$ {zu Beginn ist der Code C das leere Tupel}

Solange Eckenzahl von $B > 2$ **mache folgendes:**

Entferne in B die Endecke mit minimalem Index.

Erweitere C um den Index des Nachbarn der entfernten Ecke.

Ende

{Nun ist C der Prüfer-Code des ursprünglichen Baumes; B hat nur noch zwei Ecken.}

Erinnern Sie sich, warum wir uns mit indizierten Bäumen und dem Prüfer-Code beschäftigen? Wir wollen herausfinden, wie viele verschiedene Spannbäume der vollständige Graph K_n hat. Und weil die Menge dieser Spannbäume uns zu unübersichtlich zum direkten Abzählen ist, haben wir nach einer anderen, übersichtlichen (d.h. leicht abzählbaren) Menge gesucht, auf die die Menge der Spannbäume bijektiv abbildbar ist. Nach der Gleichheitsregel würden wir dann nämlich wissen, dass beide Mengen gleich viele Elemente haben müssen. Haben wir diese übersichtliche Menge nun gefunden? In der Tat. Machen wir uns noch einmal klar, was wir jetzt wissen:

Der Prüfer-Code-Algorithmus konstruiert zu jedem indizierten Baum mit $n \geq 2$ Ecken auf eindeutige Weise ein $(n-2)$-Tupel mit Zahlen aus der Menge $\{1,2,\ldots,n\}$. Dieses Tupel ist der sogenannte Prüfer-Code dieses Baumes. „Auf eindeutige Weise" bedeutet: Wenn zwei Personen den Prüfer-Code-Algorithmus auf den selben Baum anwenden, müssen sie immer zu genau demselben Tupel kommen. Das liegt ganz einfach daran, dass (wie bei jedem Algorithmus) in jedem Schritt exakt festgelegt ist, was als nächstes getan werden muss. Es ist in jedem Schritt eindeutig klar, welche Endecke entfernt und um welche Zahl der Code verlängert werden muss. Daher wissen wir: *Jeder indizierten Baum mit* $n \geq 2$ *Ecken hat als Prüfer-Code genau ein* $(n-2)$*-Tupel über* $\{1,2,\ldots,n\}$.

Damit die Zuordnung *indizierter Baum* $\rightarrow$ *Prüfer-Code* tatsächlich *bijektiv* ist, muss aber noch mehr gelten. Die Eindeutigkeit muss auch umgekehrt bestehen: Zu jedem beliebigen $(n-2)$-Tupel über $\{1,2,\ldots,n\}$ muss es genau einen indizierten Baum geben, dessen Prüfer-Code dieses Tupel ist. Dass bei dem oben bechriebenen Rekonstruktionsverfahren bei jedem Code niemals zwei unterschiedliche Bäume herauskommen können, ist klar. Denn auch hier ist ja in jedem Schritt eindeutig festgelegt, was getan werden muss, wie die gesuchte Endecke also jeweils rekonstruiert werden muss; jede(r) muss hier in jedem Schritt zum selben Ergebnis kommen. Und wie wir bereits oben überlegt haben (Bemerkung 3), ist unsere Wahl der „kleinsten Ecke, die weder im Restcode noch unter den bereits rekonstruierten Endecken vorkommt" stets möglich. Dabei haben wir keinerlei Voraussetzungen gemacht, wie der Code im einzelnen aussieht. Das Verfahren funktioniert für alle $(n-2)$-Tupel über $\{1,2,\ldots,n\}$. Mit anderen Worten: *Zu jedem* $(n-2)$*-Tupel über* $\{1,2,\ldots,n\}$ *gibt es genau einen indizierten Baum mit* $n \geq 2$ *Ecken, der das Tupel als Prüfer-Code hat.*

Damit haben wir also gezeigt:

Satz 15 (Prüfer 1918)

Der Prüfer-Code definiert eine Bijektion zwischen der Menge der indizierten Bäume mit $n \geq 2$ Ecken und der Menge der $(n-2)$-Tupel über $\{1,2,\ldots,n\}$.

Da die Anzahl der $(n-2)$-Tupel über $\{1,2,\ldots,n\}$ bekanntlich gleich n^{n-2} ist, können wir nach der Gleichheitsregel aus dem Satz von Prüfer sofort folgern:

Satz 16 (Cayley 1889)

Der vollständige Graph K^n hat n^{n-2} verschiedene Spannbäume (für $n \geq 2$).

Der K^1 hat nur sich selbst als Spannbaum. Ein Blick auf die Jahreszahlen der beiden Sätze zeigt, dass Caley seinen Satz nicht mit Hilfe von Prüfer-Codes bewiesen haben kann. Die einfache und elegante Idee von Prüfer stand zu seiner Zeit noch nicht zur Verfügung. – Wir können Cayleys Satz auch in der folgenden Form ausdrücken:

Satz 17 Folgerung aus dem Satz von Cayley

Es gibt n^{n-2} verschiedene Bäume mit *n* vorgegebenen (unterscheidbaren) Ecken.

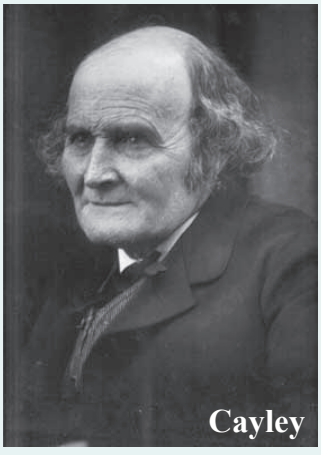
Wenn wir z.B. Computer mit *möglichst wenig Kabeln* miteinander vernetzen wollen (Local Area Network, LAN), müssen wir das so tun, dass zwar alle Geräte zusammenhängen, aber ohne Kreise im Netz (in der Verkabelungsstruktur). Denn in einem Kreis könnten wir immer noch ein beliebiges einzelnes Kabel entfernen, ohne Computer voneinander zu trennen. Das Netz muss also ein Baum sein. Mit dem Satz von Cayley wissen wir nun, dass es z.B. bei 5 Computern $5^{5-2} = 5^3 = 125$ verschiedene Vernetzungsmöglichkeiten mit minimaler Kabelanzahl gibt.

Caleys Satz gilt nur, wenn wir die Ecken (wie die Computer im Beispiel) tatsächlich unterscheiden können. Zwei isomorphe Graphen haben exakt dieselbe Struktur; wir können sie allenfalls dann noch unterscheiden, wenn im einen Graphen nicht dieselben Ecken verbunden sind wie im anderen. Dazu müssen aber die Ecken selbst unterscheidbar sein. *Indizieren* der Ecken ist einfach *„Unterscheidbarmachen“*.

ÜBUNG 33 Manche Ecken eines Baumes tauchen in seinem Prüfer-Code mehrmals auf, manche gar nicht. Womit hängt das zusammen? (Beweis)

Arthur Cayley (1821–1895), englischer Mathematiker; war im ‚Brotberuf' zunächst Anwalt und finanzierte so seine intensiven mathematischen Forschungen, bis er (nach der Veröffentlichung von rund 250 mathematischen Aufsätzen!) in Cambridge endlich einen Lehrstuhl für Mathematik erhielt. Als Anwalt hatte er natürlich besser verdient. Cayley führte den Begriff der abstrakten Gruppe ein. Seine Forschung erstreckte sich außerdem auf algebraische Gleichungen (auch in der Algebra gibt es einen *Satz von Cayley*), Matrizen, Determinanten und Quaternionen. Gemeinsam mit *James Joseph Sylvester* begründete er die Invariantentheorie.

Sein graphentheoretischer Satz zeigt Cayleys starkes Interesse an der Lösung aktueller wissenschaftlicher Probleme seiner Zeit durch Mathematik.


Cayley

2.3 Minimale Spannbäume

Stellen Sie sich vor, Sie wollten Geräte miteinander vernetzen. Sicher wäre es möglich, jedes Gerät mit jedem anderen zu verbinden. Dies wäre auch eine besonders sichere Vernetzung, denn bei Ausfall einer Leitung (oder auch mehrerer) bliebe das Netz intakt, zumindest so lange wie die unterbrochenen Leitungen durch andere überbrückt werden können. Graphentheoretisch bedeutet ‚Vernetzung', dass der Graph der Geräteverbindungen zusammenhängend ist. In einem vollständigen Graphen kann man viele Kanten löschen, ohne dass der Graph auseinander fällt (in verschiedene Komponenten zerfällt).

ÜBUNG 34 * Wie viele Kanten kann man im vollständigen Graphen K^n maximal löschen, ohne dass der Graph auseinanderfällt?

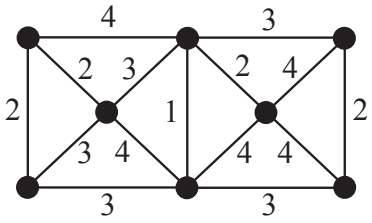
Eine vollständige Vernetzung (‚jeder mit jedem') ist zwar besonders sicher, aber auch besonders teuer. Will man die Kosten minimieren, so wird man nur die Verbindungen herstellen, die unbedingt notwendig sind. Man wird also so vernetzen, dass der Graph der Verbindungen minimal zusammenhängend, also ein Baum ist. Bei n Geräten sind mithin immer $n-1$ Verbindungen (Gerät zu Gerät) erforderlich. Wenn man sparen möchte, ist aber nicht die bloße Zahl der notwendigen Verbindungen interessant, denn es wird in der Regel teuere Verbindungen und billigere geben – etwa weil der Abstand zwischen den einzelnen Geräten unterschiedlich ist, oder auch weil einige Verbindungen höheren Arbeitsaufwand erfordern als andere.

Um diese Situation adäquat zu modellieren, müssen wir also zusätzlich zu den Ecken und Kanten noch die Kosten der einzelnen Kanten in unser Modell aufnehmen; wir ordnen also jeder Kante eine nichtnegative reelle Zahl zu. (Es hat sich eingebürgert diese Zahl nicht als Kosten zu bezeichnen, sondern als das *Gewicht* der Kante. Ebenso könnten wir auch von der Länge oder dem Wert der Kante sprechen.) Ein solcher Graph, in dem jeder Kante ein Gewicht zugeordnet ist, heißt *gewichteter Graph*.

Stellen wir die Geräte als Ecken und die möglichen Verbindungen als *gewichtete Kanten* dar (so nennen wir Kanten mit ihren Gewichten), so besteht das Problem einer möglichst billigen Vernetzung offenbar darin, in diesem gewichteten Graphen einen Spannbaum zu finden, bei dem die *Summe der Kantengewichte minimal* ist. Mit anderen Worten: Wir suchen einen *minimalen Spannbaum*.

Ein solches baumförmiges Netzwerk ist besonders störanfällig, weil es schon bei Unterbrechung einer einzigen Verbindung auseinander fällt. Wichtige Netze wie die der Energieversorgung dürfen daher niemals baumförmig sein. Sie müssen vielmehr aus Sicherheitsgründen *redundant* aufgebaut sein (d.h. mit zusätzlichen Kanten, die den Graphen mehrfach zusammenhängend machen). Da diese Redundanz Geld kostet, ergibt sich hier automatisch ein Interessenkonflikt zwischen den Energieversorgern (die die Kosten senken wollen) und den Stromkunden (die ein sicheres Netz wollen).

ÜBUNG 35 * Konstruieren Sie im folgenden gewichteten Graphen einen minimalen Spannbaum. Gibt es evtl. mehrere?



Definition 12 gewichteter Graph, minimaler Spannbaum

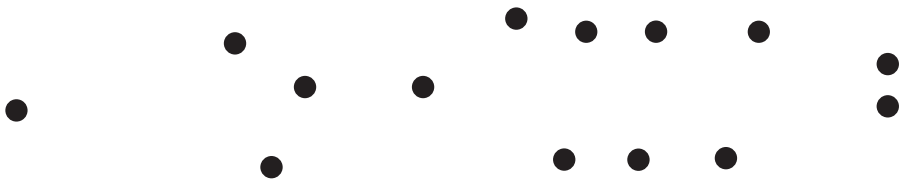
(1) Ein *gewichteter Graph* ist ein Graph $G=(E,K)$ zusammen mit einer *Gewichtsfunktion* $w: K \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, die jeder Kante $k \in K$ eine nichtnegative reelle Zahl $w(k)$ (*Gewicht* von k) zuordnet.

(2) Das *Gesamtgewicht* eines gewichteten Graphen ist die Summe der Gewichte seiner Kanten.

(3) Ein *minimaler Spannbaum* eines gewichteten Graphen ist ein Spannbaum mit minimalem Gesamtgewicht. (D.h. es gibt keinen Spannbaum mit geringerem Gesamtgewicht.)

ÜBUNG 36 Hat jeder gewichtete Graph einen minimalen Spannbaum? Ist ein minimaler Spannbaum, wenn er existiert, eindeutig bestimmt? Sind alle minimalen Spannbäume eines gewichteten Graphen isomorph?

ÜBUNG 37 * Verbinden Sie in der folgenden Abbildung die Punkte so, dass ein zusammenhängender Graph entsteht und die Gesamtlänge der Verbindungen möglichst klein ist. Entwerfen Sie ein allgemeines Verfahren (rechtfertigen Sie Ihr Verfahren, erörtern Sie offene Fragen).



Vermutlich sind Sie inzwischen darauf gekommen, dass man stets die *kürzeste (bzw. leichteste* oder *billigste) Kante* wählen sollte. Sie können zum Beispiel so vorgehen: Sie starten bei irgendeiner Ecke, verbinden diese mit ihrer nächstliegenden Nachbarecke und fügen dann in jedem weiteren Schritt immer diejenige kürzeste Kante hinzu, die eine bereits gewählte Ecke mit einer noch nicht gewählten verbindet. Und zwar so lange, bis jede jetzt noch übrige (noch nicht gewählte) Kante mit den bereits gewähl-

ten einen Kreis erzeugen würde. Dann können Sie stoppen, denn dann bilden die gewählten Kanten einen Baum, und zwar einen mit allen Ecken, also einen Spannbaum. Dass es wirklich ein *minimaler* ist, müssen wir noch begründen. – Diese Methode ist zuerst von Robert C. Prim (1957) [1] in einer Publikation beschrieben worden. Man nennt sie daher den *Algorithmus von Prim* (er wird aber wohl nicht der erste gewesen sein, der diese Idee hatte).

Eine andere einfache Methode ist der von Prim sehr ähnlich: Hier legen Sie keinen Wert darauf, dass die Kante, die Sie wählen, mit den bereits gewählten zusammenhängt. Sie wählen einfach in jedem Schritt die kürzeste Kante, die noch möglich ist, die also keinen Kreis mit den bereits gewählten Kanten erzeugt. Dies ist der *Algorithmus von Kruskal* (J.R. Kruskal, 1956) [2].

Die Algorithmen von Prim und Kruskal können wir anschaulich gut formulieren, wenn wir uns vorstellen, dass wir den gesuchten minimalen Spannbaum durch Färben von Ecken und Kanten konstruieren. Die bereits gefärbten Ecken und Kanten bilden in dem gegebenen gewichteten Graphen in jedem Stadium der Konstruktion einen *gefärbten Untergraphen*, der im Endstadium ein minimaler Spannbaum ist.

Der *Algorithmus von Prim* startet mit einem Baum, der zunächst nur aus einer Ecke besteht und zu einem minimalen Spannbaum heranwächst, indem man Schritt für Schritt eine bereits bestehende (gefärbte) Ecke über eine neue Kante mit einer neuen Ecke verbindet (indem man die neue Kante und die neue Ecke ebenfalls färbt).

Algorithmus von Prim

{Gegeben ist ein gewichteter Graph *G*.}

Färbe eine beliebige Ecke.

Solange es noch mindestens eine ungefärbte Kante gibt, bei deren Färbung kein Kreis aus lauter gefärbten Kanten entstehen würde, **mache folgendes:**

> Wähle unter diesen ungefärbten Kanten eine kürzeste Kante und färbe sie (sowie ihre noch nicht gefärbte Ecke).

Ende

{Nun bildet der gefärbte Untergraph einen minimalen Spannbaum von *G*.}

Der *Algorithmus von Kruskal* startet dagegen mit einem Wald, der zunächst nur aus den (gefärbten) Ecken des Ausgangsgraphen besteht, aber noch keine Kanten enthält (jede der Ecken bildet also eine eigene Komponente). Dieser Wald wird durch Hinzufügen (Färben) von Kanten erweitert, und zwar ausschließlich solchen Kanten, die

[1] R.C. Prim (1957): Shortest connection networks and some generalizations, *Bell System Technical Journal*, **36**.

[2] J.R. Kruskal Jr.(1956): On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem, *Proceedings AMS*, **7**, 1.

zwei Komponenten miteinander verbinden, wobei in jedem Schritt seine Komponentenzahl um 1 abnimmt, bis der Wald schließlich nur noch eine Komponente hat und damit ein (Spann-)Baum ist.

Algorithmus von Kruskal

{Gegeben ist ein gewichteter Graph G.}

Färbe alle Ecken.

Solange der bereits gefärbte Untergraph noch mehr als eine Komponente hat, **mache folgendes:**

> Wähle unter den Kanten, die zwei verschiedene Komponenten des gefärbten Untergraphen verbinden, eine kürzeste Kante und färbe sie.

Ende

{Nun bildet der gefärbte Untergraph einen minimalen Spannbaum von G.}

Beide Verfahren wenden die einfachste Strategie an, die man sich denken kann – man nennt sie sehr anschaulich die *gierige Strategie (Greedy-Strategie)*:

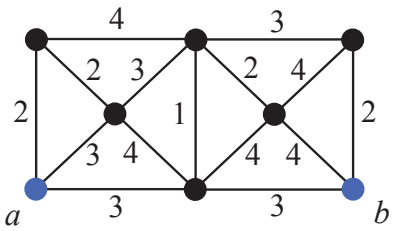
Greedy-Strategie

Wähle einfach immer das Beste von dem, was noch übrig und möglich ist.

Sollten Sie verblüfft darüber sein, dass die gierige Strategie hier tatsächlich etwas bringt, dann haben Sie wirklich Durchblick. Denn im allgemeinen ist Gier nicht nur eine sozial geächtete Haltung, sondern wirklich fast immer auch eine ‚suboptimale' Strategie zum Lösen von Problemen. (Wer auf die Greedy-Strategie verzichtet, hat daher zumeist doppelten Gewinn: einen sozialen und – dennoch – einen materiellen).

Überprüfen Sie zum Vergleich, ob die Greedy-Strategie auch beim Problem des kürzesten Weges und beim Rucksackproblem erfolgreich ist:

ÜBUNG 38 ✻ *Problem des kürzesten Weges:* In dem abgebildeten Graphen soll ein kürzester (minimaler) Weg von a nach b konstruiert werden. Welcher Weg würde sich bei Befolgung einer strengen Greedy-Strategie ergeben? Wie gut ist die Greedy-Strategie hier?

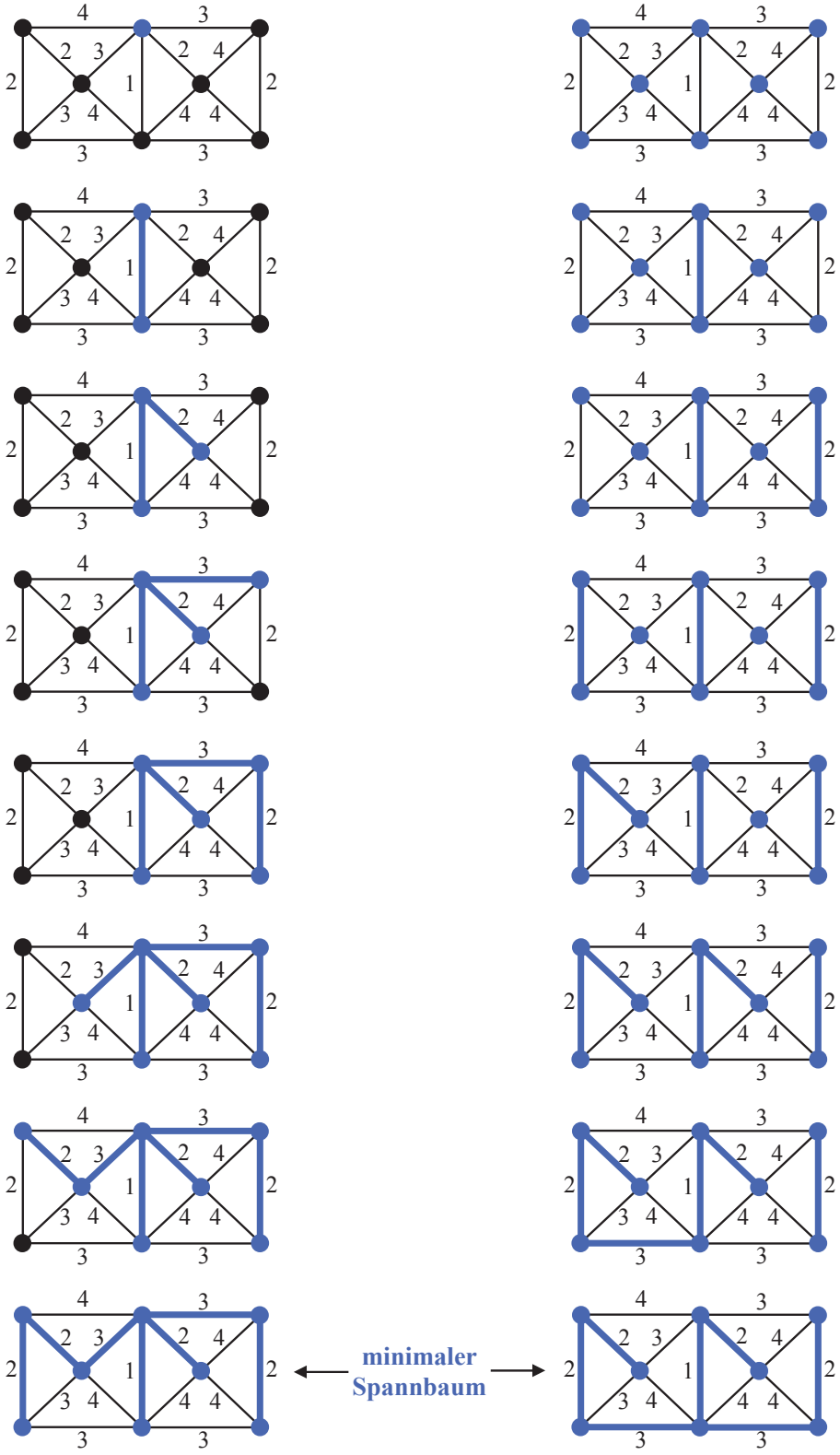


Algorithmus von Prim

Ein Baum (mit zunächst nur einer Ecke) wächst zu einem **minimalen Spannbaum** heran.

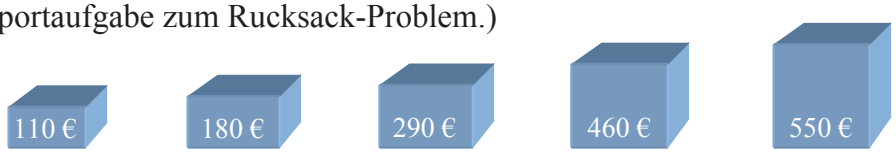
Algorithmus von Kruskal

Ein Wald (mit allen Ecken von G und zunächst ohne Kanten) wächst zu einem **minimalen Spannbaum** zusammen.



ÜBUNG 39 ✻

Rucksack-Problem: Bei einer Fernsehshow dürfen Sie Gegenstände mit verschiedenem Wert und Gewicht in einen Rucksack packen, wobei das Höchstgewicht von 20 kg nicht überschritten werden darf, weil der Rucksack sonst reißt. Natürlich wollen Sie einen möglichst hohen Gesamtwert einpacken. Welche Gegenstände würde man bei Befolgung einer strengen Greedy-Strategie einpacken? Wie gut ist die Greedy-Strategie hier? (Entwerfen Sie eine anspruchsvolle Denksportaufgabe zum Rucksack-Problem.)



Gewicht:	2 kg	4 kg	7 kg	10 kg	14 kg

Dass zur Konstruktion von minimalen Spannbäumen eine derart simple (ja eigentlich doch ziemlich „platte“) Strategie wie die Greedy-Strategie wirklich erfolgreich sein kann, erweist sich bei genauerer Betrachtung als gar nicht so verwunderlich. Das liegt nämlich einfach daran, dass es auch eine ziemlich simple Eigenschaft ist, die Spannbäume zu minimalen macht:

Eigenschaft minimaler Spannbäume

Ein Spannbaum ist genau dann minimal, wenn er für jede beliebige Zerlegung der Eckenmenge E in zwei nichtleere Teilmengen A und B (also $E = A \oplus B$) stets eine kürzeste der Kanten zwischen einer A-Ecke und einer B-Ecke enthält.

Wir wollen diese Eigenschaft hier nicht beweisen, aber wir werden sie beim folgenden Beweis für die Korrektheit des Prim-Algorithmus als Leitidee nehmen und nachweisen, dass Prim genau diese Eigenschaft bei seiner Konstruktion des Spannbaumes verwirklicht, und dass aus ihr die Minimalität folgt.

Satz 18 (Prim 1957)

Der Algorithmus von Prim ist korrekt (d.h. er erzeugt einen minimalen Spannbaum).

Beweis

Dass der Algorithmus von Prim einen *Baum* konstruiert, ist klar. Denn wir fügen in jedem Schritt nur eine Kante hinzu, die die *Bedingung* erfüllt, *mit den bereits gewählten Kanten zusammenzuhängen und keinen Kreis mit ihnen zu bilden*. Hier bleiben aber noch zwei Fragen offen:

(1) Könnte nicht der Fall eintreten, dass wir in eine *Sackgasse* geraten? Dass wir nämlich keine Kante mehr finden, die der Bedingung entspricht, obwohl der Baum *noch nicht alle Ecken* des Ausgangsgraphen enthält? Dann hätten wir zu Ende des Algorithmus zwar einen Baum, aber keinen *Spann*baum konstruiert.

(2) Und wenn der Algorithmus wirklich immer einen Spannbaum konstruiert, muss es wirklich in jedem Fall ein *minimaler* sein?

Wir können diese Zweifel ausräumen, indem wir folgendes zeigen: Der Baum, den der Algorithmus von Prim konstruiert, ist nach jedem Konstruktionsschritt zu einem *minimalen Spannbaum erweiterbar* (und nach dem letzten Schritt selbst ein solcher).

Diesen Beweis führen wir induktiv (nach den Konstruktionsschritten).

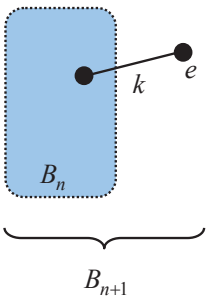
Verankerung: Nach dem 1. Konstruktionsschritt ist die Behauptung erfüllt. (Denn jede Ecke, die wir als Startecke wählen, ist zu einem minimalen Spannbaum erweiterbar, der ja jede Ecke enthalten muss.)

Vererbung (Schluss von n auf $n+1$):

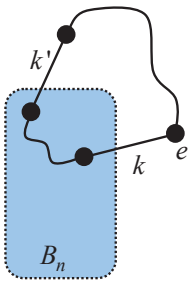
Voraussetzung: Die Behauptung gilt für den *n*-ten Konstruktionsschritt. (D.h. der Baum mit *n* Ecken ist zu einem minimalen Spannbaum erweiterbar.)

Behauptung: Dann gilt die Behauptung auch für den $(n+1)$-ten Konstruktionsschritt. (D.h. dann ist auch der Baum mit $n+1$ Ecken zu einem minimalen Spannbaum erweiterbar.).

Beweis: Nach Voraussetzung kann der Baum B_n (er hat *n* Ecken) zu einem minimalen Spannbaum *S* erweitert werden. Der Algorithmus wählt nun eine neue Kante *k*, die B_n zu einem neuen Baum B_{n+1} erweitert (*k* verbindet eine der *n* Ecken von B_n mit einer neuen, $(n+1)$-ten Ecke *e*). Die Kante *k* wird dabei so gewählt, dass sie unter allen den Baum B_n erweiternden (und keinen Kreis erzeugenden) Kanten minimales Gewicht hat. Wir müssen zeigen, dass auch der neue Baum B_{n+1} zu einem minimalen Spannbaum erweiterbar ist.



1. Fall Die neue Kante *k* ist ebenfalls (wie die Kanten von B_n) in *S* enthalten. Damit sind alle Kanten von B_{n+1} auch Kanten des minimalen Spannbaums *S*, d.h. auch B_{n+1} lässt sich zu einem minimalen Spannbaum (nämlich *S*) erweitern.



2. Fall Die neue Kante *k* ist (anders als die Kanten von B_n) *nicht* in dem minimalen Spannbaum *S* enthalten (die neue Ecke *e* muss natürlich in jedem Spannbaum enthalten sein). In diesem Fall muss ein Kreis entstehen, wenn wir *S* um *k* erweitern (in diesem Kreis gehören alle Kanten außer *k* zu *S*). Da nicht alle Ecken des Kreises in B_n liegen (zumindest *e* nicht), muss er außer *k* mindestens eine weitere Kante k' enthalten, die B_n erweitert.

Nach unserer Wahl kann k kein höheres Gewicht als k' haben. – Wir können jetzt mit einem einfachen Trick aus S einen neuen minimalen Spannbaum S' herstellen, der eine Erweiterung von B_{n+1} ist: S' entsteht aus S dadurch, dass wir die Kante k' löschen und dafür die Kante k einfügen. S' ist dann offenbar ebenfalls kreislos und zusammenhängend und hat dieselben Ecken wie S; S' ist also ebenfalls ein *Spannbaum*. Da die Kante k kein höheres Gewicht hat als k', muss S' auch ein *minimaler* Spannbaum sein. (Wir erkennen hier nebenbei, dass die beiden Kanten k und k' offenbar gleiches Gewicht haben müssen.) Da jede Kante von B_{n+1} auch Kante von S' ist, kann B_{n+1} zu dem minimalen Spannbaum S' erweitert werden. ■

Die Korrektheit des Kruskal-Algorithmus lässt sich im Prinzip ebenso zeigen, wir verzichten daher hier auf den Beweis.

Satz 19 (Kruskal 1956)

Der Algorithmus von Kruskal ist korrekt (d.h. er erzeugt einen minimalen Spannbaum).

2.4 Alkane – Graphentheorie und Chemie

Mit dem, was wir in der Graphentheorie heute als Bäume bezeichnen, hat man sich zuerst in der Chemie beschäftigt: Anlass war die Kohlenwasserstoff-Chemie, die in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts ihren großen Aufschwung nahm.

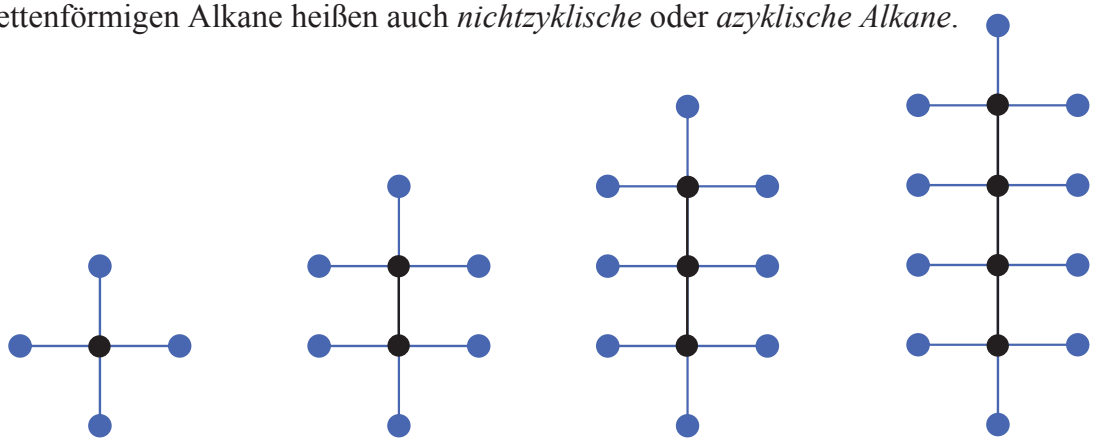
Die einfachste und doch zugleich vielfältigste Molekülklasse der organischen Chemie bilden die *Kohlenwasserstoffe*. Das sind Moleküle, die aus nur zwei verschiedenen Bausteinen aufgebaut sind, nämlich wie der Name schon sagt aus Kohlenstoff- (C) und Wasserstoffatomen (H). Kohlenstoffatome können miteinander über stabile Einfach- ($C-C$), Doppel- ($C=C$) und Dreifachbindungen ($C\equiv C$) verbunden sein und auf diese Weise stabile lange Ketten bilden, aber auch Ringe und Kombinationen aus beidem. Die große Vielfalt dieser Molekülklasse ist zum einen darin begründet, dass auf diese Weise auch sehr große (und daher sehr viele unterschiedliche) Moleküle gebildet werden können, die trotz ihrer Größe stabil sind; Kohlenstoff ist übrigens das einzige Element, das durch Verbindungen mit sich selbst solche stabilen Ketten bilden kann. Dies ist sozusagen die chemische Begründung. Zum anderen aber, und das ist gewissermaßen die *graphentheoretische Begründung der Vielfalt der Kohlenwasserstoffe*, ergibt diese sich aus der kombinatorischen Komplexität der Graphen, die von Kohlenstoffatomen untereinander gebildet werden können; auch dann, wenn die Moleküle nicht so sehr groß sind. Darum ist das eben auch „unser Thema“.

Wenn man neue Stoffe synthetisiert, möchte man natürlich wissen, wie sie aufgebaut sind. Mit den Methoden der *quantitativen Analyse* kann man verhältnismäßig leicht herausfinden, aus wie vielen Atomen von jeder Sorte das Molekül eines Kohlenwasserstoffes zusammengesetzt ist (*Summenformel*). Aber eigentlich will man mehr wissen: nicht nur, aus *wie vielen* Bausteinen, sondern mit *welcher Struktur* das Molekül daraus aufgebaut ist (*Strukturformel*). Die grundlegende *chemische und graphentheoretische Frage* lautet daher: Wie viele und welche verschiedenen Moleküle sind bei n Kohlenstoff- und k Wasserstoffatomen überhaupt möglich?

ÜBUNG 40 Sie sehen, wie jemand Kohlenwasserstoff-Moleküle zeichnet, aber ausschließlich C's verwendet, keine H's. Was steckt dahinter? Kann man die C's auch noch weglassen?

ÜBUNG 41 Sie haben einen Stoff hergestellt und erfahren durch eine quantitative Analyse, dass jedes Molekül aus 4 Kohlenstoff- und 10 Wasserstoffatomen besteht. Der Stoff hat also die Summenformel C_4H_{10}. Wie könnten die einzelnen Atome in diesem Molekül angeordnet sein? Zeichnen Sie alle möglichen Strukturformeln.

Eine besonders einfach gebaute Unterfamilie der Kohlenwasserstoffe bilden die ***Alkane***. Das sind Kohlenwasserstoffe *ohne Mehrfachbindungen*. Ihre Molekülstruktur ist also immer ein schlichter Graph. Dabei können die Kohlenstoffatome unverzweigte Ketten (*geradkettige Alkane* oder *n-Alkane*) oder verzweigte Ketten (*verzweigte Alkane* oder *Isoalkane*) bilden oder auch Ringe enthalten (*Cykloalkane*). Die kettenförmigen Alkane heißen auch *nichtzyklische* oder *azyklische Alkane*.



Methan CH_4 | Ethan C_2H_6 | Propan C_3H_8 | Butan C_4H_{10}

Die einfachsten n-Alkane (für $n = 1,\ldots,4$)

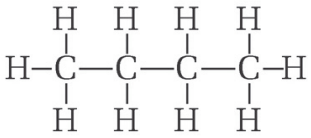
Die Abbildung zeigt die einfachsten unverzweigten Alkane. Solche „Alkan-Bäume" haben nur Ecken vom Grad 1 (H-Atome) und 4 (C-Atome). Beachten Sie: Die graphentheoretische Darstellung von Molekülen zeigt immer nur die *Bindungsstruktur*, nicht jedoch die wahre *Geometrie* der Moleküle, also die relative Lage der Atome im

Raum. Wie in der *Kalottendarstellung* deutlich wird, sind die C-Atome tatsächlich in einer räumlichen „Zickzack-Linie“ angeordnet. Zudem sind Rotationen von Molekül-Teilgruppen um Einfachbindungen möglich (die zu verschiedenen *Konformationen* des Moleküls, aber nicht zu verschiedenen Strukturformeln führen, s.u.). Zur Darstellung der bloßen Bindungsstruktur verwendet man in der Chemie meist die bequemeren „graphentheoretischen“ Darstellungsformen in Form der *Lewis-Strukturformeln* oder der *verkürzten* (oder *kondensierten*) *Strukturformeln*.

Kalottendarstellung



Lewis-Strukturformel



verkürzte Strukturformel

$CH_3CH_2CH_2CH_3$

Verschiedene Molekül-Darstellungsformen am Beispiel des Butan-Moleküls

ÜBUNG 42 Wie viele C-Atome hat das kleinste Alkan, wie viele das kleinste Isoalkan? Die C-Atome der Cycloalkane liegen nicht in einer Ebene, mit einer Ausnahme – welcher?

ÜBUNG 43 Geradkettige Alkane haben stets die Summenformel C_nH_{2n+2}, das ist klar (warum?). Zeigen Sie, dass sie auch für verzweigte Alkane gilt.

Satz 20 Summenformel für kettenförmige Alkane

Nichtzyklische Alkane haben stets die Summenformel

$$C_nH_{2n+2}\ .$$

Nichtzyklische Alkane mit der gleichen Anzahl an C-Atomen haben also stets dieselbe Summenformel, obwohl sie sich natürlich in ihrer Strukturformel unterscheiden können – wobei sie dann auch zwangsläufig unterschiedliche physikalische und chemische Eigenschaften aufweisen. So liegen die Schmelz- und Siedepunkte unverzweigter Alkane zum Beispiel stets höher als die ihrer verzweigten Isomere (vgl. Abb. S. 60).

Allgemein bezeichnet man das Auftreten von Molekülen mit gleicher Summen-, aber unterschiedlicher Strukturformel als *Strukturisomerie* (auch *Stellungsisomerie* oder *Konstitutionsisomerie*). Die Moleküle selbst werden als *Strukturisomere* bezeichnet. (Mit Strukturisomeren darf man die unterschiedlichen Formen eines Moleküls nicht verwechseln, die lediglich dadurch entstehen, dass Teile des Moleküls durch Rotationen um Einfachbindungen ihre Lage im Raum ändern; wodurch die Strukturformel, also der Bindungsgraph des Moleküls ja nicht verändert wird. Solche unterschiedli-

chen Lageformen eines Moleküls im Raum bezeichnet man als verschiedene *Konformationen* des Moleküls. Konformationen haben also stets dieselbe Strukturformel, Strukturisomere dagegen stets verschiedene Strukturformeln.)

Wegen der großen Strukturvielfalt von Kohlenwasserstoffmolekülen ist das folgende Isomerie-Problem und sein Spezialfall für Alkane alles andere als trivial:

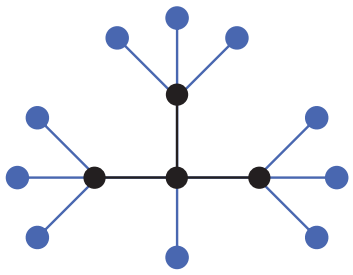
Isomerie-Problem für Kohlenwasserstoffe

Wie viele und welche Strukturisomere sind bei n Kohlenstoff- und k Wasserstoffatomen möglich?

Isoalkan-Problem

Wie viele und welche Strukturisomere sind speziell bei nichtzyklischen Alkanen (C_nH_{2n+2}) möglich?

Wenn die vier Kohlenstoffatome des Butanmoleküls (C_4H_{10}) nicht geradkettig, sondern verzweigt aneinander hängen, dann bilden sie das Molekül des Isobutans. Die Anzahl der H-Atome ändert sich dabei wie oben gezeigt nicht (s.Abb.).



Isobutan C_4H_{10}

Die Zahl der Isomere wächst bei nichtzyklischen Alkanen exponentiell mit der Anzahl n der C-Atome. Die folgende Tabelle gibt einen Eindruck von der Rasanz des Wachstums:

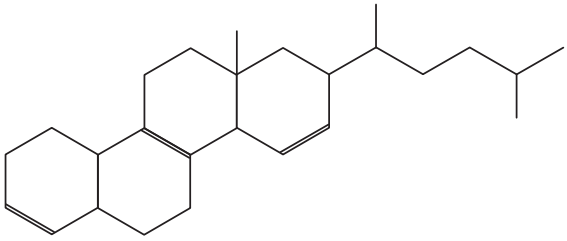
n	1	2	3	4	5	6	7	8	10	15	20
Summenformel	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}	C_5H_{12}	C_6H_{14}	C_7H_{16}	C_8H_{18}	$C_{10}H_{22}$	$C_{15}H_{32}$	$C_{20}H_{42}$
Zahl der Isomere	1	1	1	2	3	5	9	18	75	4.347	366.319

Trainieren Sie im folgenden nochmals eingehend Ihren *graphentheoretischen Blick auf die Chemie*:

ÜBUNG 44 Zeichnen Sie alle Bäume mit 6 Ecken, sämtlich vom Grad ≤ 4. Sodann alle Bäume, die 6 Ecken vom Grad 4 sowie evtl. weitere Ecken vom Grad 1 haben. (Hier sind stets ununterscheidbare Ecken gemeint.) Erläutern Sie den Zusammenhang dieser beiden Baumklassen.

ÜBUNG 45 Wie viele Bäume mit 20 (ununterscheidbaren) Ecken vom Grad ≤ 4 gibt es? (Sie finden die Lösung in der Nähe auf diesen Seiten; erläutern Sie genau den Zusammenhang.)

ÜBUNG 46 Welche Summenformel hat der folgende Kohlenwasserstoff?



ÜBUNG 47 Beweisen Sie den folgenden Satz.

Satz 21 allgemeine Summenformel für Kohlenwasserstoffe

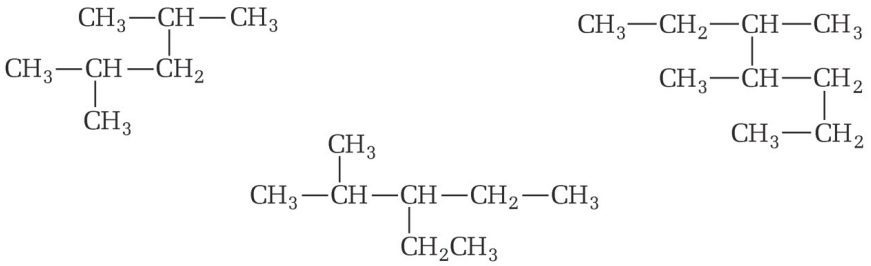
Ein Kohlenwasserstoff mit r Ringen, b Doppel- und c Dreifachbindungen hat stets die Summenformel

$$C_nH_{2n+2-(2r+2b+4c)} \ .$$

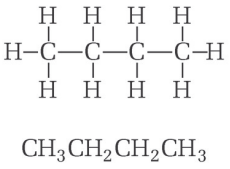
Alkane werden in der Chemie nach einer strengen systematischen Bezeichnungsweise benannt. Da diese viel mathematisch-formales Denken enthält, wollen wir uns abschließend kurz damit beschäftigen. Die Regeln können Sie aus der Abbildung auf der folgenden Seite mit ein wenig detektivischem Scharfsinn leicht erschließen.

Einige Tipps: Eine große Rolle spielt hier immer die *längste gerade Kette* im Molekül. Die geraden Kohlenwasserstoffketten mit 5, 6, 7, 8 … C-Atomen heißen nach den griechischen Zahlwörtern *Pentan*, *Hexan*, *Heptan*, *Oktan* etc. Die Molekül-Bausteine $-CH_3$ und $-C_2H_5$ werden als *Methyl*- bzw. *Ethyl*-Gruppe bezeichnet.

ÜBUNG 48
1. Erschließen Sie die Bezeichnungsregeln für nichtzyklische Alkane aus der Abbildung auf der folgenden Seite.
2. Zeichnen Sie das Molekül des *3-Ethyl-2,4,5-trimethylheptans*.
3. Wie lauten die Bezeichnungen für die drei folgenden Alkane?



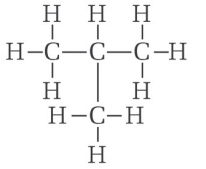




$CH_3CH_2CH_2CH_3$

Butan
Schmelzpunkt −135 °C
Siedepunkt −0,5 °C

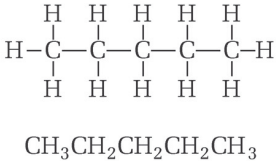




$CH_3—CH(CH_3)—CH_3$

Isobutan (2-Methylpropan)
Schmelzpunkt −145 °C
Siedepunkt −10 °C

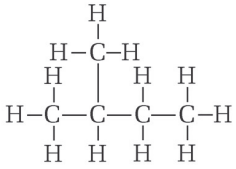


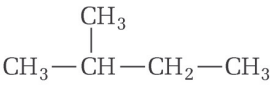


$CH_3CH_2CH_2CH_2CH_3$

Pentan
Schmelzpunkt −130 °C
Siedepunkt +36 °C

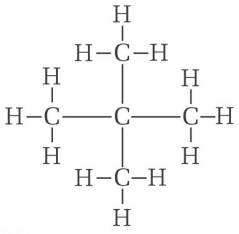


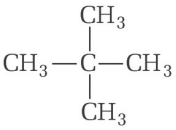




Isopentan (2-Methylbutan)
Schmelzpunkt −160 °C
Siedepunkt +28 °C







Neopentan (2,2-Dimethylpropan)
Schmelzpunkt −20 °C
Siedepunkt +9 °C

Einige nichtzyklische Alkane

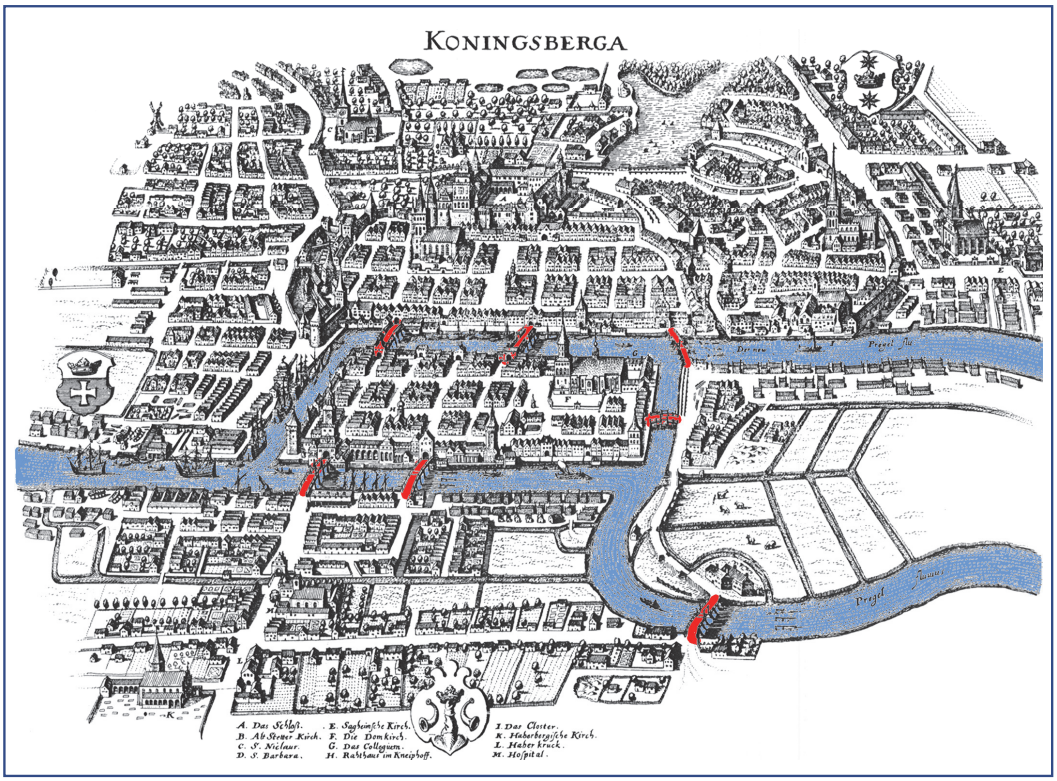
(aus: Brown, LeMay, Burston: Chemie, München: Pearson, 2007)

3 Eulersche Graphen

Eines der berühmtesten Probleme der Graphentheorie ist das *Königsberger Brückenproblem*. Der große Mathematiker Leonard Euler (1707–1783) hat eine Lösung dafür angegeben und dabei gewissermaßen ‚die Graphentheorie erfunden'.

3.1 Das Königsberger Brückenproblem

Das Problem der Königsberger Spaziergänger (1736): Gibt es einen Rundweg, der genau einmal über jede der sieben Brücken des Flusses Pregel führt? (Jede Brücke muss ganz überquert werden.)



Königsberg im 18. Jahrhundert mit den 7 Brücken über den Pregel

ÜBUNG 49 * Übersetzen Sie das Königsberger Brückenproblem in die Sprache der Graphentheorie und lösen Sie es (s. Titelseite).

ÜBUNG 50 Das Problem ist ein Spezialfall eines allgemeinen graphentheoretischen Problems. Formulieren Sie dieses allgemeine Problem und suchen Sie konstruktiv handelnd nach einer Lösung: Zeichnen Sie (zunächst nur) die Ecken eines Graphen, wählen Sie eine als Start- und Zielecke. Zeichnen Sie anschließend Kante für Kante einen Rundweg ein. Beobachten Sie genau, was dabei passiert.

Definition 13 Eulertouren, eulersche (Multi-)Graphen

(1) Eine *Eulertour* ist ein Kantenzug in einem (Multi-)Graphen, der jede Kante des (Multi-)Graphen genau einmal enthält. Eine Eulertour heißt geschlossen bzw. offen, jenachdem ob der Kantenzug geschlossen oder offen ist.

(2) Ein (Multi-)Graph heißt *eulersch*, wenn es in ihm eine geschlossene Eulertour gibt.

Statt ‚geschlossene Eulertour' sagt man oft auch kurz ‚Eulertour' (oder ‚Eulerzyklus', ‚eulerscher Kreis' oder ähnlich). In kantenlosen Graphen gibt stets die ‚leere Eulertour' (die aber natürlich keinen praktischen Sinn hat).


Euler

Leonhard Euler (1707–1783), geboren in Basel, gestorben in Sankt Petersburg, wurde bereits 1727 an die Akademie von St. Petersburg berufen, wo er 1730 Professor für Physik und 1733 Professor für Mathematik wurde. 1741 berief ihn Friedrich II. nach Berlin. 1766 kehrte er an die Petersburger Akademie zurück. Trotz seiner völligen Erblindung 1767 blieb er weiter außerordentlich produktiv.
Euler verfasste rund 900 Arbeiten zur reinen und angewandten Mathematik, zu Astronomie, Physik und Philosophie. Darunter wirkungsmächtige Lehrbücher zur Algebra und zur Analysis. Euler rechnete – lange vor der Entstehung der Vektorrechnung – bereits mit Vektoren. Er entwickelte die Variationsrechnung, die kombinatorische Topologie (eulersche Polyederformel) und lieferte bedeutende Beiträge zu Zahlentheorie, Geometrie, Reihenlehre, Differenzialgleichungen und Differenzialgeometrie.
Für die 16-jährige Friederike von Brandenburg-Schwedt schrieb er die wohl erste populärwissenschaftliche Darstellung der Physik. Er war maßgeblich an der Mathematisierung der Naturwissenschaften beteiligt, stellte die Wellentheorie des Lichtes auf und hinterließ bedeutende Werke zur Mechanik, zur Theorie der Planetenbewegung, zur Theorie des Schiffbaus, zur Strömungslehre sowie – zeittypisch – zur Artillerie.
Für manche mag es heute ein Trost sein, dass dieser wirklich geniale Mathematiker in seinen Beweisen – auch hier zeittypisch – oft wenig Wert auf formale Exaktheit legte und lieber heuristische Methoden anwandte.

ÜBUNG 51 Kann ein nicht-zusammenhängender Graph eine geschlossene Eulertour besitzen?

Euler bewies 1736, dass es in einem zusammenhängen (Multi-)Graphen für die Existenz einer geschlossenen Eulertour notwendig ist, dass alle Ecken gerade sind.[1] Viel später, nämlich erst 1873 bewies Hierholzer, dass dies auch hinreichend ist, dass also zusammenhängende (Multi-)Graphen mit lauter geraden Ecken immer eulersch sind. [2]

ÜBUNG 52 Lesen Sie eingehend die Originaltexte von Euler und Hierholzer im Anhang.

Wir fassen die Resultate von Euler und Hierholzer im folgenden Satz zusammen:

Satz 22 (Euler 1736 , Hierholzer 1873)

(1) Ein (Multi-)Graph hat genau dann eine *geschlossene Eulertour*, wenn er (bis auf isolierte Ecken) zusammenhängend ist und alle Ecken geraden Grad haben.

(2) Ein (Multi-)Graph hat genau dann eine *offene Eulertour*, wenn er (bis auf isolierte Ecken) zusammenhängend ist und genau zwei Ecken ungeraden Grad haben.

Eckengrad bei Schlingen

Wir haben den Begriff *Eckengrad* bislang nur für schlichte Graphen definiert. Für Multigraphen soll der Begriff zwar grundsätzlich analog gelten. Da es aber in Multigraphen auch Schlingen geben kann (Kanten von einer Ecke zur selben Ecke), müssen wir noch ergänzen, wie wir Schlingen beim Eckengrad berücksichtigen.

Wie wir im folgenden Beweis sehen werden, dürfen wir nicht einfach die mit einer Ecke inzidenten Kanten zählen (dann würde eine Schlinge wie jede andere Kante einfach zählen). Vielmehr kommt es auf die Zahl der Ein- und Ausmündungen von Kanten an: Eine Schlinge trägt zum Grad ihrer Ecke demnach stets 2 bei; gezählt werden also stets ‚beide Enden'. Bei Kanten, die verschiedene Ecken verbinden, führt die Zählweise der Ein- und Ausmündungen zum selben Ergebnis wie bisher.

---

[1] L. Euler: Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarium Imperialis Petropolitanae **8** (1736), S. 128–140 (siehe Kap.0).

[2] C. Hierholzer: Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. Mathematische Annalen **6** (1873), S. 30–32 (siehe Kap.0).

Beweis des Satzes von Euler und Hierholzer

Wir beweisen nur Teil (1); der andere Teil ergibt sich daraus unmittelbar. (Wie würden Sie das begründen?)

Der Satz behauptet, dass es für die gewünschte Eigenschaft *(es gibt eine geschlossene Eulertour)* ein äquivalentes Kriterium gibt *(bis auf isolierte Ecken zusammenhängend und nur gerade Ecken)*. Äquivalent ist ein Kriterium dann, wenn es sowohl notwendig als auch hinreichend für die Eigenschaft ist. Wir zeigen zuerst ausführlich die einfachere Richtung der Äquivalenz, nämlich die von Euler gezeigte Notwendigkeit: Aus der Existenz einer geschlossenen Eulertour folgt, dass der Graph (bis auf isolierte Ecken) zusammenhängend ist und nur gerade Ecken hat.

Das Kriterium ist notwendig

Wenn es eine geschlossene Eulertour gibt, verläuft sie durch jede Ecke (es sei denn sie wäre isoliert). Die nicht-isolierten Ecken hängen also zusammen. Isolierte Ecken haben alle den Eckengrad 0 (gerade!). Dass auch die übrigen Ecken geraden Grad haben, können wir durch einfaches, aber systematisches ‚Nachzählen' der mit jeder Ecke inzidenten Kanten zeigen: Beginnend mit einer beliebigen (nicht-isolierten) Ecke, durchlaufen wir die Eulertour und zählen an jeder Ecke, über die die Tour führt, die bisher benutzten Kanten, die an dieser Ecke ein- bzw. ausmünden. Zu Beginn sind die Zähler an jeder Ecke gleich 0. Überqueren wir eine Ecke, so steigt der Zähler stets um 2, nämlich einmal beim Betreten und einmal beim Verlassen der Ecke. Am Ende der Tour zeigt also jeder Zähler eine gerade Zahl (nämlich $2k$, wenn wir die Ecke k-mal passiert haben). Da in einer Eulertour jede Kante genau einmal vorkommt, zählen wir jede ein- bzw. auslaufenden Kante wirklich genau einmal.

Bei unserer (willkürlich gewählten) Startecke haben wir zu Beginn den Zähler auf 1 gesetzt, weil wir sie nur über eine Kante verlassen haben. Würden wir die Startecke vor dem Ende der Tour nochmals erreichen, so müssten wir sie überschreiten. Wie bei den anderen Ecken auch, würde der Zähler dann jedesmal um 2 steigen. Da die Eulertour aber geschlossen ist, kehren wir auf jeden Fall zum Schluss der Tour zu unserer Startecke zurück, wobei wir den Zähler ein weiteres Mal um 1 erhöhen; am Ende zeigt der Zähler also auch hier eine gerade Zahl (nämlich $1+2k+1$: Losgehen, k-mal überschreiten, zurückkommen). Also sind alle Ecken gerade. ■

Die andere Richtung der Äquivalenz ist die ‚Hinreichendheit' des Kriteriums (bewiesen von Hierholzer 1873): In jedem bis auf isolierte Ecken zusammenhängenden (Multi-) Graphen mit ausschließlich geraden Ecken stets (mindestens) eine geschlossene Eulertour.

Das Kriterium ist hinreichend

Wir betrachten einen bis auf isolierte Ecken zusammenhängenden (Multi-)Graphen G, in dem alle Ecken geraden Grad haben. In G muss es (mindestens) einen einfachen

geschlossenen Kantenzug geben (siehe Übung 63). Eventuell gibt es mehrere; wir wählen auf jeden Fall einen mit maximaler Kantenzahl. D. h. kein anderer einfacher geschlossener Kantenzug hat mehr Kanten als unserer.

1. Fall Unser Kantenzug Z enthält alle Kanten, also jede genau einmal (denn er ist ja einfach. Da er auch geschlossen ist, ist er eine geschlossene Eulertour, und wir sind fertig.

2. Fall Z enthält nicht alle Kanten. Dann löschen wir aus G alle Kanten (aber nicht die Ecken) von Z und erhalten H. H muss noch Kanten enthalten, braucht aber nicht zusammenhängend zu sein. Aber auch in H sind alle Ecken gerade. Daher muss es auch in H einen einfachen geschlossenen Kantenzug geben. Jeder solche Kantenzug Z^* muss eine Ecke e mit dem gelöschten Kantenzug Z gemeinsam haben (warum?). Dann kann der gelöschte aber nicht maximal gewesen sein. Denn wir können aus Z und Z^* auf folgende Weise leicht einen einfachen geschlossenen Kantenzug konstruieren, der größer ist als Z: Laufe Z entlang bis zur Ecke e, biege ab auf Z^* und laufe darauf ganz herum bis e, dort wieder abbiegen auf Z und den Rest von Z ablaufen. Dann aber war Z nicht maximal.

Mit anderen Worten: Wenn wir unter den einfachen geschlossenen Kantenzügen von G einen wählen, der wirklich maximal ist, dann ist das automatisch eine (geschlossene) Eulertour.

Damit ist der Satz von Euler und Hierholzer vollständig bewiesen. ■

Notwendige und hinreichende Kriterien

Ein Kriterium K heißt *notwendig* für eine Eigenschaft E, wenn die Eigenschaft nicht ohne das Kriterium gelten kann, wenn also bei Erfülltsein der Eigenschaft immer auch das Kriterium erfüllt ist. Mit anderen Worten: Wenn E gilt, dann muss auch K gelten; wenn K nicht gilt, dann kann auch E nicht gelten.

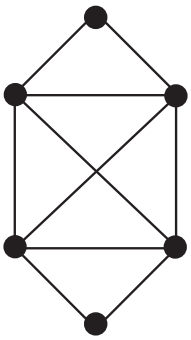
Formal: K ist *notwendig* für E **gdw.** $E \Rightarrow K$ **gdw.** $\neg K \Rightarrow \neg E$.

Ein Kriterium K heißt *hinreichend* für eine Eigenschaft E, wenn bei Erfülltsein des Kriteriums immer auch die Eigenschaft E erfüllt ist. Mit anderen Worten: Wenn K gilt, dann muss auch E gelten; wenn E nicht gilt, dann kann auch K nicht gelten.

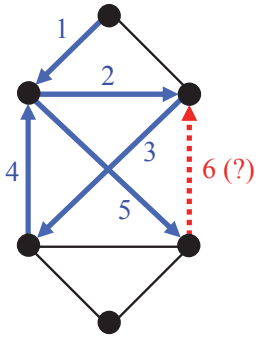
Formal: K ist *hinreichend* für E **gdw.** $K \Rightarrow E$ **gdw.** $\neg E \Rightarrow \neg K$.

Demnach ist ein Kriterium genau dann *äquivalent* zu einer Eigenschaft, wenn es *sowohl notwendig als auch hinreichend* für die Eigenschaft ist. D.h. wenn die Eigenschaft gilt, gilt auch das Kriterium, und wenn das Kriterium gilt, gilt auch die Eigenschaft.

3.2 Der Eulertour-Algorithmus



Der Graph rechts ist zusammenhängend und hat nur gerade Ecken; er hat also eine geschlossene Eulertour. Aber wie konstruiert man die? Kann man einfach ‚drauflos zeichnen'? Das Beispiel links unten zeigt, dass das im Allgemeinen nicht lange gut geht.



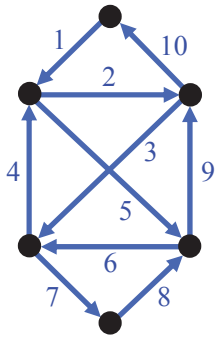
Beobachtung:

Man darf nicht jede Kante wählen, die den bisherigen Kantenzug verlängert. Kante 6 ist eine Brücke zwischen den noch nicht benutzten Kanten oben und unten. Über diese Brücke kommt man nicht mehr zurück, da man jede Kante nur einmal verwenden darf.

Erfreulicherweise ist diese ‚Brücken-Vermeidung' aber auch schon das einzige, worauf man achten muss. Man muss also nicht vorausschauend planen und analysieren, ob man vielleicht in zwei, drei oder noch mehr Schritten in eine Sackgasse geraten könnte. Vielmehr reicht es, wenn man sich in jedem Schritt allein auf die unmittelbar weiterführenden Kanten konzentriert und davon irgendeine wählt, die keine solche Brücke ist (es sei denn, es gäbe keine andere mehr).

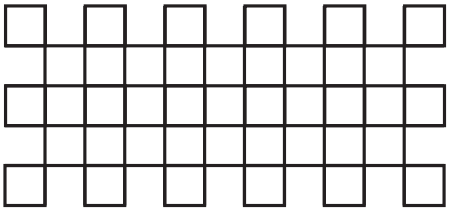
Eulertour-Algorithmus

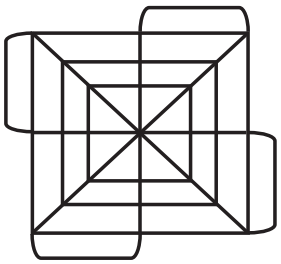
Wähle stets eine den bisherigen Kantenzug verlängernde Kante, die *keine Brücke im Graphen der restlichen Kanten* ist – es sei denn, dies ist die einzige verlängernde Kante.



Den Beweis, dass dieses einfache Vorgehen tatsächlich in jedem Fall funktioniert, führen wir hier nicht.

ÜBUNG 53 Erproben Sie den Eulertour-Algorithmus an den beiden abgebildeten Graphen.

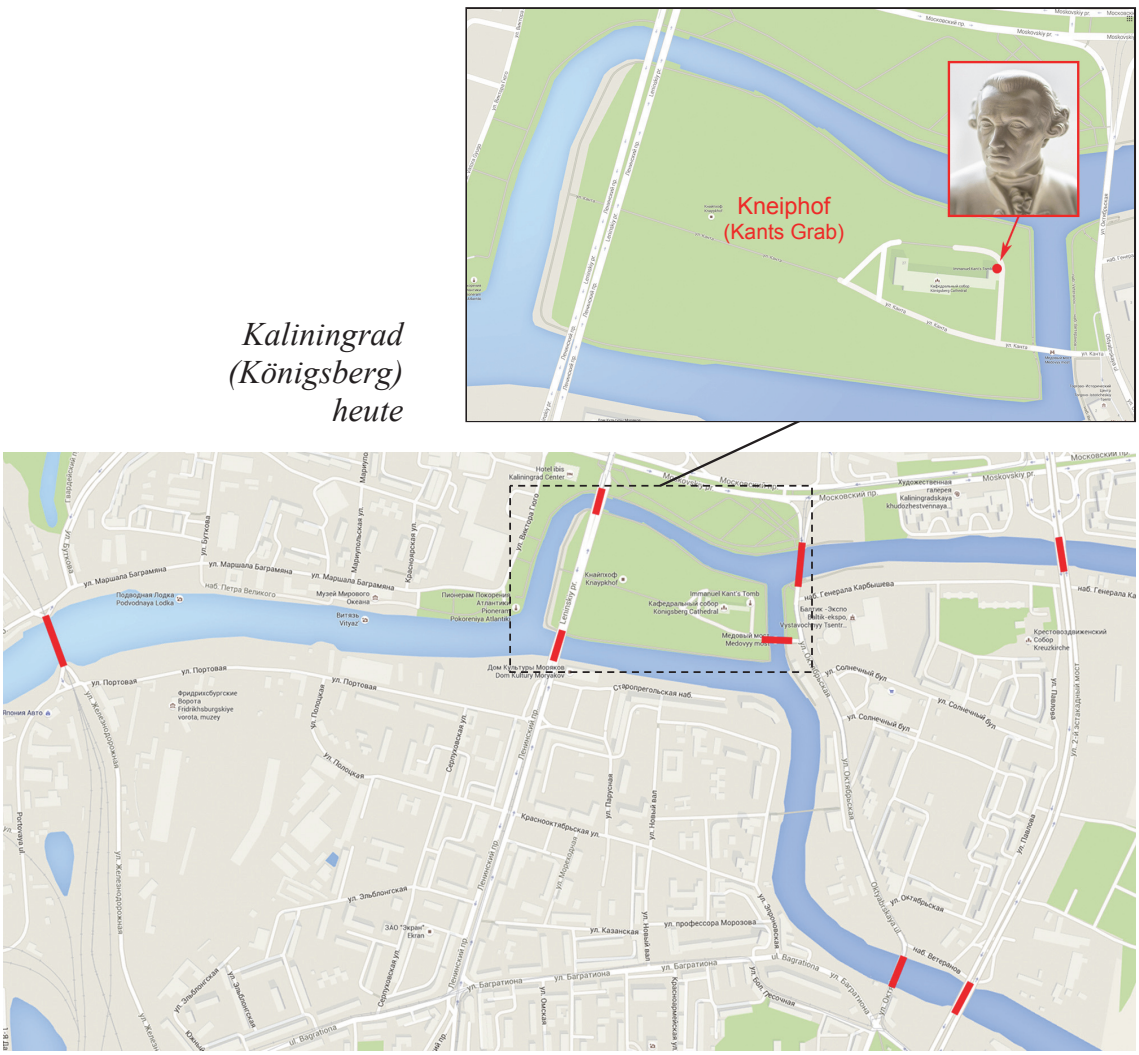




ÜBUNG 54 Finden Sie Rundwege im alten Königsberg, die einmal *oder zweimal* über jede Brücke führen, bei denen aber die Zahl der doppelt benutzten Brücken möglichst klein ist.

ÜBUNG 55 Königsberg (seit 1946: Kaliningrad) ist die Geburtstadt des großen Philosophen *Immanuel Kant (1724-1804)*. Nehmen wir an, Sie wollten von seinem Grab auf der Pregel-Insel ‚Kneiphof' in Königsberg zu einem Rundweg starten, der über jede Brücke führt – wie oft müssten Sie mindestens eine Brücke passieren?

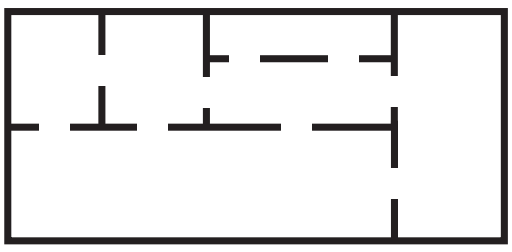
Kaliningrad (Königsberg) heute



ÜBUNG 56 Schon Euler kannte das *Handschlaglemma*. Studieren Sie aufmerksam seine ‚Solutio' (ab Seite 125) und finden Sie die genaue Textstelle, in der Euler das Handschlaglemma formuliert.

ÜBUNG 57 Gibt es vollständige Graphen K^n, die eulersch sind?

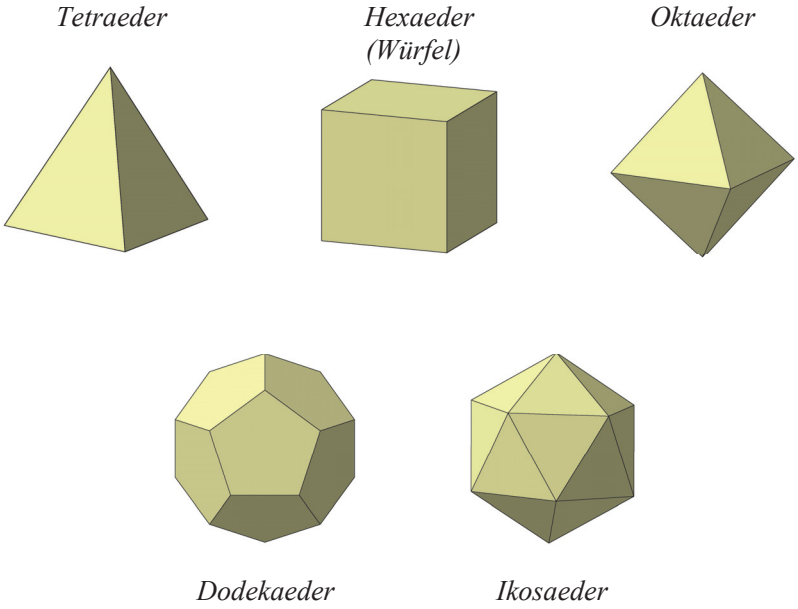
ÜBUNG 58 Gibt es in dieser Wohnung einen Rundgang, der jede Tür genau einmal passiert? Entwerfen Sie kompliziertere Grundrisse.



ÜBUNG 59 Zeichnen Sie alle *schlichten zusammenhängenden* eulerschen Graphen mit maximal 6 Ecken.

ÜBUNG 60 Zeichnen Sie alle eulerschen *Multi*graphen (ohne isolierte Ecken) mit maximal 5 Kanten.

ÜBUNG 61 Für welche der fünf platonischen Körper kann man Kantenmodelle aus einem einzigen langen Draht biegen?



Die 5 platonischen Körper

ÜBUNG 62 *Beweisen Sie:* In jedem zusammenhängenden (Multi-)Graphen gibt es eine geschlossene Kantenfolge, die jede Kante genau zweimal enthält.

ÜBUNG 63 *Beweisen Sie:* Hat ein (Multi-)Graph G nur Ecken vom Grad ≥ 2, so enthält G einen geschlossenen Kantenzug.

ÜBUNG 64 *Beweisen Sie:* Ein zusammenhängender (Multi-)Graph G ist genau dann eulersch, wenn er Kreise $C_1,\ldots,C_k$ enthält, so dass jede Kante von G zu genau einem dieser Kreise gehört. (Das heißt G ist die *Vereinigung kantendisjunkter Kreise*).

4 Hamiltonsche Graphen

Gewissermaßen das Gegenstück zu den eulerschen Graphen sind die *hamiltonschen Graphen*. Es gibt nur einen kleinen, aber wichtigen Unterschied: Geht es bei *Euler* um eine Rundreise über alle *Kanten*, so geht es bei *Hamilton* um eine Rundreise über alle *Ecken* (auch hier soll jede genau einmal passiert werden).

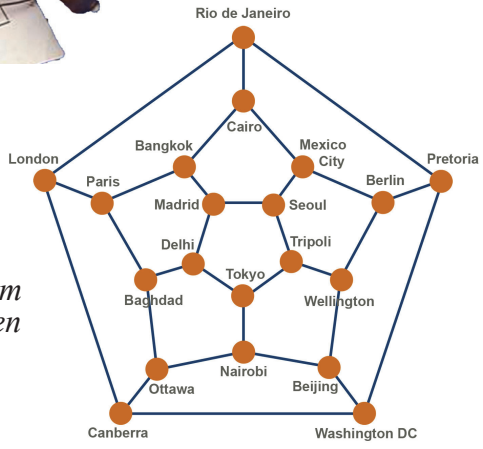
4.1 Hamiltons Puzzle

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) hatte 1859 ein Spiel erfunden, das seinerzeit unter dem Namen *The Traveller's Dodecahedron* populär wurde und heute meist *Hamilton's Puzzle* heißt. Es bestand aus einem Dodekaeder, dessen Ecken die Namen berühmter Städte trugen. Die Aufgabe bestand darin, eine Rundreise durch alle diese Städte zu finden, die jede Stadt genau einmal besucht (die Straßen waren die Dodekaederkanten).



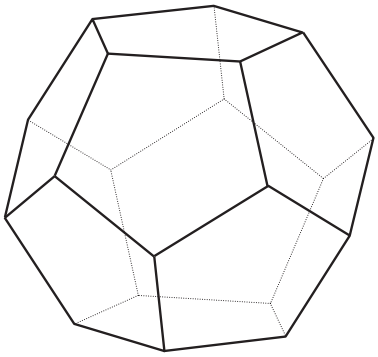


Hamiltons Puzzle (original)

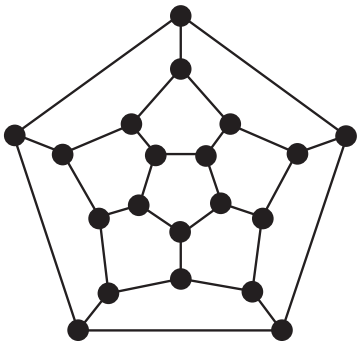


Die Städte im Dodekaedergraphen

ÜBUNG 65 ✻ Lösen Sie *Hamiltons Puzzle*: Zeichnen Sie eine Städte-Rundreise in den Dodekaedergraphen ein. Übertragen Sie sie auf die Ecken und Kanten des Dodekaeders (s. Abbildung).



Dodekaeder



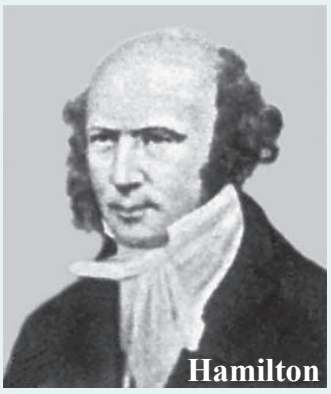
Dodekaedergraph

ÜBUNG 66 Wie auf der Abbildung des Originalspiels zu erkennen ist, bestand das Spiel nicht aus einem echten Dodekaeder. Vielmehr war die gesamte Dodekaederstruktur wie auf einem ‚Pilzkopf' dargestellt. Beide haben dieselbe topologische Struktur. Wie prüfen Sie das exakt nach? Welche praktische Bedeutung hat das für den ‚Blick von oben'? Lässt sich eine entsprechende topologische Verzerrung auch bei den anderen platonischen Körpern durchführen? (Kennen Sie übrigens ein handwerkliches Werkzeug, das bei Hamiltons Holzmodell Pate gestanden hat? Es war seinerzeit und lange danach in jedem Haushalt vorhanden.)

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), irischer Mathematiker, Physiker und Astronom, hatte die *Quaternionen* erfunden (eine Art Weiterentwicklung der komplexen Zahlen); sie sind erst viel später von großem Nutzen für die Physik geworden, nämlich in der Quantenmechanik, die man nur in der Sprache der Quaternionen gut verstehen kann.

In seinem Buch *Theory of Systems of Rays* (1827), das noch heute gelesen wird, legte er die wissenschaftlichen Grundlagen der Optik. Er schrieb es mit 23.

Als Fünfjähriger übersetzte Hamilton aus dem Lateinischen, Griechischen und Hebräischen. Später beherrschte er ebenso viele Sprachen wie er Lenze zählte, darunter Sanskrit, Bengali und anderes Nützliche. Da war er aber auch schon dreizehn ...


Hamilton

Während bei Euler Mehrfachkanten und Schlingen das Problem oft erst interessant machen, spielt es für Hamiltons Problem keine Rolle, ob zwei Städte evtl. durch mehrere Straßen verbunden sind, ebenso wenig, ob eine Straße zur Ausgangsstadt zurückführt. – In der Sprache der Graphentheorie: Euler betrachtet Multigraphen, *Hamilton* dagegen *schlichte Graphen*.

Wir können das auch leicht in der Sprache der Graphentheorie begründen: Ein geschlossener Kantenzug, der *genau einmal durch jede Ecke* führt (so einen Kantenzug nennen wir *Hamiltonkreis*) kann keine Schlinge benutzen, da er bei einer Schlinge ja die gerade besuchte Ecke zum zweiten Mal passieren würde; und von Mehrfachkanten kann ein Hamiltonkreis stets allenfalls eine Kante benutzten, da er sonst auch hierbei Ecken mehrfach passieren würde. Ein Multigraph hat also genau dann einen Hamiltonkreis, wenn der zugehörige schlichte Graph einen solchen Kantenzug hat. (Diesen zugehörigen schlichten Graphen erhält man, indem man jede Schlinge löscht und jede Mehrfachkante durch eine Einfachkante ersetzt; den schlichten Graphen nennen wir die *Reduktion* des Multigraphen).

Da also für die Frage, ob es einen Hamiltonkreis gibt, Schlingen und Mehrfachkanten völlig irrelevant sind, betrachten wir in der Theorie der Hamiltonschen Graphen nur schlichte Graphen:

Definition 14 Hamiltonkreise, Hamiltonwege, hamiltonsche Graphen

(1) Ein Kreis in einem schlichten Graphen, der jede Ecke enthält, heißt *Hamiltonkreis*.

(2) Ein Weg in einem schlichten Graphen, der jede Ecke enthält, heißt *Hamiltonweg*.

(3) Ein schlichter Graph, der einen Hamilton*kreis* enthält, heißt *hamiltonscher Graph*.

Wie jeder (schlichte) Graph, der einen Kreis enthält, muss natürlich auch ein hamiltonscher Graph stets mindestens 3 Ecken haben.

ÜBUNG 67 * Wann wird ein Graph eher hamiltonsch sein: wenn das Verhältnis von *Eckenzahl zu Kantenzahl* groß ist oder das Verhältnis von *Kantenzahl zu Eckenzahl*?

ÜBUNG 68 * Sind vollständige Graphen immer hamiltonsch? Wie steht es mit vollständigen bipartiten Graphen?

ÜBUNG 69 * Zeigen Sie, dass man einen Graphen durch Hinzufügen von Kanten (zwischen nicht-adjazenten Ecken) stets hamiltonsch machen kann.

ÜBUNG 70 * Ein Graph heißt *maximal nicht-hamiltonsch*, wenn er nicht hamiltonsch ist, durch Hinzufügen einer beliebigen Kante (zwischen nicht-adjazenten Ecken) jedoch stets ein hamiltonscher Graph entsteht. Zei-

gen Sie, dass man jeden nicht-hamiltonschen Graphen durch Hinzufügen von Kanten zu einem *maximal* nicht-hamiltonschen Graphen mit gleicher Eckenmenge erweitern kann.

Kreisgraphen (d.h. Graphen, die genau aus einem Kreis bestehen) sind trivialerweise hamiltonsch; sie haben genau einen Hamiltonkreis. Eine andere leicht zu überschauende Klasse hamiltonscher Graphen sind die vollständigen Graphen. Sie haben naturgemäß nicht nur einen, sondern zahlreiche verschiedene Hamiltonkreise: Denn wenn wir hier eine Rundreise durch alle Ecken (und durch jede genau einmal) machen wollen, haben wir an jeder Ecke ja nicht nur eine Möglichkeit, weiterzuwandern. In einem vollständigen Graphen können wir von jeder Ecke prinzipiell zu jeder anderen weitergehen (wir müssen nur die meiden, bei denen wir schon waren). Damit haben wir schon die Beweisidee für den folgenden Satz über die Anzahl der Hamiltonkreise in einem vollständigen Graphen:

Satz 23

Der vollständige Graph K^n hat $\frac{(n-1)!}{2}$ verschiedene Hamiltonkreise.

Beweis

Da ein Hamiltonkreis stets durch alle n Ecken läuft, können wir eine beliebige Ecke e_1 wählen und sämtliche Hamiltonkreise durch diese Ecke zählen. Für die Wahl der nächsten Ecke e_2 stehen $n-1$ Möglichkeiten zur Verfügung; zur Wahl der dritten Ecke e_3 noch $n-2$ Möglichkeiten, und so weiter, bis es schließlich zur Wahl der letzten Ecke e_n nur noch eine Möglichkeit gibt. Insgesamt zählen wir damit

$$(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=(n-1)!$$

Hamiltonkreise. Sicher haben wir dabei keinen Kreis ausgelassen. Wir haben aber jeden Kreis genau zweimal gezählt, weil wir in unserer Zählung zu jeder Eckenfolge $e_1,e_2,e_3,\ldots,e_{n-1},e_n,e_1$ auch die umgekehrte Eckenfolge $e_1,e_n,e_{n-1},\ldots,e_3,e_2,e_1$ gezählt haben, die jedoch beide denselben Hamiltonkreis (in den beiden jeweils möglichen Durchlaufrichtungen) bezeichnen. Die Zahl $(n-1)!$ ist also genau die doppelte Anzahl aller Hamiltonkreise des K^n. ■

Hamiltons Frage nach einer Rundreise durch die Dodekaeder-Ecken ist in der Sprache der Graphentheorie die Frage nach einem Hamiltonkreis im Dodekaedergraphen. Eine Lösung des Problems lässt sich ebenso gut am Polyeder wie an dem zugehörigen Polyedergraphen suchen und beschreiben.

4.2 Hinreichende Kriterien für Hamiltonkreise

Hamiltons Puzzle lässt uns schon vermuten, dass es im Allgemeinen nicht leicht ist, einen Hamiltonkreis zu finden bzw. zu zeigen, dass es keinen Hamiltonkreis gibt. Darin lag ja gerade die Attraktivität, die *The Traveller's Dodecahedron* seinerzeit hatte. Generell ist die Theorie der hamiltonschen Graphen erheblich viel schwieriger als die der eulerschen Graphen. Für eulersche Graphen liefert der Satz von Euler und Hierholzer, wie wir gesehen haben, ein äquivalentes Kriterium; ob ein Graph eulersch ist oder nicht, können wir damit ganz einfach entscheiden.

Bei hamiltonschen Graphen liegen die Dinge jedoch anders: Bis heute ist *kein Äquivalenzkriterium für hamiltonsche Graphen bekannt*, also kein Kriterium, das sowohl notwendig als auch hinreichend dafür ist, dass ein Graph einen Hamiltonkreis hat. (Ausgenommen sind natürlich triviale Kriterien wie etwa: „Ein Graph hat genau dann einen Hamiltonkreis, wenn er einen Kreis enthält, auf dem keine Ecke nicht liegt." Oder ähnliche Tautologien, die lediglich die Definition äquivalent umformulieren.)

Die wenigen Sätze, die hinreichende Kriterien für die Existenz von Hamiltonkreisen angeben, haben einen eher bescheidenen praktischen Nutzen. Denn sie erlauben zwar, auf die Existenz eines Hamiltonkreises zu schließen, das aber nur, wenn ziemlich starke Voraussetzungen erfüllt sind. Die Voraussetzungen sind so stark, dass es viele hamiltonsche Graphen gibt, die sie nicht erfüllen. Mit anderen Worten: Es gibt viele Graphen, die man auf diese Weise nicht als hamiltonsch erkennen kann, obwohl sie hamiltonsch sind.

Wir stellen in diesem Kapitel die beiden bekanntesten dieser Sätze vor, den Satz von Dirac und den Satz von Ore.

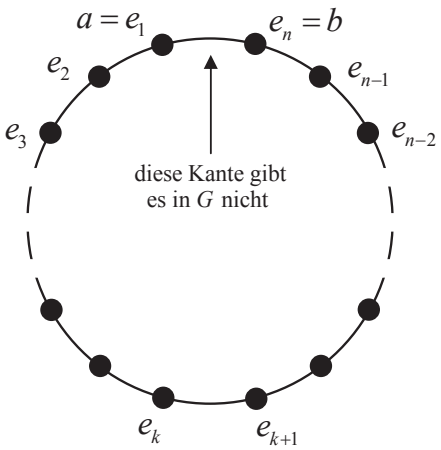
Satz 24 (Dirac 1952)

Ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken, die alle einen Grad $\geq n/2$ haben, ist stets hamiltonsch.

Beweis

Wir führen den Beweis indirekt: Wir nehmen an, dass die Behauptung des Satzes falsch ist, und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führen würde. – Wir nehmen also an, dass es einen Graphen mit n Ecken gibt, die alle einen Grad $\geq n/2$ haben, der aber *nicht* hamiltonsch ist. Durch Hinzufügen von Kanten können wir diesen Ausgangsgraphen zu einem Graphen G erweitern, der *maximal* nichthamiltonsch ist (siehe Übung 70). Das heißt, G ist nicht hamiltonsch, aber wenn wir nur irgendeine neue Kante hinzufügen, entsteht dadurch ein Hamiltonkreis. G hat dieselben Ecken wie der Ausgangsgraph, und da bei der Konstruktion von G an jeder dieser Ecken allenfalls Kanten *hinzu*gekommen sein können, ist in G jeder

Eckengrad mindestens so groß wie im Ausgangsgraphen, also mit Sicherheit $\geq n/2$.



G kann nicht der vollständige Graph K^n sein, denn dieser ist hamiltonsch, G dagegen nicht. Also gibt es in G mindestens ein Paar nicht-adjazenter Ecken *a,b*. Da G *maximal* nicht-hamiltonsch ist, entsteht aus G durch Hinzufügen der Kante *ab* ein hamiltonscher Graph G^{+ab} (mit denselben n Ecken wie G und wie der Ausgangsgraph). Wenn wir die Ecken geeignet nummerieren, gibt es in G^{+ab} also einen Hamiltonkreis C wie abgebildet; C muss die Kante *ab* enthalten, da ohne sie kein Hamiltonkreis existiert.

Wir definieren nun ‚trickreich' zwei Ecken-Teilmengen A und B:

$B :=$ Menge der Nachbarecken von b in G (d.h. Menge der Ecken e_i, die in G mit b adjazent sind)

Damit gilt unmittelbar:

$$|B| = d(b) \tag{1}$$

Die Menge A definieren wir ähnlich, allerdings ein wenig komplizierter:

$A :=$ Menge der Ecken e_i, deren Nachfolgerecke e_{i+1} in G mit a adjazent sind (dabei zählen wir zyklisch weiter, so dass also $e_{n+1} = e_1$ ist)

A ist zwar nicht die Menge der Nachbarecken von a, hat aber ebenso viele Elemente wie diese, also:

$$|A| = d(a) \tag{2}$$

Offensichtlich ist $b \notin B$, denn b kann nicht zu sich selbst adjazent sein (wir betrachten hier ausschließlich *schlichte* Graphen, die ja keine Schlingen haben). Andererseits ist auch $b \notin A$, denn sonst müsste die Nachfolgerecke von $b = e_n$ mit a adjazent sein; dies ist aber $e_{n+1} = e_1 = a$; a müsste also mit sich selbst adjazent sein, was ebenfalls ausgeschlossen ist. Die Ecke b gehört also weder zu A noch zu B, und damit auch nicht zur Vereinigungsmenge $A \cup B$. Die Vereinigungsmenge enthält also *nicht alle* n Ecken, also:

$$|A \cup B| < n \tag{3}$$

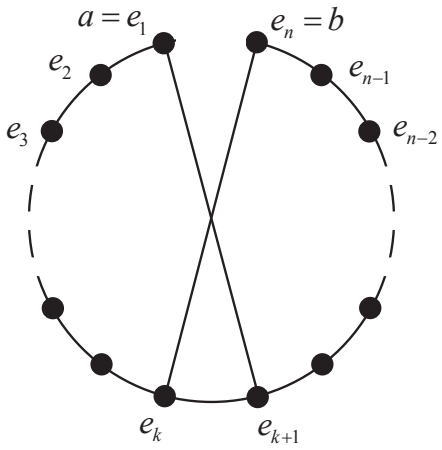
Wir haben A und B so definiert, dass sie keine Ecken gemeinsam haben können, d.h. die beiden Mengen sind disjunkt:

$$A \cap B = \varnothing \tag{4}$$

Denn gäbe es irgendeine Ecke $e_k \in A \cap B$, die also sowohl in A wie in B läge, so hieße das nach Definition der beiden Mengen:

$e_k \in B$: es gibt eine Kante be_k in G

$e_k \in A$: es gibt eine Kante ae_{k+1} in G



Zeichnen wir diese beiden Kanten in die vorige Abbildung ein (und löschen wir die Kante *ab,* die es in G ja nicht gibt), so sehen wir, dass es damit einen Hamiltonkreis in G geben müsste:

$e_1, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_{n-1}, e_n, e_k, e_{k-1}, \ldots, e_2, e_1$

Das ist aber unmöglich, da G nach Voraussetzung maximal *nicht-hamiltonsch* ist. Also kann es so eine Ecke $e_k \in A \cap B$ nicht geben.

A und B müssen demnach disjunkt sein, und damit gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| \tag{5}$$

Insgesamt folgt aus den Gleichungen (1) bis (5):

$$d(a) + d(b) = |A| + |B| = |A \cup B| < n \tag{6}$$

Nach Voraussetzung ist aber $d(a) \geq n/2$ und $d(b) \geq n/2$, und damit muss die Summe – entgegen der Ungleichung (6) – mindestens n sein:

$$d(a) + d(b) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

Widerspruch! ■

ÜBUNG 71 Kann man den Satz von Dirac verwenden, um zu zeigen, dass der Dodekaedergraph hamiltonsch ist? Die Bedingung des Satzes ist hinreichend dafür, dass ein Graph hamiltonsch ist. Ist sie auch notwendig?

ÜBUNG 72 Formulieren Sie den Satz von Dirac präzise, aber ein wenig einfacher (ohne irgendwelche Rechenterme wie ‚n' und ‚$n/2$' zu verwenden).

ÜBUNG 73 Zeichnen Sie einige Graphen, die das Kriterium des Satzes von Dirac erfüllen, und mehrere Hamiltonkreise haben.

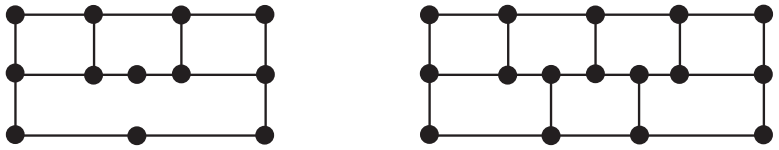
ÜBUNG 74 Zeichnen Sie einige Graphen, die das Kriterium des Satzes von Dirac erfüllen, und genau einen Hamiltonkreis haben.

Ohne Beweis geben wir noch das folgende hinreichende Kriterium an:

Satz 25 (Ore 1960)

Gilt in einem Graphen mit $n \geq 3$ Ecken für zwei verschiedene nicht-adjazente Ecken a,b stets $d(a)+d(b) \geq n$, so ist der Graph hamiltonsch.

ÜBUNG 75 Untersuchen Sie, ob die beiden abgebildeten Graphen Hamiltonkreise oder Hamiltonwege haben.



ÜBUNG 76 Zeichnen Sie alle hamiltonschen Graphen mit bis zu 5 Ecken.

ÜBUNG 77 Unter einem *Kreis-Diagonalen-Graphen* verstehen wir einen Graphen, bei dem alle Ecken auf einem (geometrischen) Kreis liegen und alle Kanten entweder Kreisbogen (zwischen Ecken) oder Diagonalen sind. Entscheiden Sie mit Beweis, ob die folgende Behauptung gilt: Ein Graph ist genau dann hamiltonsch, wenn er zu einem Kreis-Diagonalen-Graphen isomorph ist.

ÜBUNG 78 Entscheiden Sie mit Beweis, ob die folgende Behauptung gilt: Ein k-regulärer Graph mit $2k-1$ Ecken ist stets hamiltonsch.

ÜBUNG 79 Gibt es schlichte Graphen, die eine geschlossene Eulertour enthalten, die zugleich ein Hamiltonkreis ist? Welche sind das?

ÜBUNG 80 Hamiltonsche Graphen müssen natürlich stets zusammenhängend sein. Diese Voraussetzung findet sich beim Satz von Dirac aber nicht. Wurde sie vergessen oder braucht man sie nicht? Finden Sie – um das zu klären – einen Graphen mit $n \geq 3$ Ecken, von denen jede einen Grad $\geq n/2$ hat, der *nicht* zusammenhängend ist; oder beweisen Sie, dass es einen solchen nicht geben kann.

ÜBUNG 81 G sei ein Graph mit $n \geq 3$ Ecken, und a,b seien zwei nicht-adjazente Ecken in G mit $d(a)+d(b) \geq n$. Der Graph G^{+ab} entstehe aus G durch Hinzufügen der Kante ab. Zeigen Sie: G ist genau dann hamiltonsch, wenn G^{+ab} hamiltonsch ist.

4.3 Das Problem des Handlungsreisenden

Hamiltonsche Graphen haben eine große praktische Bedeutung für einen Typ von Optimierungsproblemen, der bekannt geworden ist als das

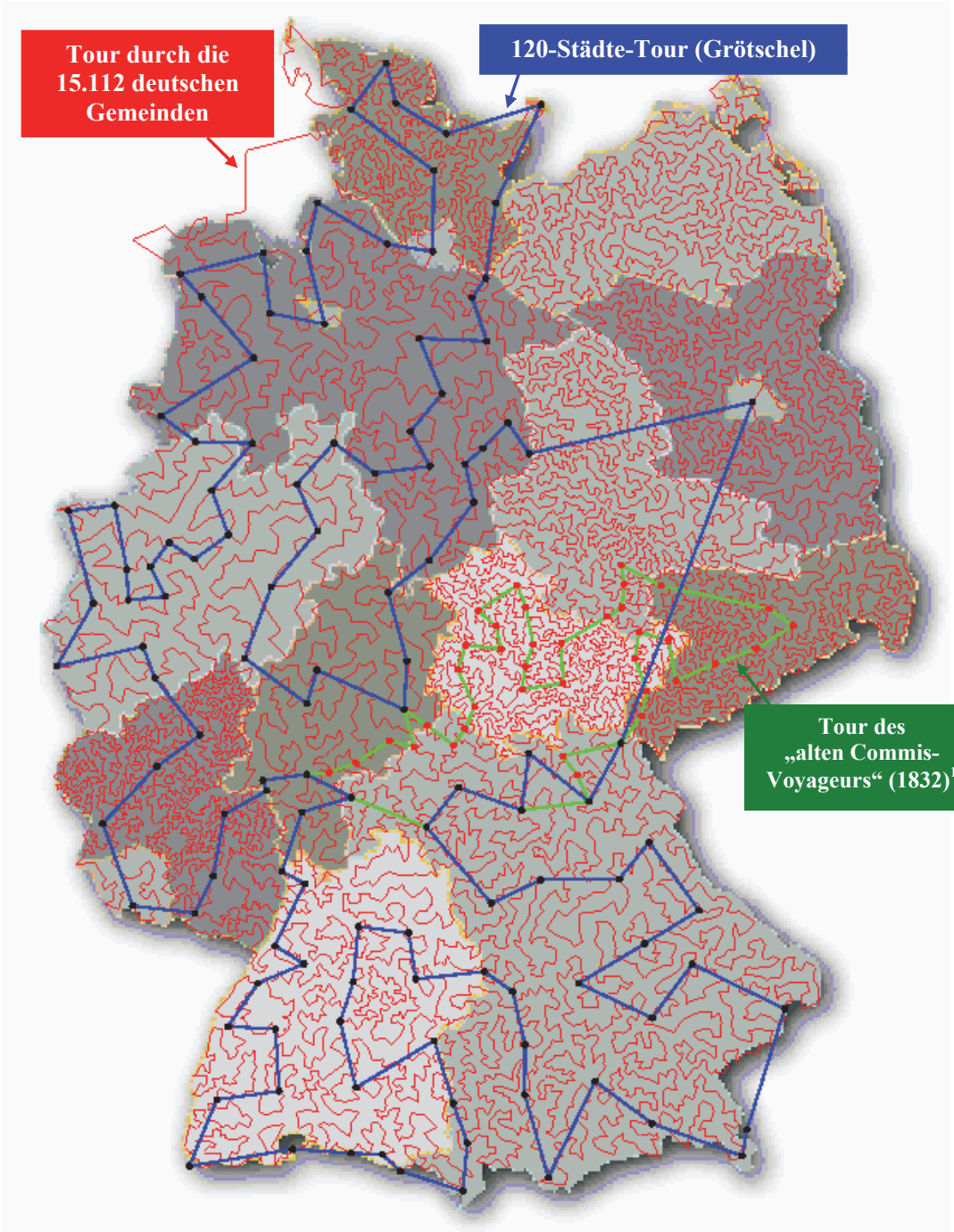
Problem des Handlungsreisenden (Travelling Salesman Problem, TSP)
Ein Handlungsreisender hat regelmäßig Kunden in (stets denselben) n Städten zu bereisen. Gesucht ist eine *kürzeste Rundreise*, die jede Stadt genau einmal besucht.

Diese Situation können wir auf naheliegende Weise als Graph modellieren, dessen Ecken die Städte, und dessen Kanten die zwischen den Städten bestehenden Straßen repräsentieren. Zwei Ecken dieses Graphen sind also genau dann adjazent, wenn die von ihnen repräsentierten Städte durch eine Straße verbunden sind. Die bloße Adjazenz von Ecken allein reicht hier aber nicht aus, auch die Längen der jeweiligen Straßen müssen berücksichtig werden. Wir kennen das bereits vom Problem der billigsten Vernetzung. Auch das Problem des Handlungsreisenden modellieren wir mit *gewichteten Graphen*.

Definition 15 kürzeste Rundreise
Eine *kürzeste Rundreise* in einem gewichteten Graphen ist ein Hamiltonkreis mit minimalem Gesamtgewicht.

ÜBUNG 82 Lösen Sie das TSP für die folgenden Städte (‚Rheinlandproblem' von M. Grötschel). Überlegen Sie vorher, wie viele Rundreisen es gibt.

km	Bonn	Düsseldorf	Frankfurt	Köln	Wuppertal
Aachen	91	80	259	70	121
Bonn		77	175	27	84
Düsseldorf			232	47	29
Frankfurt				189	236
Köln					55



Kürzeste Rundreisen durch Deutschland

Wie findet man denn nun eine kürzeste Rundreise? Eine Methode, die sicher immer funktioniert, ist die *erschöpfende Suche (exhaustive search):* Man bildet schrittweise alle Rundreisen und behält immer *die* Rundreise, die von den *bisher* konstruierten das kleinste Gesamtgewicht hat.

[1] „Der Handlungsreisende – wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiß zu sein – Von einem alten Commis-Voyageur“ (Anonyme Veröffentlichung aus dem Jahre 1832 mit der ersten Lösung eines TSP)

Das Problem ist nur, dass es außerordentlich viele Rundreisen gibt, wenn die Anzahl der Städte (bzw. Ecken) groß ist und viele Straßen (bzw. Kanten) existieren. Ist jede Stadt mit jeder anderen verbunden, so ist der Graph vollständig. Nach Satz 23 gibt es dann bei 5 Städten 12 Rundreisen, bei 6 Städten 60, bei 7 Städten schon 360, und bei 10 bereits 181.440 Rundreisen.

Niemand kann den Algorithmus der erschöpfenden Suche anwenden, um eine optimale Rundreise durch die 120 größten Städte Deutschlands zu finden. Wenn man mit dem Hubschrauber fliegen will, ist ja prinzipiell jede Stadt direkt von jeder anderen aus erreichbar, der Graph ist dann also vollständig, und es gibt

$\frac{1}{2} \cdot 119! =$ 27 872 928 806 038 029 406 617 158 558 709 885 778 136 443 054 741 790 876 231 963 967
923 473 155 187 345 789 028 642 355 299 937 422 117 323 491 221 725 377 302 226 702
455 867 174 416 243 671 309 956 875 024 854 002 171 904 000 000 000 000 000 000 000
000 000

verschiedene Rundreisen (Hamiltonkreise). Kein Computer wird unter einer solchen Anzahl jemals die optimale finden können, wenn er nur den Algorithmus der erschöpfenden Suche anwendet. Und bei der Suche nach einer kürzesten Rundreise durch sämtliche 15.112 deutschen Gemeinden noch viel weniger. Und doch sind solche optimalen Reisen gefunden worden – allerdings mit anderen Algorithmen (s. die Abb. auf der vorigen Seite). Allerdings will wohl niemand wirklich alle deutschen Gemeinden bereisen. Jedoch hat das TSP in einer Reihe von Anwendungsgebieten wirklich große praktische Bedeutung. Beispiele sind die Optimierung bei der Lkw-Tourenplanung großer Speditionen, bei Busfahrplänen in Großstädten oder beim Bohren von Platinen.

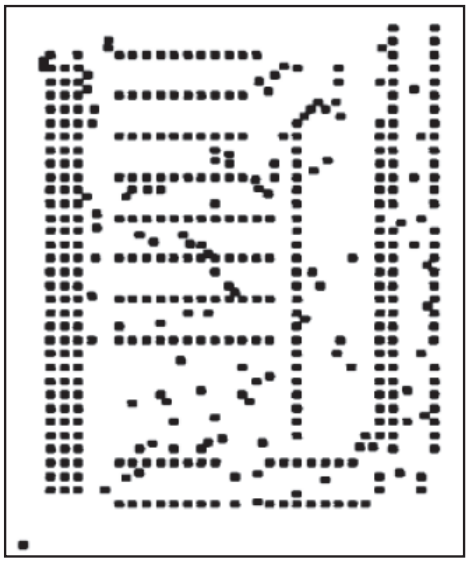
Anwendungsbeispiel: Optimales Bohren von Platinen

Auf einer Platine (s. Abb. nächste Seite oben) sollen von einem Roboter 441 Löcher gebohrt werden. Die Rolle des Handlungsreisenden wird also hier vom Bohrkopf eines Industrieroboters übernommen. Da der Bohrer immer von seiner Ruheposition unten links startet, gibt es hier also 442 „Städte“, mithin $\frac{1}{2} \cdot 441!$ verschiedene Rundreisen. Dies ist eine 977-stellige Zahl:

12 414 028 424 163 776 218 615 946 480 970 821 730 948 492 904 306 410 108 765 862 062
169 097 245 309 839 593 976 542 700 009 359 697 956 676 347 253 338 307 569 012 111
937 889 942 251 554 480 887 334 757 852 966 652 096 962 995 542 932 013 451 090 706
485 653 145 288 508 017 698 172 200 882 362 719 186 617 753 461 356 532 993 390 321
041 759 613 795 059 980 662 926 781 007 309 665 004 163 557 594 767 251 176 121 786
697 597 074 123 777 748 352 371 765 169 775 674 254 857 905 570 488 621 833 128 751
611 159 718 448 708 633 507 743 961 312 229 538 453 482 936 727 999 459 016 441 185
338 713 161 239 696 620 793 752 442 464 892 730 127 891 938 378 137 652 654 960 521
218 303 229 525 384 808 833 331 153 105 614 100 465 624 319 016 352 716 846 879 366
955 117 506 046 897 049 157 957 623 453 673 612 533 385 618 629 417 665 233 606 650
843 220 153 666 730 918 865 064 044 395 328 284 311 885 868 931 850 383 831 141 801
263 587 336 836 310 719 021 709 177 899 226 024 639 421 601 222 527 244 918 230 435
312 155 200 326 751 770 634 094 504 453 874 868 773 383 945 645 032 890 236 582 884
580 350 999 727 780 131 491 983 669 510 280 755 298 294 562 816 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

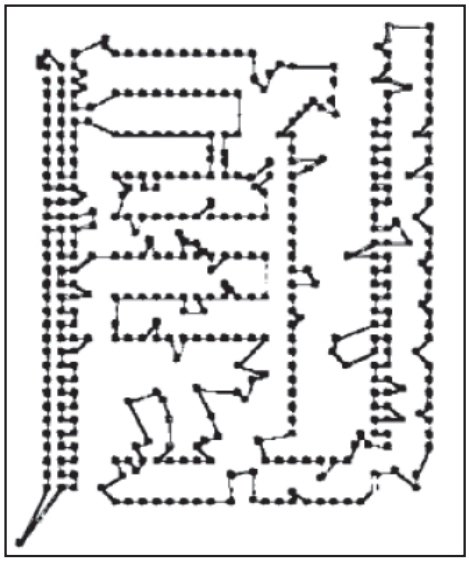
Das ist mehr als ein Computer jemals berechnen und vergleichen kann. Durch eine *‚erschöpfende Suche‘ (*Durchmustern aller möglichen Rundreisen) lässt sich die kürzeste nicht finden, das TSP also nicht lösen.

Um eine Lösung zu finden, die zwar *nicht optimal*, für die Praxis aber fast ebenso gut ist, kann man anders vorgehen. Mithilfe des sogenannten *Sintflutalgorithmus* findet der Computer bereits nach 450.000 Schritten eine Rundreise, die bei dieser speziellen Platine 51,20 inch lang ist (s. zweite Abb. nächste Seite).



Weil man es in diesem Fall ganz genau wissen wollte, wurde im Jahr 1987 in einer Dissertation die wirklich kürzeste Rundreise konstruiert und ihre Minimalität bewiesen: Sie hat eine Länge von 50,69 inch. Die ‚suboptimale' Lösung mit dem Sintflutalgorithmus, ist also nur 1% länger als die optimale.

Wirklich kürzeste Rundreisen zu finden, ist also außerordentlich schwierig. Bis heute sind (für eine optimale, also nicht nur suboptimale Lösung) ausschließlich solche *hoffnungslos zeitaufwendigen Algorithmen* bekannt wie die erschöpfende Suche, deren Zeitaufwand bei steigender Städtezahl n exponentiell wächst. Das liegt daran, dass die Zahl möglicher Rundreisen im K^n eben durch einen Term angegeben werden kann, in dem die Fakultät von n vorkommt (genau genommen die von $n-1$, aber das ändert nichts an der Rasanz des Wachstums). Fakultäten können durch exponentielle Terme angenähert werden (d.h. die Variable steht im Exponenten), und exponentielle Funktionen sind die am schnellsten wachsenden Funktionen.



Die Chance, irgendwann einmal einen Algorithmus zur *exakten* Lösung des TSP zu finden, hält man heute für äußerst gering, wenn es nicht überhaupt unmöglich ist (Genaueres weiß man nicht). Denn man kann zeigen, dass das Problem des Handlungsreisenden *NP-vollständig* ist. D.h. es gehört zur Klasse der schwierigsten (weil zeitaufwendigsten) algorithmischen Probleme überhaupt:

Satz 26

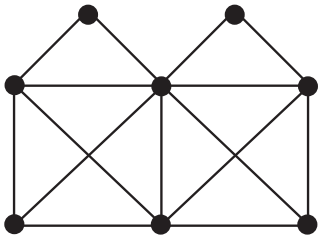
Das Problem des Handlungsreisenden ist *NP-vollständig*.

NP-vollständig bedeutet: Wenn man einen Algorithmus zur Lösung des TSP fände, dessen Zeitaufwand *nicht*-exponentiell wächst, d.h. auch bei größerer Städtezahl in ‚menschlicher Zeit' fertig wird (auf schnellen Rechnern), dann könnte man mit Varianten davon sofort auch *jedes der übrigen* NP-vollständigen Probleme lösen. Man kann das TSP also überhaupt nicht für sich allein lösen. Ob man will oder nicht, immer löst man automatisch *alle anderen* NP-vollständigen Probleme mit. Damit ist das Problem so umfassend, dass man annimmt, niemals ein Lösung finden zu können.

5 MATCHINGS

Stellen Sie sich vor, Sie wollten für Ihren Tennisclub Paarungen für ein Turnier im Tennisdoppel zusammenstellen. Da Spiele auch gleichzeitig stattfinden können, müssen Sie die Paarungen so bilden, dass sie keine Überschneidungen haben, dass also kein Spieler zu mehreren Paarungen gehört. Andererseits müssen die beiden Spieler einer Paarung aufeinander eingespielt sein und auch sonst ‚zueinander passen'. Das stellen Sie als Adjazenz in einem Graphen dar. Natürlich wollen Sie möglichst viele Spieler beteiligen.

ÜBUNG 83 ✻ Suchen Sie Paarungen im abgebildeten Graphen, die eine möglichst große Zahl von Spielern beteiligen.



ÜBUNG 84 ✻ Wie können Sie das Problem in der Sprache der Graphentheorie ausdrücken?

Definition 16 Matching, Matchingzahl, maximales Matching, perfektes Matching

(1) Ein *Matching* in einem Graphen $G=(E,K)$ ist eine Teilmenge $M \subseteq K$ paarweise nicht-inzidenter Kanten von G.

(2) Die Matchingzahl $m(G)$ ist die maximale Kantenzahl, die ein Matching in G haben kann.

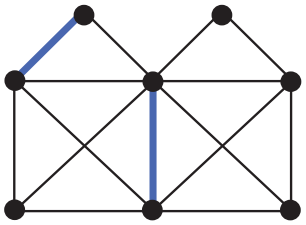
(3) Ein Matching in G heißt *maximal*, wenn es kein Matching in G gibt, das mehr Kanten enthält (d.h. $|M| = m(G)$.)

(4) Ein Matching in G heißt *erweiterbar*, wenn es echte Teilmenge eines anderen Matchings in G ist.

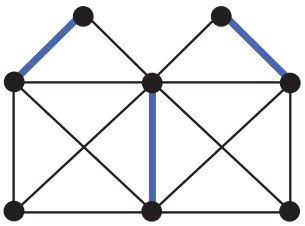
(5) M sei ein Matching in G. Die Kanten $k \in M$ heißen *Matchingkanten*. Eine Ecke heißt *von M gematcht*, wenn sie Endecke einer Matchingkante ist.

(6) Ein Matching in G heißt *perfekt*, wenn alle Ecken in G von M gematcht werden.

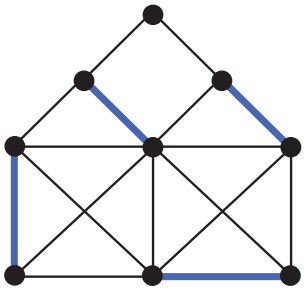
Das englische ‚Matching' entspricht der deutschen Bezeichnung ‚Paarung'.



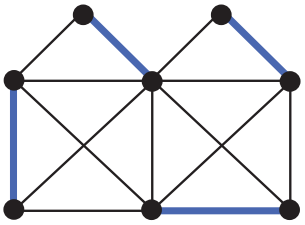
erweiterbares Matching



nicht erweiterbares, aber nicht maximales Matching



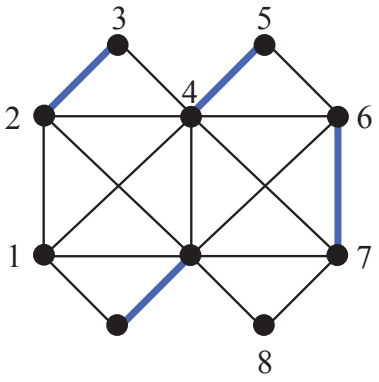
maximales, aber nicht perfektes Matching



maximales und perfektesMatching

5.1 Maximale Matchings

ÜBUNG 85 * Ist das abgebildete Matching erweiterbar? Ist es maximal? (Beachten Sie besonders den markierten Weg.)



Definition 17 ***M*-alternierender Weg**

M sei ein Matching im Graphen G. Ein Weg in G, dessen Kanten abwechselnd Nicht-Matchingkanten und Matchingkanten sind, und der von einer nicht gematchten Ecke zu einer anderen nicht gematchten Ecke führt, heißt *M-alternierender Weg* in G.

Umfärben eines Matchings M entlang eines M-alternierenden Wegs

Alternierende Folgen $abab\ldots aba$, in denen nur zwei verschiedene Elemente auftreten, und die mit demselben Element starten und enden, müssen stets ungerade Länge haben; und das Element, mit dem die Folge beginnt und endet, muss genau einmal häufiger vorkommen als das andere. (Denn lässt man das letzte Element der Folge weg, so kann man den Rest in Paare ab aufteilen; er hat also eine gerade Länge und jedes der beiden Elemente kommt in ihm gleich oft vor.)

Die Kantenfolge eines M-alternierenden Wegs können wir (ohne die Ecken) laut Definition in der Reihenfolge des Durchlaufs in der Form $k_1 m_1 \ldots k_n m_n k_{n+1}$ schreiben, wobei die m_i Matchingkanten bezeichnen und die k_i Nicht-Matchingkanten. Die erste und die letzte Kante können keine Matchingkanten sein, da sonst Start- und Endecke gematcht wären. Ein M-alternierender Weg muss also stets eine ungerade Zahl von Kanten enthalten, und die Zahl der in ihm vorkommenden Nicht-Matchingkanten ist genau um eins größer als die der Matchingkanten.

Ändert man das Matching M auf dem M-alternierenden Weg nun so ab, dass man aus jeder Matchingkante des Weges eine Nicht-Matchingkante macht und umgekehrt (man bezeichnet das als *Umfärben entlang des M-alternierenden Wegs*), so enthält der Weg anschließend eine Matchingkante mehr als zuvor. Aber entsteht durch dieses Umfärben auch sicher wieder ein Matching? Ein Matching ist eine Menge von paarweise nicht-inzidenten Kanten. Das einzige also, was wir befürchten müssten, wäre der Fall, dass eine oder mehrere der neu hinzugekommenen Matchingkanten mit schon bestehenden inzident wären. Das könnte aber allenfalls die erste bzw. die letzte Kante des Weges betreffen. Denn wenn die ursprünglichen Matchingkanten im Weg nicht inzident mit anderen Matchingkanten waren, dann können es die neuen ebenfalls nicht sein (bis evtl. auf die beiden genannten). Denn zu keiner Ecke im Innern des Weges kann eine Matchingkante von außerhalb des Weges führen; weder vor dem Umfärben noch nachher; sonst wären eben bereits die ursprünglichen Matchingkanten im Weg inzident mit Matchingkanten von außerhalb. Aber auch die erste bzw. letzte Kante kann nach dem Umfärben keinen Konflikt verursachen. Denn nach Definition sind Anfangs- und Endecke des Weges vorher nicht gematcht (das werden sie erst durch das Umfärben). Das heißt, sie waren nicht inzident mit einer Matchingkante außerhalb des Weges. Wenn aber weder die erste noch die letzte Kante des Weges mit einer Matchingkante außerhalb des Weges inzident war, dann sind sie das auch nach dem Umfärben nicht. –M-alternierende Wege sind also gute Werkzeuge, wenn wir große Matchings konstruieren wollen. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen ihnen und maximalen Matchings:

Satz 27 Maximalitätssatz

Ein Matching M in G ist genau dann maximal, wenn es keinen M-alternierenden Weg in G gibt.

Beweis

Wir zeigen, dass es eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Maximalität von *M* ist, dass es keinen *M*-alternierenden Weg gibt.

(1) *Das Kriterium ist notwendig*

Wie wir bereits auf der vorigen Seite ausführlich überlegt und begründet haben, gilt: Ist $W = k_1 m_1 k_2 m_2 \ldots k_n m_n k_{n+1}$ ein *M*-alternierender Weg in *G*, so ist $M' = M \setminus \{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \cup \{k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}\}$ ein Matching mit $|M'| = |M| + 1$.

Kontraposition

Zu jeder Wenn-Dann-Aussage (*Implikation*, *Subjunktion*) kann man die *Kontraposition* bilden; dazu negiert man die beiden Teilaussagen und kehrt die Implikationsrichtung um: Die Kontraposition von $A \Rightarrow B$ ist also $\neg B \Rightarrow \neg A$. („Wenn es regnet, dann ist die Straße nass." – Kontraposition: „Wenn die Straße nicht nass ist, regnet es nicht.")

Die Kontraposition ist immer zur ursprünglichen Aussage äquivalent: $A \Rightarrow B$ äquiv. $\neg B \Rightarrow \neg A$ („Wenn es regnet, dann ist die Straße nass." ist logisch dasselbe wie „Wenn die Straße nicht nass ist, regnet es nicht.").

Die Kontraposition der Kontraposition ist wieder die ursprüngliche Aussage: Die Kontraposition zu $\neg B \Rightarrow \neg A$ ist $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$ äqiv. $A \Rightarrow B$. („Wenn es nicht der Fall ist, dass es nicht regnet, dann ist es nicht der Fall, dass die Strasse nicht nass ist." ist logisch dasselbe wie „Wenn es regnet, ist die Straße nass.")

(2) *Das Kriterium ist hinreichend*

Wir zeigen: Gibt es keinen *M*-alternierenden Weg, dann ist *M* maximal. Genauer gesagt zeigen wir die Kontraposition davon, nämlich: Ist *M* nicht maximal, dann muss es einen *M*-alternierenden Weg geben (siehe den Kasten *Kontraposition*). Beweis: Sei M' ein Matching in *G* mit mehr Kanten als *M*. Wir betrachten die Menge *N* aller Kanten, die entweder zu M gehören oder zu M', also nicht zu beiden: $N = (M' \setminus \mathrm{M}) \cup (\mathrm{M} \setminus \mathrm{M}')$. *N* ist die *symmetrische Differenz* von *M* und M'. G_N sei der Untergraph von *G*, der genau die Kanten aus *N* hat und nur die zu diesen Kanten gehörenden Ecken. Jede Ecke in G_N hat den Grad 1 oder 2. (Der Grad 0 ist ausgeschlossen, da jede Ecke in G_N mit mindestens einer Kante inzident ist; Grade > 2 sind ausgeschlossen, da sonst zwei *M*-Kanten oder zwei M'-Kanten inzident wären.) Daher ist jede Komponente von G_N entweder ein Kreis oder ein Weg; und zwar stets *abwechselnd* mit Kanten aus *M* und aus M'. Ein Kreis dieser Form muss stets ebenso viele Kanten aus *M* wie aus M' enthalten. Da M' mehr Kanten als *M* hat, kann der Überschuss nur daher rühren, dass es mindestens eine Komponente in G_N gibt, die ein Weg ist, und zwar einer mit mehr Kanten aus M' als aus *M*. Da sich die *M*- und die M'-Kanten in diesem Weg stets abwechseln, muss er mit einer M'-Kante beginnen und enden. Es handelt sich also um einen *M*-alternierenden Weg. ■

5.2 Perfekte Matchings

In einem Matching ist die Anzahl der gematchten Ecken stets doppelt so groß wie die Anzahl der Matchingkanten. Daher kann es ein *perfektes* Matching allenfalls in einem Graphen mit gerader Eckenzahl $2n$ geben. Und in einem Graphen mit $2n$ Ecken ist ein Matching genau dann perfekt, wenn es genau n Kanten enthält.

Natürlich wird ein solcher Graph eher dann ein perfektes Matching haben, wenn seine Kantenzahl ‚groß genug' ist. Aber wann ist sie ‚groß genug'? Wir sehen sofort, dass ein vollständiger Graph K^{2n} mit gerader Eckenzahl perfekte Matchings hat. Doch damit ein Graph ein perfektes Matching hat, muss nicht jede Ecke mit jeder anderen benachbart sein. Auch dann schon, wenn jede Ecke mit *mindestens der Hälfte aller Ecken* benachbart ist, muss es ein perfektes Matching geben – egal wie der Graph gebaut ist. Natürlich ist das nur ein *hinreichendes Kriterium* für perfekte Matchings; notwendig ist es nicht.

ÜBUNG 86 Zeigen Sie, dass das Kriterium „jede Ecke ist mit mindestens der Hälfte aller Ecken benachbart" nicht notwendig für die Existenz eines perfekten Matchings ist.

Satz 28

Ein Graph mit $2n$ Ecken, die alle einen Grad $\geq n$ haben, hat stets ein perfektes Matching.

Beweis

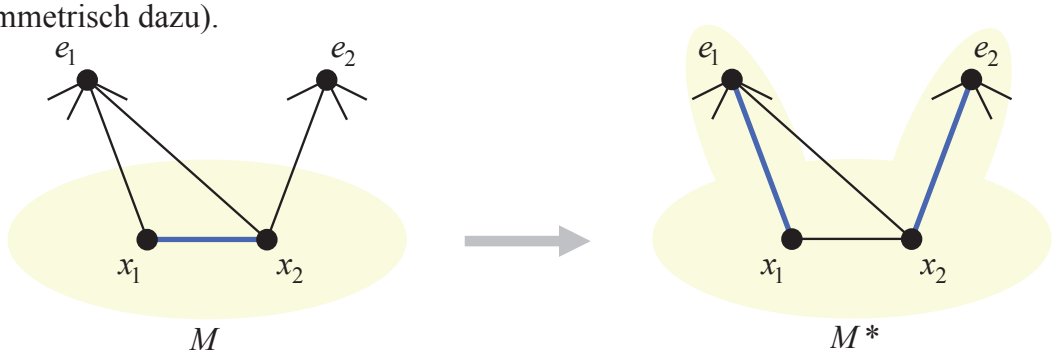
Sei G ein Graph mit $2n$ Ecken, die alle einen Grad $\geq n$ haben. Wir zeigen, dass man aus einem Matching M mit $m < n$ Kanten stets ein Matching M^* mit $m+1$ Kanten machen kann. Daraus folgt, dass G auch ein Matching mit *genau* n Kanten haben muss; und dies ist ‚automatisch' perfekt.

Ist M *erweiterbar*, so sind wir fertig (denn dann lässt sich ja M um eine neue Kante k zu einem Matching $M^* = M \cup \{k\}$ mit $m+1$ Kanten erweitern).

Sei nun also M *nicht erweiterbar*. Da M nur $m < n$ Kanten enthält, werden von M nur $2m < 2n$ Ecken gematcht. Es gibt also mindestens 2 Ecken e_1, e_2, die von M nicht gematcht werden. Diese Ecken können in G nicht adjazent sein (denn gäbe es die Kante e_1e_2, also eine Kante zwischen nicht-gematchten Ecken, so wäre M um diese Kante erweiterbar). Darum sind die mindestens n Kanten, die von e_1 ausgehen, sowie die mindestens n Kanten, die von e_2 ausgehen, alle verschieden; und darum ist die Gesamtzahl der von e_1 und e_2 ausgehenden Kanten mindestens $2n$.

Jede dieser Kanten führt zu einer gematchten Ecke (denn wäre etwa ein Nachbar x von e_1 nicht gematcht, dann wäre M um die Kante xe_1 erweiterbar); mit anderen

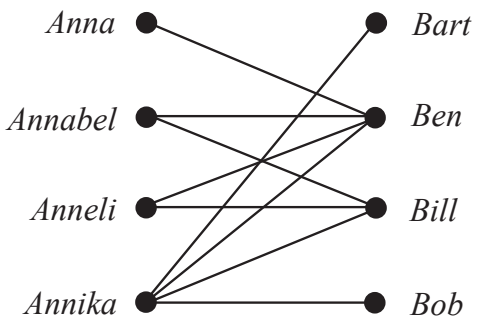
Worten: Jede dieser mindestens $2n$ Kanten ist mit einer Matchingkante aus M inzident. Von denen gibt es aber weniger als n; darum muss es mindestens eine Matchingkante x_1x_2 geben, die mit mindestens drei der von e_1, e_2 ausgehenden Kanten inzident ist (sonst könnte es nämlich höchstens $2m$ von e_1, e_2 ausgehende Kanten geben, also *weniger* als $2n$). Diese drei Kanten können weder alle nach e_1 noch alle nach e_2 führen; sondern sie müssen so liegen, wie in der Abbildung dargestellt (bzw. symmetrisch dazu).



Dann können wir aber sofort ein Matching M^* konstruieren, das eine Kante mehr als M hat: Wir verzichten einfach auf die Kante x_1x_2 in M und nehmen dafür die beiden Kanten e_1x_1 und e_2x_2 als neue Matchingkanten hinzu. ■

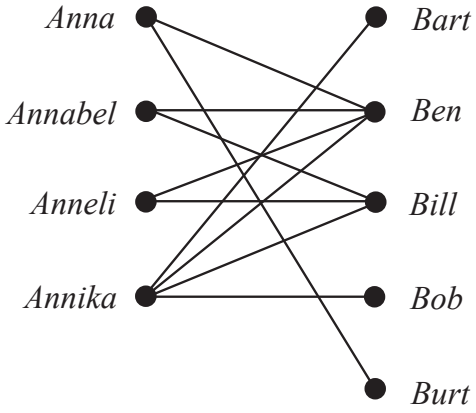
5.3 Matchings in bipartiten Graphen

Stellen Sie sich vor, Sie leiteten ein Ehevermittlungsinstitut und hätten zurzeit acht Heiratswillige in Ihrer Kartei, vier Frauen und vier Männer. Die Interessen-Konstellation der Aspiranten stellen Sie als bipartiten Graphen (‚Heiratsgraph') dar, dessen Kanten die einzelnen in Frage kommenden Heiraten repräsentieren (siehe folgende Abb.). Wenn eine Person zu einer anderen eine Neigung empfindet, die aber nicht erwidert wird, kommt eine Heirat natürlich nicht in Frage, und folglich wird keine Kante gezogen.



ÜBUNG 87 * Können Sie jede der acht Personen mit einem ihrer Wunschpartner verheiraten?

ÜBUNG 88 * Sie gewinnen einen weiteren Kunden (siehe folgende Abb.). Können Sie jeden Mann, jede Frau, jede Person mit einem Wunschpartner verheiraten?



Eine Verheiratung *aller* Personen entspricht einem perfekten Matching im Heiratsgraphen. Aber natürlich kann ein bipartiter Graph $G = (A \oplus B, K)$ allenfalls dann ein perfektes Matching haben, wenn $|A| = |B|$ ist; beim Heiratsproblem also allenfalls dann, wenn ebenso viele Frauen wie Männer zur Verfügung stehen. Wenn diese Minimalbedingung nicht erfüllt ist, kann man allenfalls noch die jeweils kleinere Gruppe ‚perfekt verheiraten'. Daher definieren wir:

Definition 18 *A*-perfektes Matching

Ein Matching in einem bipartiten Graphen $G = (A \oplus B, K)$ heißt *A-perfekt*, wenn es alle Ecken aus A matcht; und *B-perfekt*, wenn es alle Ecken von B matcht.

ÜBUNG 89 Zeigen Sie: Ein Matching in einem bipartiten Graphen $G = (A \oplus B, K)$ mit $|A| = |B|$ ist genau dann A-perfekt, wenn es B-perfekt ist.

ÜBUNG 90 Gibt es in dem ersten Heiratsgraphen auf der vorigen Seite (mit acht Personen) ein A-perfektes oder B-perfektes Matching?

Eine Verheiratung sämtlicher Frauen (auf gesetzestreue Weise) ist natürlich unmöglich, wenn deren Zahl größer als die der Männer ist. Doch nicht nur dann. Eine Verheiratung aller Frauen ist schon auch dann schon unmöglich, wenn dies für eine *Teil*menge der Frauen gilt: wenn es also eine Teilmenge mit n Frauen gibt, für die insgesamt weniger als n Männer als Heiratskandidaten zur Verfügung stehen. (Was symmetrisch natürlich auch für Männer gilt.) Bezeichnen wir mit $N(X)$ die Menge aller Ecken, die mit mindestens einer Ecke aus X adjazent sind (‚Menge der *Nachbar*ecken von X'), so können wir diese Erkenntnis folgendermaßen in der Sprache der Graphentheorie ausdrücken:

Satz 29 Heiratslemma

In einem bipartiten Graphen $G=(A\oplus B,K)$ kann es ein A-perfektes Matching allenfalls dann geben, wenn für jede Teilmenge $X\subseteq A$ gilt:

$$|N(X)|\geq|X|\ .$$

ÜBUNG 91 Beweisen Sie das Heiratslemma.

Die Bedingung $|N(X)|\geq|X|$ (für alle $X\subseteq A$) ist also eine *notwendige Bedingung* für die Existenz eines A-perfekten Matchings. Das ist unmittelbar einleuchtend. Weit weniger einleuchtend ist dagegen die erfreuliche Tatsache (die alles „so schön einfach" macht), dass die Bedingung sogar auch *hinreichend* ist:

Satz 30 Heiratssatz (Hall 1935)

In einem bipartiten Graphen $G=(A\oplus B,K)$ gibt es genau dann ein A-perfektes Matching, wenn für jede Teilmenge $X\subseteq A$ gilt:

$$|N(X)|\geq|X|\ .$$

Beweis

Nach dem Heiratslemma ist die Bedingung *notwendig*. Wir müssen hier also noch zeigen, dass sie auch *hinreichend* ist.

Sei also $G=(A\oplus B,K)$ ein bipartiter Graph, in dem für jede Teilmenge die Ungleichung $|N(X)|\geq|X|$ erfüllt ist. Wir zeigen, dass es dann in G ein A-perfektes Matching gibt. Das beweisen wir in zwei Schritten.

(1) Zuerst zeigen wir: Wenn ein Matching M in G nicht A-perfekt ist, dann gibt es ein Matching M', das eine Kante mehr enthält als M.

Beweis: Sei M ein Matching, das nicht A-perfekt ist. Dann gibt es mindestens eine von M nicht gematchte Ecke $a_0\in A$. Für $X=\{a_0\}$ gilt nach Voraussetzung $|N(\{a_0\})|\geq|\{a_0\}|=1$; d.h. a_0 hat mindestens einen Nachbarn $b_1\in B$.

Fall 1: b_1 ist ebenfalls nicht von M gematcht. Dann können wir M erweitern, indem wir die Kante a_0b_1 als neue Matchingkante hinzunehmen, d.h. $M'=M\cup\{a_0b_1\}$ ist ebenfalls ein Matching, und zwar mit einer Kante mehr als M.

Fall 2: b_1 ist von M gematcht. Der Matchingpartner sei $a_1\in A$. Wir wenden wieder die Voraussetzung an, diesmal auf die Menge $X=\{a_0,a_1\}$: Es gilt also $|N(\{a_0,a_1\})|\geq|\{a_0,a_1\}|=2$; d.h. es gibt eine zweite Ecke $b_2\neq b_1$, die zu a_0 oder zu a_1 benachbart ist.

Iteration

Fall 2.1: b_2 ist nicht von M gematcht. Dann sind wir fertig (s.u.).

Fall 2.2: b_2 ist von M gematcht, etwa durch die Kante $a_2b_2 \in K$.

Es gilt: $a_2 \neq a_0$, da a_2 gematcht ist, a_0 aber nicht.

$a_2 \neq a_1$, da sonst a_1b_1 und a_2b_2 zwei inzidente Matchingkanten wären.

Also sind a_0, a_1, a_2 drei verschiedene Ecken, und es es gilt für $X = \{a_0, a_1, a_2\}$ nach Voraussetzung analog zu eben: $|N(\{a_0, a_1, a_2\})| \geq |\{a_0, a_1, a_2\}| = 3$; d.h. es gibt mindestens eine weitere Ecke $b_3 \neq b_1, b_2$, die mit a_0, a_1 oder a_2 adjazent ist.

Iteration (fortlaufende Wiederholung) des letzten Schrittes muss irgendwann zu einer Ecke $b_m \in B$ führen, die *nicht* von M gematcht ist. (Die Iteration kann ja nicht unendlich weiterlaufen, da G nur endlich viele Ecken hat.)

Nach Konstruktion der Ecken a_i, b_i wissen wir nun: Es gibt in G einen Weg

$$W = b_m a_{k_1} b_{k_1} a_{k_2} b_{k_2} \ldots a_{k_n} b_{k_n} a_0$$

mit $m > k_1 > k_2 > \ldots > k_n > 0$, wobei die Kanten $a_{k_1}b_{k_1}, a_{k_2}b_{k_2}, \ldots, a_{k_n}b_{k_n}$ Matching-Kanten sind, die Kanten $b_m a_{k_1}, b_{k_1} a_{k_2}, \ldots, b_{k_{n-1}} a_{k_n}, b_{k_n} a_0$ dagegen nicht. Außerdem sind die Startecke b_m und die Zielecke a_0 nicht von M gematcht. Der Weg W ist also ein M-alternierender Weg. Durch Umfärben entlang W erhalten wir also aus M ein Matching M', das eine Kante mehr enthält als M. Das war unsere Behauptung (1).

(2) Das neue Matching M' kann bereits alle Ecken aus A matchen, also A-perfekt sein. Denn weil M' eine Kante mehr enthält (die zwischen A und B verläuft), wird von M' eine A-Ecke mehr gematcht als von M. Wenn M' nicht *alle* A-Ecken matcht, muss es nach (1) ein weiteres Matching M'' geben, das wiederum eine Kante mehr enthält als M' und daher auch eine A-Ecke mehr matcht als M'. Auch diesen Schritt können wir iterieren, und da A nicht unendlich viele Ecken enthält, muss diese Iteration irgendwann zu einem Ende kommen, d.h. zu einem Matching M^*, das schließlich sämtliche A-Ecken matcht, also A-perfekt ist.

Damit haben wir also gezeigt, dass es ein A-perfektes Matching geben muss, wenn $|N(X)| \geq |X|$ für jede Teilmenge $X \subseteq A$ gilt. ■

Dass Heiratsvermittler alle weiblichen oder alle männlichen Kunden mit einem Wunschpartner verheiraten können, wird eher die Ausnahme sein. Bipartite Graphen $G = (A \oplus B, K)$ haben eben oft weder ein A-perfektes noch ein B-perfektes Matching. Anders formuliert: Die Matchingzahl $m(G)$ ist meist kleiner als $|A|$ und $|B|$.

Wie wir gesehen haben, muss das daran liegen, dass mindestens eine Teilmenge X von A (bzw. B) mehr Elemente als Nachbarn hat. Es ist klar, dass dieses ‚Nachbar-Defizit' sich unmittelbar darauf auswirkt, wie viele Ecken von A (bzw. B) nicht ge-

matcht werden können, um wie viel also die Matchingzahl unter der gewünschten Zahl $|A|$ (bzw. $|B|$) liegt. Dieses ‚Nachbar-Defizit' einer Teilmenge $X \subseteq A$ bzw. $X \subseteq B$ ist natürlich einfach die Differenz $|X| - |N(X)|$.

Machen wir uns das noch einmal klar: Wenn es eine Gruppe von 15 Frauen gibt, die insgesamt nur 10 mögliche Heiratspartner hat, dann wissen wir, dass wir mindestens $15 - 10 = 5$ Frauen nicht verheiraten können, wie immer wir auch die Paarbildung vornehmen. Gibt es nun eine weitere Gruppe von, sagen wir, 19 Frauen, die insgesamt nur 12 mögliche Partner hat, so wissen wir sofort, dass mindestens 7 Frauen unverheiratet bleiben müssen. Was ist aber mit den vorigen 5 Frauen? Summieren sich die beiden einzelnen Defizite zu einem Gesamtdefizit von 12? Oder liegt das Gesamtdefizit irgendwo zwischen 7 und 12? Nein, *das Gesamtdefizit ist immer das Maximum aller Einzeldefizite*. Aus der Perspektive der Frauen formuliert: Wenn wir unter allen Teilmengen $X \subseteq A$ der Frauen nachschauen, für welche das Defizit $|X| - |N(X)|$ am größten ist (nennen wir dieses maximale Defizit *d*), dann wissen wir, dass es eine Verheiratung gibt, die alle bis auf *d* Frauen verheiratet.
Formal ist dieses Maximaldefizit $d = \max_{X \subseteq A}(|X| - |N(X)|)$. Damit gilt also:

Satz 31 Defizitsatz

Ein bipartiter Graph $G = (A \oplus B, K)$ hat die Matchingzahl

$$m(G) = |A| - \max_{X \subseteq A}(|X| - |N(X)|).$$

Aus Symmetriegründen muss dann (aus der Perspektive der Männer) auch gelten:

$$m(G) = |B| - \max_{X \subseteq B}(|X| - |N(X)|).$$

Beweis

Zur Abkürzung setzen wir wieder $d = \max_{X \subseteq A}(|X| - |N(X)|)$.

(1) Wie wir bereits überlegt haben, müssen bei jedem Matching *mindestens d* der *A*-Elemente ungematcht bleiben; es ist also sicher $m(G) \le |A| - d$.

(2) Nun müssen wir ‚nur' noch zeigen, dass auch die umgekehrte Ungleichung $m(G) \ge |A| - d$ gilt; denn unsere Behauptung lautet ja: $m(G) = |A| - d$. Den Beweis führen wir mit einem Trick. Anschaulich gesagt engagieren wir für die unverheiratet bleibenden (mindestens) *d* Frauen *d* zusätzliche Männer, und zwar so attraktive, dass sie für *jede* Frau als Partner in Frage kommen.

In der Sprache der Graphentheorie: Wir erweitern einfach die Menge *B* um eine Menge B' von *d* neuen Ecken, die wir mit sämtlichen Ecken in *A* durch eine Kante verbinden. Wir erhalten dadurch einen neuen Graphen $G' = (A \oplus (B \cup B'), K \cup K')$.
K' ist die Menge aller Kanten, die zwischen *A* und B' möglich sind. Bezeichnen wir in diesem neuen Graphen G' die Menge der Nachbarecken einer Teilmenge $X \subseteq A$

mit $N'(X)$, so ist klarerweise $N'(X) = N(X) \oplus B'$. Denn jede A-Ecke hat im neuen Graphen zusätzlich zu den bisherigen Nachbarn, die sie schon in G hatte, nun auch noch alle neuen Ecken aus B' als Nachbarn. In Anzahlen also: $|N'(X)| = |N(X)| + d$. Da d das Maximaldefizit ist, gilt für jedes $X \subseteq A$: $|N(X)| + d \geq |X|$. Insgesamt gilt damit $|N'(X)| = |N(X)| + d \geq |X|$, woraus nach dem Heiratssatz folgt, dass der neue Graph G' ein A-perfektes Matching M' hat, d.h. $|M'| = |A|$. (Der Heiratssatz sichert uns also die nicht ganz selbstverständliche Tatsache zu, dass die d neu engagierten Männer wirklich ausreichen, um alle Frauen mit Wunschpartnern zu verheiraten.)

Aus M' können wir ein Matching M in G machen, indem wir alle Kanten löschen, die nicht in G vorkommen; also alle, die in die neue Eckenmenge B' führen. Davon gibt es höchstens d. Daher ist $|M| \geq |M'| - d$ und wegen $|M'| = |A|$ folgt $|M| \geq |A| - d$. Da die Matchingzahl von G mindestens $|M|$ betragen muss, gilt also $m(G) \geq |A| - d$. Zusammen mit dem Ergebnis von (1) haben wir also gezeigt: $m(G) = |A| - d$. ■

5.4 Matchings in regulären bipartiten Graphen

ÜBUNG 92 * Welche der folgenden Graphen sind *regulär* (d.h. alle Ecken haben denselben Grad): der K^n, der $K^{m,n}$, die Kreisgraphen, die platonischen Polyedergraphen, die Radgraphen (Kreise, deren Ecken alle mit einer zusätzlichen Ecke im Zentrum adjazent sind)?

ÜBUNG 93 * Betrachten Sie die bipartiten Graphen $G = (A \oplus B, K)$, bei denen A und B unterschiedlich viele Ecken enthalten, d.h. $|A| \neq |B|$. Gibt es darunter auch reguläre Graphen? Wenn ja, zeichnen Sie einen.

Satz 32

In einem regulären bipartiten Graphen $G = (A \oplus B, K)$ gilt stets $|A| = |B|$.

Beweis

Haben alle Ecken in G den Grad k, so gehen von A insgesamt $k \cdot |A|$ Kanten aus. Von B gehen entsprechend $k \cdot |B|$ Kanten aus.

Da die Menge der von A ausgehenden Kanten gleich der Menge der von B ausgehenden ist, gilt $k \cdot |A| = k \cdot |B|$, also $|A| = |B|$. ■

ÜBUNG 94 * Zeichnen Sie einen regulären bipartiten Graphen $G = (A \oplus B, K)$, in dem es kein perfektes Matching gibt.

Satz 33

Ein regulärer bipartiter Graph hat stets ein perfektes Matching.

Beweis

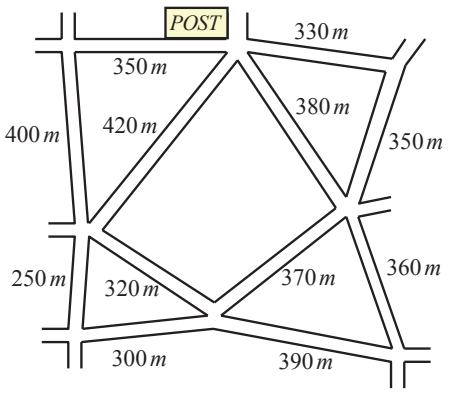
Sei $X \subseteq A$ eine beliebige Teilmenge. Haben alle Ecken den Grad k, so gehen von X insgesamt $k \cdot |X|$ Kanten aus, die alle nach $N(X)$ laufen. Von $N(X)$ gehen also mindestens ebenso viele Kanten aus, insgesamt $k \cdot |N(X)|$. Es gilt also $k \cdot |N(X)| \geq k \cdot |X|$, mithin ist $|N(X)| \geq |X|$. Nach dem Heiratssatz hat G demnach ein A-perfektes Matching, das wegen $|A| = |B|$ zugleich alle Ecken aus B matcht, also ein perfektes Matching ist. ■

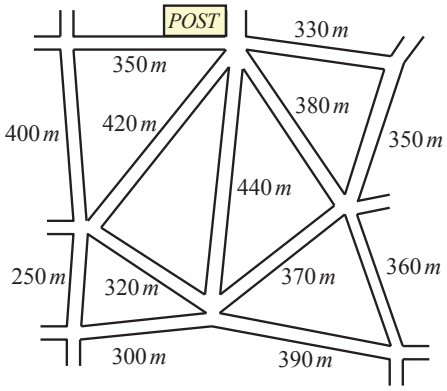
5.5 Das Briefträgerproblem

Stellen Sie sich vor, Sie müssten als Briefträger(in) Tag für Tag die Straßen Ihres Zustellbezirks ablaufen. Sie können sich vorstellen, dass es erstrebenswert ist, den Weg so kurz wie möglich zu gestalten. Diesem Problem wollen wir uns hier widmen, wobei wir zur Vereinfachung die Breite der Straßen nicht berücksichtigen wollen und auch nicht, dass Sie eigentlich auf beiden Straßenseiten Briefe zustellen müssten. Unsere vereinfachte *Regel* soll hier lauten: *BriefträgerInnen starten stets bei einer Straßenkreuzung, gehen durch jede Straße ihres Zustellbezirks und kehren schließlich wieder zum Startpunkt zurück.* Unser *Ziel* ist es, eine *möglichst kurze Briefträgertour* zu finden. (Ebenso könnten wir uns hier natürlich auch die optimale Routenplanung der Müllabfuhr vorstellen. Finden Sie weitere Anwendungen.)

ÜBUNG 95 *

Die Briefträgerin startet beim Postgebäude, geht durch jede Straße ihres Zustellbezirks und kehrt zum Postamt zurück. Wie könnte sie gehen? Wie lang ist ihre Tour, wenn sie keine Umwege geht?





Es wurde eine neue Straße gebaut. Um wie viel verlängert sich dadurch die Tour der Briefträgerin?

Wir können das Briefträgerproblem graphentheoretisch modellieren, indem wir die Zustellbezirke durch gewichtete Graphen repräsentieren: Straßen werden durch Kanten, Kreuzungen durch Ecken und Straßenlängen durch Kantengewichte repräsentiert.

ÜBUNG 96 Was ist eine Briefträgertour in der Sprache der Graphentheorie?

Briefträgerproblem (Chinese Postman Problem, CPP)

Eine Briefträgertour startet stets bei einer Straßenkreuzung, führt *mindestens einmal durch jede Straße* des Zustellbezirks und kehrt schließlich wieder zum Startpunkt zurück. Gesucht ist eine *kürzeste Briefträgertour*.

Graphentheoretische Modellierung:

Finde in einem gegebenen gewichteten zusammenhängenden Graphen eine Kantenfolge, die *jede Kante mindestens einmal* enthält und *minimales Gesamtgewicht* (hier passender: *minimale Gesamtlänge*) hat.

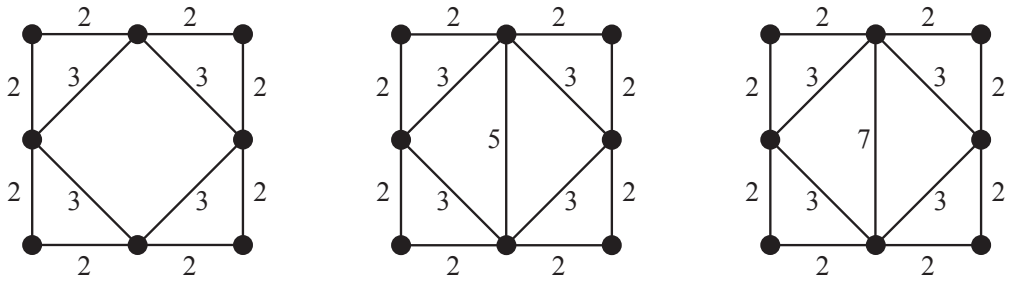
Im Kontext des Briefträgerproblems werden wir statt von *Gewichten* treffender von *Längen* sprechen.

Mitunter wird die englische Bezeichnung übersetzt als „Problem des chinesischen Briefträgers“. Aber das ist natürlich Unsinn, alle Briefträger dürften weltweit das gleiche Problem haben, nicht nur die chinesischen. Es handelt sich nicht um chinesische Briefträger, sondern um ein chinesisches Problem. In der korrekten Übersetzung sprechen wir daher von dem „chinesischen Briefträgerproblem“. – Und warum eigentlich *chinesisch*? Einfach deshalb, weil das Briefträgerproblem zuerst von dem chinesischen Mathematiker und Informatiker Mei-Ko Kuan in einer Publikation beschrieben und gelöst worden ist.[1]

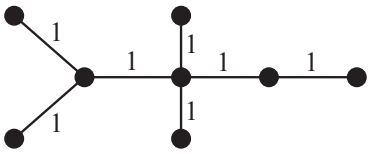
ÜBUNG 97 In welchen Graphen ist eine kürzeste Briefträgertour unmittelbar erkennbar?

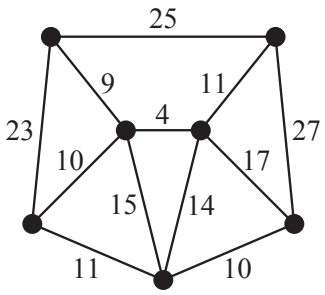
ÜBUNG 98 Ist es von Bedeutung, bei welcher Ecke eine Briefträgertour startet und endet?

ÜBUNG 99 Wie lang sind kürzeste Briefträgertouren in den folgenden Graphen?



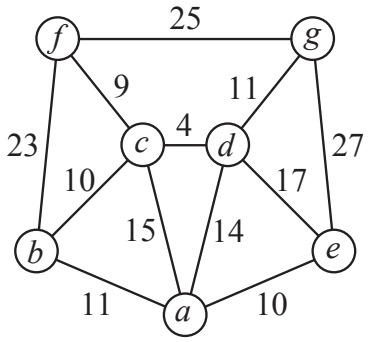
[1] Kuan, M.-K. (1962): Graphic programming using odd or even points, *Chinese Math.*, **1**, 273-277.





Systematische Lösung des Briefträgerproblems

Als Beispiel wählen wir den letzten Graphen aus Übung 99.



Seit dem Satz von Euler und Hierholzer wissen wir: Damit es überhaupt eine Briefträgertour gibt (die ja geschlossen sein muss), muss der Graph eulersch sein, also lauter gerade Ecken haben. Wenn der Graph nun aber nicht eulersch ist? Dann müssen wir ihn eben durch Hinzufügen von Kanten eulersch machen.

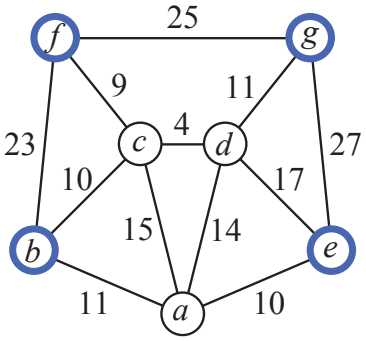
Wir können aber nicht einfach *zwei nicht-adjazente Ecken* durch einen neue Kante verbinden; das würde in der Realität bedeuten, dass der Briefträger sich eine neue Straße bauen würde. (Das wäre zwar prinzipiell auch eine Lösung seines Optimierungsproblems, aber keine, die wir als realistisch akzeptieren würden.) Wir können allenfalls dort eine Kante hinzufügen, wo bereits eine besteht, d.h. wir können allenfalls *bestehende Kanten verdoppeln*. Das hat in der Realität eine andere Bedeutung als den Neubau einer Straße; eine Doppelkante bedeutet einfach, dass die Briefträgertour durch diese Straße zweimal verläuft (und das ist wohl ein realistischer Lösungsansatz, den wir also akzeptieren).

Lösungsidee: ‚Minimale eulersche Kantenverdopplung'

Erweitere den Graphen durch *Verdopplung bestehender Kanten* zu einem *eulerschen Multigraphen*, und zwar so, dass die hinzugefügten Kanten *minimale Gesamtlänge* haben.

Schritt 1: Die ungeraden Ecken des Ausgangsgraphen bestimmen

Nach der Folgerung aus dem Handschlaglemma muss es stets eine gerade Anzahl ungerader Ecken geben.



Um nun die zu verdoppelnden Kanten zu finden, können wir nicht einfach Kanten wählen, die unmittelbar zwei ungerade Ecken miteinander verbinden. (In unserem Beispiel drängen sich die Kanten mit den Längen 23 bzw. 27 geradezu auf; sie sind aber nicht die optimale Wahl, denn:)

Damit würden wir zwar gewiss eine *minimale Anzahl* von Verdopplungskanten erzielen, wir wollen aber nicht die *Anzahl* der Verdopplungskanten minimieren, sondern ihre *Gesamtlänge*. Und da sind mehrere Kanten zusammen oft kürzer als eine lange. Um die zu verdoppelnden Kanten zu bestimmen, müssen wir also erst einmal alle kürzesten Wege zwischen ungeraden Ecken kennen.

Schritt 2: Zwischen den ungeraden Ecken paarweise die kürzesten Wege bestimmen

Start–Ziel	kürzester Weg	Länge
b–e	*bae*	21
b–f	*bcf*	19
b–g	*bcdg*	25
e–f	*edcf*	30
e–g	*eg*	27
f–g	*fcdg*	24

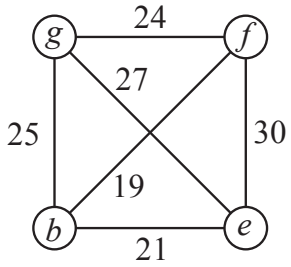
Nun müssen wir uns entscheiden, welche dieser kürzesten Wege wir wählen wollen: Bei dieser Wahl muss *jede der ungeraden Ecken mit genau einem kürzesten Weg* (der von ihr losgeht bzw. bei ihr endet) inzident sein (denn wir wollen ihren ungeraden Grad ja durch genau eine zusätzliche Kante geradzahlig machen). Mit anderen Worten: Jede ungerade Ecke muss durch einen der kürzesten Wege *gematcht* werden.

Dazu ist es am bequemsten, die ungeraden Ecken in einem neuen Graphen darzustellen und jeden kürzesten Weg im Ausgangsgraphen hier durch eine gewichtete Kante darzustellen, deren Länge die Länge des von ihr repräsentierten kürzesten Weges ist. Da wir immer sämtliche kürzesten Wege zwischen ungeraden Ecken berücksichtigen müssen, ist dieser Graph bei jeder Lösung des Briefträgerproblems immer vollständig. (Dieser vollständige Graph der ungeraden Ecken ist eigentlich nichts anderes als eine übersichtlichere Darstellung der Tabelle von Schritt 2.)

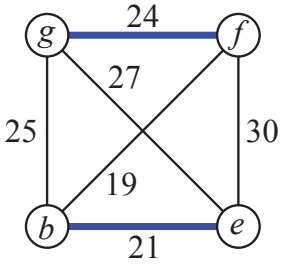
Wir finden die zu wählenden kürzesten Wege offenbar einfach dadurch, dass wir in

diesem vollständigen Graphen ein Matching bestimmen, das jede Ecke matcht und dabei zugleich möglichst geringe Gesamtlänge hat. Kurz: *Die optimale Wahl kürzester Wege für die Kantenverdopplung ist ein minimales perfektes Matching im vollständigen Graphen der ungeraden Ecken.*

Schritt 3: Den vollständigen Graphen der ungeraden Ecken zeichnen und mit den Längen der kürzesten Wege gewichten

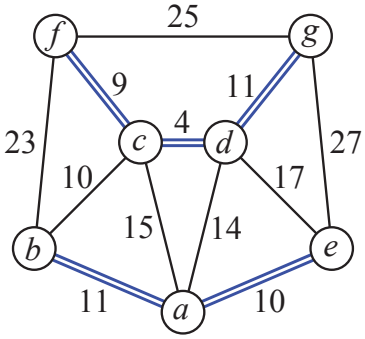


Schritt 4: In diesem gewichteten vollständigen Graphen der ungeraden Ecken ein minimales perfektes Matching bestimmen



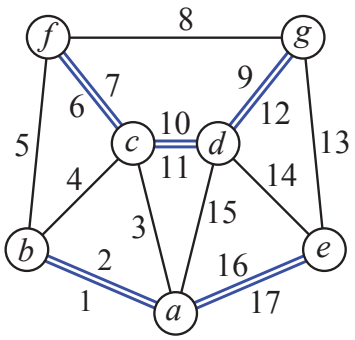
Nun können wir die im Ausgangsgraphen zu verdoppelnden Kanten leicht bestimmen, indem wir die Matchingkanten in kürzeste Wege des Ausgangsgraphen ‚zurückübersetzen'.

Schritt 5: Entlang der den Matchingkanten entsprechenden kürzesten Wege im Ausgangsgraphen alle Kanten verdoppeln



In unserem Beispiel wird das ursprüngliche Gesamtgewicht 176 durch das Gewicht der Kantenverdopplung also um 45 erhöht. Eine kürzeste Briefträgertour hat hier demnach die Länge 221.

Schritt 6: *Im erweiterten Ausgangsgraphen (der nun eulersch ist) eine geschlossene Eulertour konstruieren.*



Dazu können wir im erweiterten (nunmehr eulerschen) Multigraphen den Eulertour-Algorithmus anwenden. Eine kürzeste Briefträgertour ist in unserem Beispiel etwa *abacbfcfgdcdgedaea*.

Bei vielen Problemlösungen ist es klug, auch den *Worst Case* zu betrachten, also den schlechtesten anzunehmenden Fall. Das wollen wir hier auch so halten. Das Worst-Case-Szenario bilden beim Briefträgerproblem die ‚heimtückischsten' Zustellbezirke.

Wir wollen einen Zustellbezirk *heimtückisch* nennen, wenn er auf den ersten Blick viel kürzer erscheint als er wirklich ist; genauer: wenn die Länge einer kürzesten Briefträgertour sehr viel größer ist als die bloße Gesamtlänge seiner Straßen.

Natürlich kann die Länge einer Briefträgertour nie größer sein als die doppelte Gesamtlänge seiner Straßen. Denn bei einer eulerschen Kantenverdopplung muss man nicht befürchten, mehr als *jede* Kante verdoppeln zu müssen. (Das hört sich logisch trivial an. Doch warum ist wirklich nie eine Kantenver*drei*fachung oder -ver*vier*-fachung erforderlich?)

Die *heimtückischsten Zustellbezirke* wären also die, in denen BriefträgerInnen jede Straße doppelt gehen müssten. Aber gibt es die überhaupt? Wenn nicht, was wären dann die heimtückischsten?

ÜBUNG 100 Charakterisieren Sie die heimtückischsten Zustellbezirke.

Satz 34 **Worst-Case-Satz (**für das Briefträgerproblem)

Die zusammenhängenden Graphen, bei denen man für eine Briefträgertour jede Kante verdoppeln muss, sind genau die Bäume.

Beweis

Wir zeigen, dass in jedem Ausgangsgraphen eine Kante, die eine *Brücke* ist, unbedingt verdoppelt werden muss. Daraus folgt die Behauptung unmittelbar, da die Bäume genau diejenigen zusammenhängenden Graphen sind, deren Kanten lauter Brücken sind.

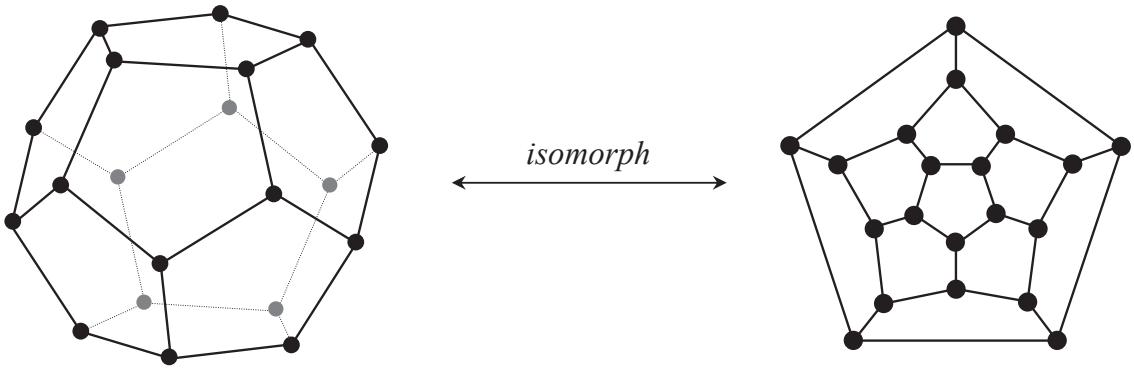
Wir erinnern uns: eine Brücke ist eine Kante, die auf keinem Kreis liegt, bei deren Löschen also ein ursprünglich zusammenhängender Graph in zwei getrennte Komponenten auseinander fallen würde. Dass eine Brücke unbedingt verdoppelt werden muss, können wir uns nun leicht indirekt klar machen: Würden wir eine Brücke *nicht* verdoppeln, so wäre sie auch im erweiterten Graphen noch eine Brücke. Sobald die Briefträgertour diese Brücke überquert hätte, könnte der Briefträger von den Ecken, die er nach Überqueren noch besuchen wird, niemals mehr zu den Ecken zurückkehren, die er bereits vor der Überquerung besucht hatte. Er könnte also nicht mehr zur Startecke zurückkehren. Das muss er aber. ■

ÜBUNG 101 Zeigen Sie: Ein Graph mit einer Brücke (oder mehreren) muss Ecken von ungeradem Grad haben.

6 Plättbare Graphen

Im Abschnitt über hamiltonsche Graphen haben wir gesehen, dass der Dodekaedergraph isomorph in die Ebene abgebildet werden kann. Das heißt, wir können einen Graphen (*Bildgraph*) zeichnen, der dieselbe Ecken-Kanten-Struktur hat wie das Dodekaeder, der aber „nichts Räumliches mehr an sich hat“: Seine Ecken sind Punkte der Ebene, und seine Kanten sind Kurven (im Spezialfall: Strecken) der Ebene, und diese Kurven haben miteinander keine Punkte gemeinsam, mit Ausnahme der Ecken.

In der Sprache der Graphentheorie sagen wir: Der Dodekaedergraph ist *plättbar*. Denn er ist isomorph zu einem *planaren* Bildgraphen.



plättbarer Graph *planarer Graph*

Definition 19 planarer Graph, plättbarer Graph

(1) Ein *planarer Graph* ist ein Paar $G = (E, K)$ mit

(a) $E \subset \mathbb{R}^2$ ist eine Menge von Punkten der Ebene;

(b) K ist eine endliche Menge von Kurven in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit

– jede Kurve $k \in K$ verbindet zwei verschiedene Ecken $a, b \in E$

– jede Kurve $k \in K$ ist doppelpunktfrei
(d.h. sie läuft nicht mehrmals durch denselben Punkt)

– zwei verschiedene Kurven $k_1, k_2 \in K$ sind kreuzungsfrei (d.h. sie haben außer evtl. Endpunkten keine Punkte gemeinsam).

(2) Ein Graph heißt *plättbar*, wenn er zu einem planaren Graphen isomorph ist.

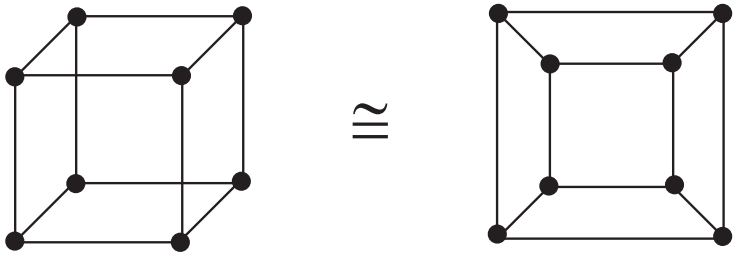
6.1 Polyedergraphen

Wir können ein Polyeder auf nahe liegende Weise unmittelbar als Graph auffassen:

Definition 20 Polyedergraph

Unter dem *Polyedergraphen* eines Polyeders verstehen wir den Graphen seiner Ecken und Kanten.

Nicht nur der Dodekaedergraph ist plättbar. Für den Würfelgraphen (Hexaedergrahen) ist die Plättbarkeit sehr viel leichter zu erkennen:



Was wir hier für Dodekaeder und Würfel überlegt haben, gilt aber viel allgemeiner, nämlich für jedes konvexe Polyeder.

Satz 35 Polyedersatz

Der Polyedergraph eines jeden konvexen Polyeders ist plättbar.

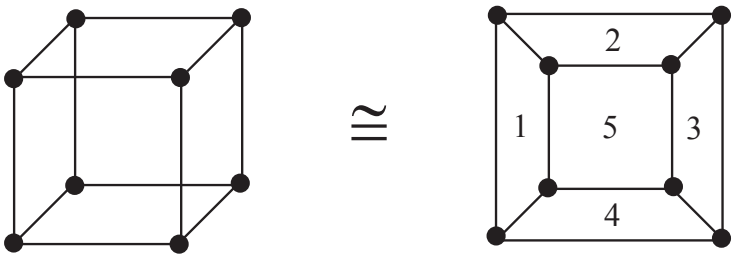
Beweis (anschaulich)

Wir müssen zwischen dem Polyeder und seinem Polyedergraphen unterscheiden. Ein Polyedergraph besteht gemäß unserer Definition allein aus Ecken und Kanten, er hat also keine Flächen (wie das Polyeder selbst). Allerdings ist jede Fläche des zugrunde

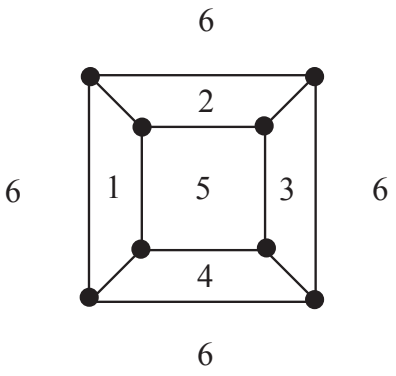
liegenden Polyeders auch am Polyedergraphen durch ihre Ecken und Kanten vollständig repräsentiert und sichtbar.

Für den Beweis nehmen wir die ‚topologische Perspektive' ein, d.h. wir stellen uns vor, dass das Material des Polyedergraphen aus beliebig dehnbarem und unzerreißbarem Material besteht. Nun richten wir den Polyedergraphen so aus, dass eine frei wählbare Fläche F des Polyeders (genauer: die dazu gehörenden Ecken und Kanten im Polyedergraphen) parallel zum Boden ist, und der gesamte Rest des Polyedergraphen darunter liegt, also zwischen dieser Fläche und dem Boden. Wir engagieren nun n Helfer, die an den n Ecken von F anfassen und diese Fläche soweit geradlinig auseinander ziehen, bis wir beim Blick genau senkrecht von oben alle Kanten und Ecken so sehen können, dass keine Kante unter einer anderen verläuft. Dann sehen wir den Polyedergraphen als planaren Graphen auf die Bodenebene abgebildet. (Alternative Bilder: Wir projizieren mit einer senkrecht über dem Polyedergraphen angebrachten Lampe den Schatten der Ecken und Kanten in die Bodenebene. Oder wir fotografieren den Polyedergraphen von oben.) ■

Ein Würfel hat bekanntlich 6 Flächen. (Die Übereinstimmung dieser Zahl mit der Zahl der deutschen Schulnoten ist übrigens rein zufällig.) Diesen Flächen entsprechen beim isomorphen planaren Graphen von Kanten umrandeten Gebiete. Wenn wir diese allerdings zählen, kommen wir nur auf 5. Wie ist das zu erklären?



Der Beweis des Polyedersatzes enthält den entscheidenden Hinweis: Beim Plätten eines Polyedergraphen öffnen wir ja eine Fläche, um durch sie hindurch den ganzen Rest sehen zu können. Das Gebiet im planaren Graphen, das dieser Fläche entspricht, ist also das gesamte (unendlich große) *äußere Gebiet*, das ein planarer Graphen stets hat. Es ist der Teil der Ebene, der von seinen endlichen Gebieten ‚übriggelassen' wird:

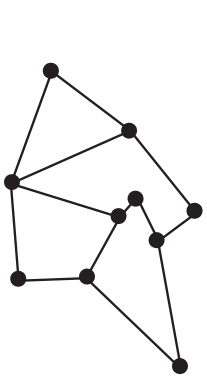
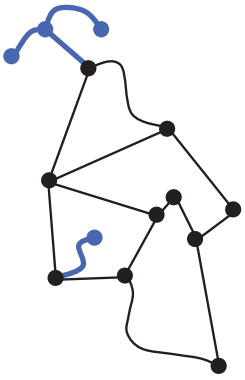
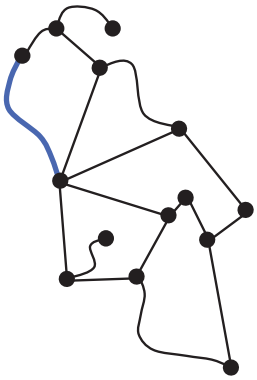


Die Anzahlen von Ecken, Kanten und Flächen stehen bei jedem *konvexen (!)* Polyeder in einem berühmten Zusammenhang, den Euler entdeckt hat. Die *Eulersche Polyederformel* sagt aus, dass für Eckenzahl e, Kantenzahl k und Flächenzahl f stets $e-k+f=2$ gilt. Allerdings gilt das keineswegs nur für Polyeder und Polyedergraphen. Vielmehr ist diese Formel für *sämtliche planaren Graphen* richtig, vorausgesetzt, sie sind *zusammenhängend*.

Das folgende Beispiel zeigt etwas Allgemeines:

Operation 1 *Hinzufügen einer neuen Endecke (mit neuer Kante)*: Dies erhöht die Eckenzahl und die Kantenzahl, nicht aber die Flächenzahl.

Operation 2 *Verbinden zweier zuvor nicht adjazenter Ecken durch eine neue Kante*: Dies erhöht die Kanten- und die Flächenzahl, nicht aber die Eckenzahl.

			
Eckenzahl	10	10 + 4	10 + 4
– Kantenzahl	13	13 + 4	13 + 4 + 1
+ Flächenzahl	5	5	5 + 1
=	2	2	2

Diese Erkenntnis ist unabhängig von dem gewählten Beispiel: Ein neues Gebiet kann *allein* durch Operation 2 entstehen, nämlich dann, wenn zwei zuvor nicht adjazente Ecken durch eine neue Kante verbunden werden. Die neue Kante verläuft über ein zuvor zusammenhängendes Gebiet, das durch die Kante *geteilt* wird. Bei Operation 1 wird lediglich eine Kante mit einer Endecke in ein Gebiet hineingelegt, die das Gebiet *nicht durchtrennt*. – Welche Bedeutung haben die beiden Operationen für die Gültigkeit der Eulerschen Formel?

– Wenn vor Ausführen von Operation 1 die Eulersche Formel $e_{\text{alt}}-k_{\text{alt}}+f_{\text{alt}}=2$ gilt, dann gilt sie auch anschließend. Denn es gilt

$$e_{\text{neu}}-k_{\text{neu}}+f_{\text{neu}}=(e_{\text{alt}}+1)-(k_{\text{alt}}+1)+f_{\text{alt}}=e_{\text{alt}}-k_{\text{alt}}+f_{\text{alt}}=2$$

– Wenn vor Ausführen von Operation 2 die Eulersche Formel $e_{\text{alt}}-k_{\text{alt}}+f_{\text{alt}}=2$ gilt, dann gilt sie auch anschließend. Denn es gilt

$$e_{\text{neu}}-k_{\text{neu}}+f_{\text{neu}}=e_{\text{alt}}-(k_{\text{alt}}+1)+(f_{\text{alt}}+1)=e_{\text{alt}}-k_{\text{alt}}+f_{\text{alt}}=2$$

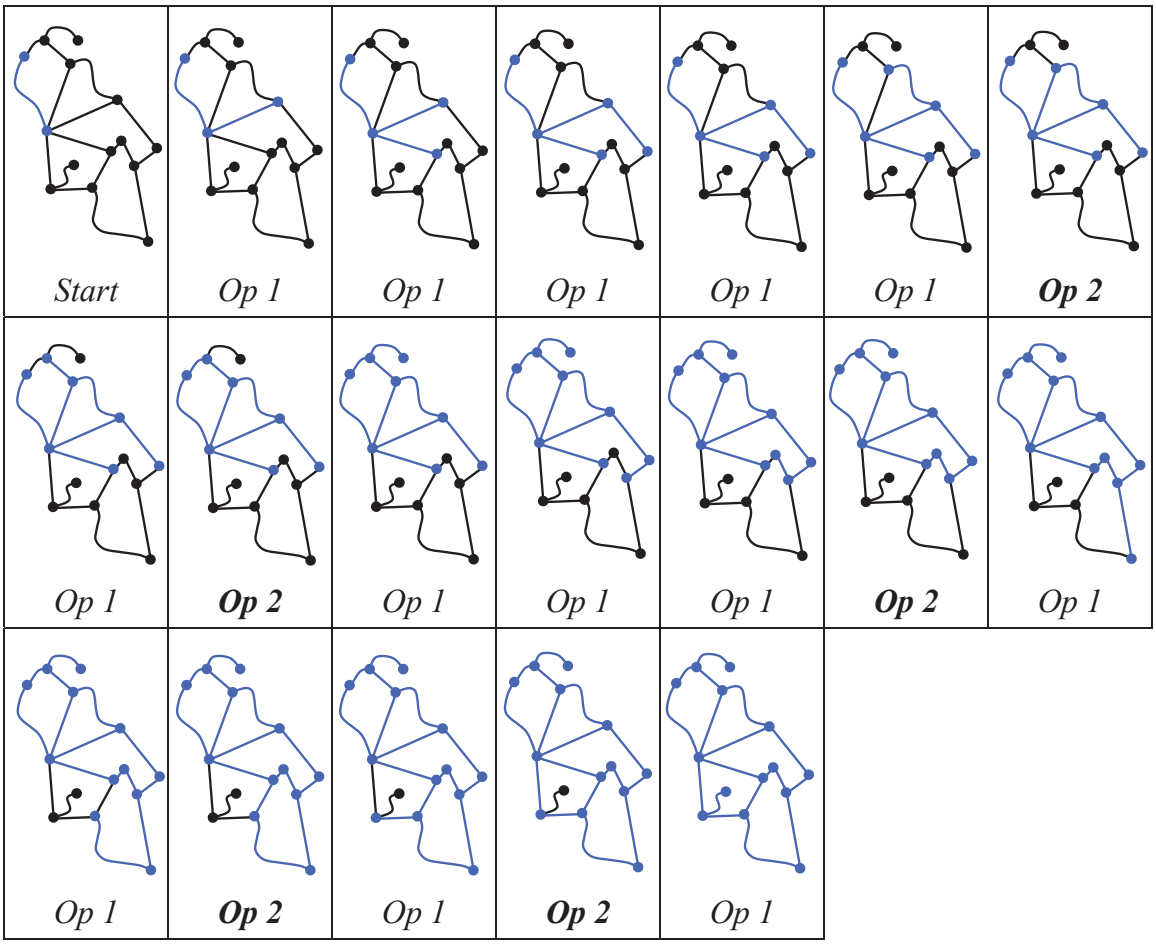
Außerdem erkennen wir: *Jeden* planaren zusammenhängenden Graphen können wir *schrittweise aufbauen*, indem wir folgenden sehr einfachen Algorithmus anwenden:

Planargraph-Algorithmus
(zum Zeichnen eines jeden zusammenhängenden planaren Graphen)

Anfang: Wir zeichnen zuerst (irgend-)eine Kante und ihre beiden Ecken.

Schritt: In jedem weiteren Schritt führen wir
entweder *Operation 1* oder *Operation 2* aus
bis alle Ecken und Kanten des Graphen gezeichnet worden sind.

Wir demonstrieren den Planargraph-Algorithmus im folgenden Beispiel ausführlich und notieren jeweils die angewandte Operation (die Schritte sind zeilenweise notiert). In jedem Schritt sind nur die gefärbten Kanten und Ecken bereits ‚existent'; die nichtgefärbten zeigen nur den weiteren ‚Bauplan' des Graphen.



Nach dem Anfangsschritt besteht der Graph lediglich aus einer Kante, zwei Ecken sowie einem Gebiet. (Warum *ein* Gebiet? Nun, wenn auf einer großen Wiese nur zwei Zaunpfähle stehen, zwischen denen ein Stück Zaun gespannt ist, dann kann eine Kuh fressen, wo sie will. Um sie herum ist also *ein* einziges großes Feld.)

Wir fassen unsere Erkenntnisse zusammen:

1. Mit dem Planargraph-Algorithmus kann jeder planare zusammenhängende Graph schrittweise gezeichnet werden.
2. Nach dem Startschritt gilt die Eulersche Formel für den bis dahin gezeichneten Untergraphen.
3. In jedem weiteren Schritt bleibt die Formel gültig, egal ob Operation 1 oder Operation 2angewandt wurde.

Folgerung: Wenn der Algorithmus stoppt, wenn also der Graph fertig gezeichnet ist, gilt die Eulersche Formel immer noch.

Wir haben damit bewiesen:

Satz 36 Eulersche Polyederformel für Graphen

In jedem zusammenhängenden planaren Graphen gilt:

$$Eckenzahl - Kantenzahl + Gebietezahl = 2\,.$$

Dies ist die allgemeinere, graphentheoretische Form dieser Formel. Da Polyedergraphen immer zusammenhängende Graphen sind und nach dem Polyedersatz auch plättbar sind, und da die Flächen des Polyeders bijektiv den Gebieten des planaren Graphen entsprechen, auf den der Polyedergraph beim Plätten abgebildet wird, folgt als Spezialfall daraus unmittelbar:

Satz 37 Eulersche Polyederformel

Für jedes konvexe Polyeder gilt:

$$Eckenzahl - Kantenzahl + Flächenzahl = 2\,.$$

ÜBUNG 102 Verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel für den archimedischen Körper *Ikosaederstumpf (‚Fußball')*. Er entsteht aus einem Ikosaeder durch geschicktes Abschneiden der Ecken (daher die Bezeichnung ‚-stumpf').



ÜBUNG 103 Zeigen Sie an geeigneten Gegenbeispielen, dass die Eulersche Polyederformel für nicht-plättbare und für planare, aber nicht zusammenhängende Graphen nicht gilt. (Gilt sie für solche Graphen niemals oder nicht immer?)

ÜBUNG 104 Zeigen Sie an Beispielen, dass die Eulersche Polyederformel für nichtkonvexe Polyeder i.a. nicht gilt. (Zeichnen Sie diese Polyeder.)

ÜBUNG 105 Zeichnen Sie auf einem Torus einige Punkte und verbinden Sie diese kreuzungsfrei durch Kanten. Sie erhalten einen Torusgraphen. Zeigen Sie, dass für Torusgraphen die Eulersche Polyederformel im allgemeinen nicht gilt.

Wenn man die Mittelpunkte der Flächen eines konvexen Polyeders P als neue Ecken wählt und zwei neue Ecken genau dann durch eine neue Kante verbindet, wenn die Flächen eine gemeinsame Kante haben, erhält man das zu P *duale Polyeder* P^D. (Es besteht also aus den neuen Ecken und Kanten.)

ÜBUNG 106 Bestimmen Sie die dualen Polyeder der platonischen Körper.

ÜBUNG 107 Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Ecken-, Kanten- und Flächenzahlen eines Polyeders und seines dualen Polyeders?

6.2 Streckengraphen

Wenn wir im Beweis des Polyedersatzes noch weitere Helfer engagieren, dann können wir gewährleisten, dass beim Auseinanderziehen *sämtliche* Kanten gespannt bleiben (die oberen nur entsprechend stärker). So können wir erzwingen, dass der Bildgraph nicht nur in der Ebene liegt (also planar ist), sondern dass alle seine Kanten sogar *Strecken* sind. Das kann man mit jedem plättbaren Graphen machen, nicht nur mit Polyedergraphen: Wenn ein Graph also überhaupt zu einem planaren Graphen isomorph ist, dann auch zu einem planaren Graphen, dessen Kanten Strecken sind.

Definition 21 Streckengraph

Ein planarer Graph, dessen Kanten Strecken sind, heißt *Streckengraph*.

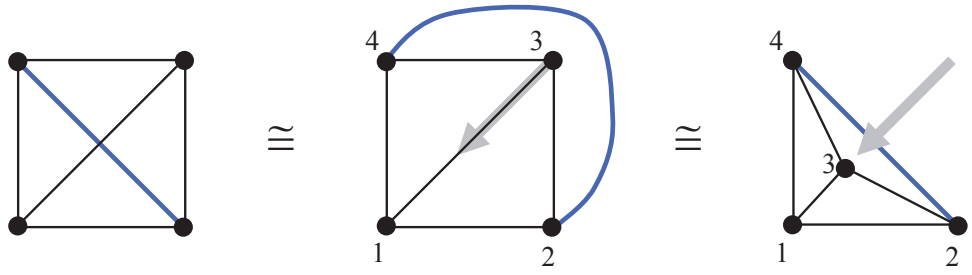
Was wir gerade anschaulich plausibel gemacht haben, lässt sich streng formal nur recht aufwendig beweisen. Diesen Beweis hat Fáry geführt:

Satz 38 (Fáry 1948)

Jeder plättbare Graph ist isomorph zu einem Streckengraphen.

Beweis (Idee)

Die Idee von Fárys Beweis können wir am vollständigen Graphen K^4 demonstrieren:



In der üblichen Darstellungsform ist der K^4 nicht planar, da die beiden Diagonalenkanten nicht kreuzungsfrei sind (linke Abb.). Man kann den K^4 jedoch isomorph neuzeichnen, indem man eine der Diagonalen durch das äußere Gebiet legt (mittlere Abb.). Diese neugezeichnete Kante ist zunächst gebogen; wenn man sie aber zu einer Strecke ‚strammzieht', sieht man, wie man die ‚störende Ecke' 3 verschieben muss, damit alle Kanten zu Strecken werden (rechte Abb.).

ÜBUNG 108 Führen Sie die Operation des ‚Strammziehens' an komplizierteren Beispielen durch, um planare Nicht-Streckengraphen in isomorphe Streckengraphen zu überführen.

6.3 Die Zweidrittel-Ungleichung

ÜBUNG 109 * Berechnen Sie die Kantenzahl eines Ikosaeders allein aus dem Namen (*Ikosaeder* = *Zwanzigflächner*) und der Tatsache, dass seine Flächen Dreiecke sind.

ÜBUNG 110 (1) Was können Sie über die Kantenzahl eines konvexen Polyeders sagen, das insgesamt 92 Flächen hat?
(2) Wie viele Kanten hat das *Dodecaedron simum*, ein archimedischer Körper mit 80 Dreiecken und 12 Fünfecken (s. Abb.)?



Satz 39 Zweidrittel-Ungleichung

In Polyedern und in planaren Graphen gilt stets

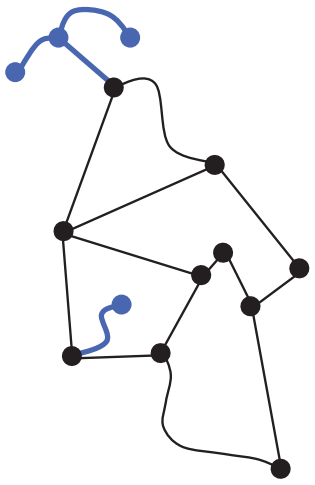
$$3f \le 2k \text{ bzw. } f \le \tfrac{2}{3}k .$$

(Dabei ist k die Kantenzahl und f die Flächen- bzw. Gebietezahl.)

Die Flächen- bzw. Gebietezahl beträgt also stets höchstens zwei Drittel der Kantenzahl. Dies gilt – im Gegensatz zur Eulerschen Formel – nicht nur für konvexe Polyeder, sondern für beliebige. Und analog nicht nur für zusammenhängende, sondern für beliebige planare Graphen.

Beweis der Zweidrittel-Ungleichung

(1) Wir können die Kanten eines Polyeders ‚flächenweise' zählen, indem wir für alle Flächen ihre Kantenzahlen addieren (‚Kantensumme'). Sind die Polyederflächen ausschließlich Dreiecke, so ist die Kantensumme gleich $3f$. (Weniger Kanten als 3 kann eine Polyederfläche nicht haben.) Hat auch nur *eine* der Flächen mehr als 3 Kanten, so ist die Kantensumme *größer* als $3f$. In jedem Fall ist die Kantensumme also $\ge 3f$. Da jede Polyederkante zu genau zwei Flächen gehört, haben wir bei unserer Kantensumme aber jede Kante genau zweimal gezählt. Die Kantensumme ist also stets genau die doppelte Kantenzahl, d.h. gleich $2k$. Insgesamt gilt also in jedem Fall die Ungleichung $3f \le 2k$. (Eine ähnliche Situation kennen wir übrigens bereits vom Handschlaglemma. Dort haben wir die Kantenzahl zwar nicht flächen-, sondern eckenweise gezählt; aber wir erhielten ebenfalls die doppelte Kantenzahl, weil jede Kante auch zu genau zwei Ecken gehört.)



(2) Für planare Graphen gilt die gleiche Überlegung wie für Polyeder, allerdings mit einer kleinen Ergänzung: Anders als bei Polyedern muss eine Kante hier nicht unbedingt zum Rand eines Gebietes gehören (wenn sie das tut, dann gehört sie natürlich wieder zu *genau zwei* Gebieten). Sie kann auch einfach eine *innere Kante* sein, also *in* einem Gebiet liegen (wie die vier hervorgehobenen Kanten in der Abbildung). *Ohne* innere Kanten gilt natürlich für planare Graphen genau wie bei Polyedern $3f \le 2k$. Wenn wir nun beliebig viele innere Kanten hinzufügen, bleibt diese Ungleichung aber weiterhin gültig. Denn da durch Hinzufügen einer inneren Kante kein neues Gebiet entsteht, erhöhen neue innere Kanten nur die Kantenzahl k, nicht aber die Gebietezahl f.
Wenn also die Ungleichung $3f \le 2k$ ohne innere Kanten galt, dann gilt sie *erst recht* nach Hinzufügen von inneren Kanten. ■

Die Zweidrittel-Ungleichung ist bei einer ganzen Reihe von Beweisen hilfreich.

ÜBUNG 111 * (1) Zeichnen Sie einen planaren Graphen, bei dem jede Ecke mindestens den Grad 5 hat.
(2) Zeichnen Sie einen planaren Graphen, bei dem jede Ecke mindestens den Grad 6 hat.

Satz 40

Jeder (endliche) planare Graph hat mindestens eine Ecke vom Grad ≤ 5.

Beweis

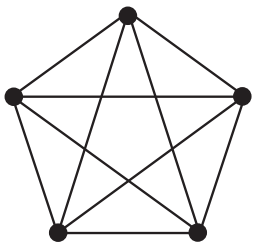
Wäre bei einem planaren Graphen jeder Eckengrad ≥ 6, so wäre die Summe aller Eckengrade mindestens $6e$, nach dem Handschlaglemma wäre also $2k \geq 6e$ bzw. $e \leq \frac{1}{3}k$. Nach der Zweidrittel-Ungleichung ist $3f \leq 2k$ bzw. $f \leq \frac{2}{3}k$. Nach der Eulerschen Polyederformel wäre dann $2 = e - k + f \leq \frac{1}{3}k - k + \frac{2}{3}k = 0$ – Widerspruch. ■

ÜBUNG 112 Was können Sie über die Kantenzahl eines planaren Graphen sagen, in dem jede Ecke mindestens den Grad 5 hat? (Gehen Sie wie im Beweis des letzten Satzes vor.)

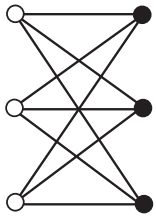
6.4 Die Plättbarkeit von Graphen

ÜBUNG 113 * In einem sehr kleinen Städtchen soll jedes Haus mit dem Elektrizitätswerk, dem Wasserwerk und dem Gaswerk durch Leitungen verbunden werden. Und zwar so, dass Leitungen einander niemals kreuzen (d.h. niemals in verschiedenen Bodentiefen übereinander verlaufen). Wie viele Häuser darf das Städtchen höchstens haben?

Welche Graphen sind denn nun plättbar und welche nicht? Zunächst einmal machen wir uns leicht klar: Bei gegebener Eckenzahl ist ein Graph umso eher *nicht plättbar*, je mehr Kanten er enthält. Denn sie müssen ja alle kreuzungsfrei in die Ebene abgebildet werden, was natürlich bei steigender Kantenzahl immer schwieriger wird. Wenn wir *nicht-plättbare* Graphen suchen, sind daher *vollständige* Graphen besonders ‚verdächtige' Kandidaten. Und in der Tat: Schon die sehr einfachen vollständigen Graphen K^5 und $K^{3,3}$ sind bereits nicht mehr plättbar (und damit die komplizierteren erst recht nicht).



K^5



$K^{3,3}$

Die einfachsten nicht-plättbaren Graphen

Satz 41

Die Graphen K^5 und $K^{3,3}$ sind nicht plättbar.

Beweis

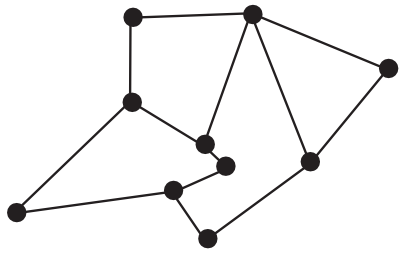
(1) Angenommen, es gäbe einen planaren Graphen *G*, der isomorph zum K^5 ist. Beide haben die Eckenzahl $e = 5$ und die Kantenzahl $k = \frac{1}{2}e(e-1) = 10$. Für *G* müsste die Eulersche Polyederformel gelten: $2 = e - k + f = 5 - 10 + f$ (siehe Satz 36). Also hätte *G* die Gebietezahl $f = 7$. Nach der Zweidrittel-Ungleichung ($3f \le 2k$) würde daraus folgen: $3 \cdot 7 = 3f \le 2k = 2 \cdot 10$, also $21 \le 20$ – Widerspruch. Der K^5 kann also nicht plättbar sein.

(2) Angenommen, es gäbe einen planaren Graphen *G*, der isomorph zum $K^{3,3}$ ist. Beide haben die Eckenzahl $e = 6$ und die Kantenzahl $k = 9$. Für *G* müsste die Eulersche Polyederformel gelten: $2 = e - k + f = 6 - 9 + f$. Also hätte *G* die Gebietezahl $f = 5$. Da der $K^{3,3}$ keine ungeraden Kreise enthält, gilt das auch für *G*; alle Gebiete von *G* müssten also von mindestens 4 Kanten berandet sein. Nach unserer Überlegung im Beweis der Zweidrittel-Ungleichung gilt dann $4f \le 2k$ bzw. $f \le \frac{1}{2}k = 4{,}5$ – Widerspruch. Der $K^{3,3}$ kann also nicht plättbar sein. ■

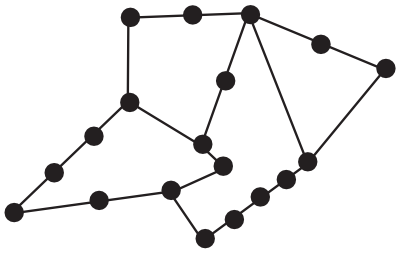
Da der K^5 und der $K^{3,3}$ nicht plättbar sind, kann auch kein Graph plättbar sein, der ‚komplizierter aufgebaut' ist als diese beiden. Den Begriff ‚komplizierter aufgebaut' müssen wir präzisieren:

Definition 22 Unterteilung

Sei *G* ein Graph. Unter einer *Unterteilung* von *G* verstehen wir einen Graphen, der aus *G* durch Einfügen von Ecken (vom Grad 2) in eine oder mehrere Kanten von *G* entsteht. (*G* betrachten wir dabei ebenfalls als eine Unterteilung von sich.)



G



eine Unterteilung von G

Es ist klar, dass kein Graph plättbar sein kann, der eine Unterteilung des K^5 oder des $K^{3,3}$ enthält (der also einen Untergraphen hat, der zu einer Unterteilung des K^5 oder des $K^{3,3}$ isomorph ist). Denn hätten wir eine Darstellung eines solchen Graphen in der Ebene, so könnten wir darin einfach alle Unterteilungs-Ecken (vom Grad 2) entfernen (sowie evtl. überflüssige Ecken und Kanten) und hätten sofort eine Zeichnung des K^5 oder des $K^{3,3}$ in der Ebene; was aber ausgeschlossen ist.

Es gilt also der folgende Satz:

Satz 42

Ein Graph, der eine Unterteilung des K^5 oder eine Unterteilung des $K^{3,3}$ enthält, kann nicht plättbar sein.

Mit anderen Worten: Eine *notwendige Bedingung für die Plättbarkeit* eines Graphen ist, dass er weder eine Unterteilung des K^5 noch eine Unterteilung des $K^{3,3}$ enthält. Interessanterweise ist diese Bedingung aber *auch hinreichend*, wie Kuratowski bewiesen hat:

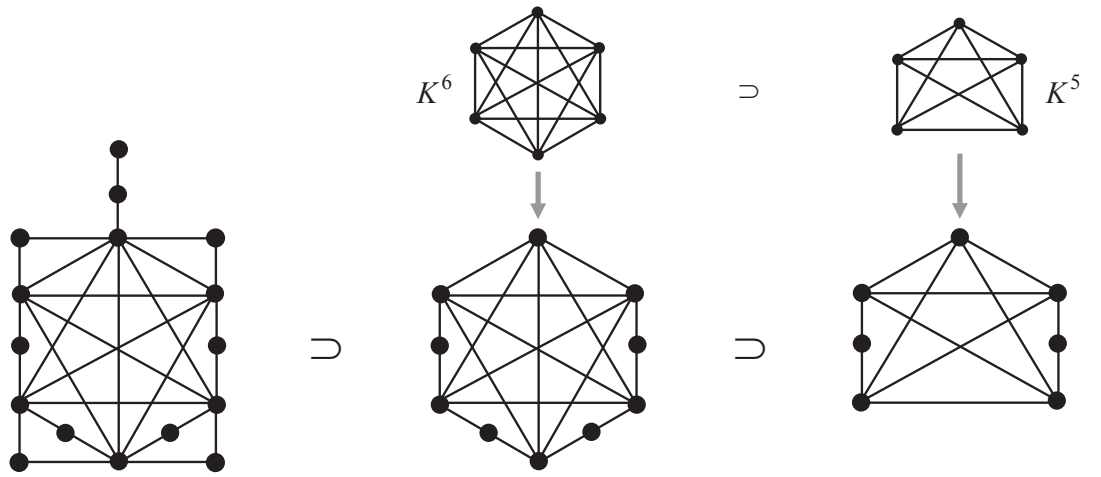
Satz 43 (Kuratowski 1930)

Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn er weder eine Unterteilung des K^5 noch eine Unterteilung des $K^{3,3}$ enthält.

Ausführlicher formuliert: Ein Graph ist genau dann plättbar, wenn weder er selbst noch irgendein Untergraph isomorph zu einer Unterteilung des K^5 oder des $K^{3,3}$ ist.

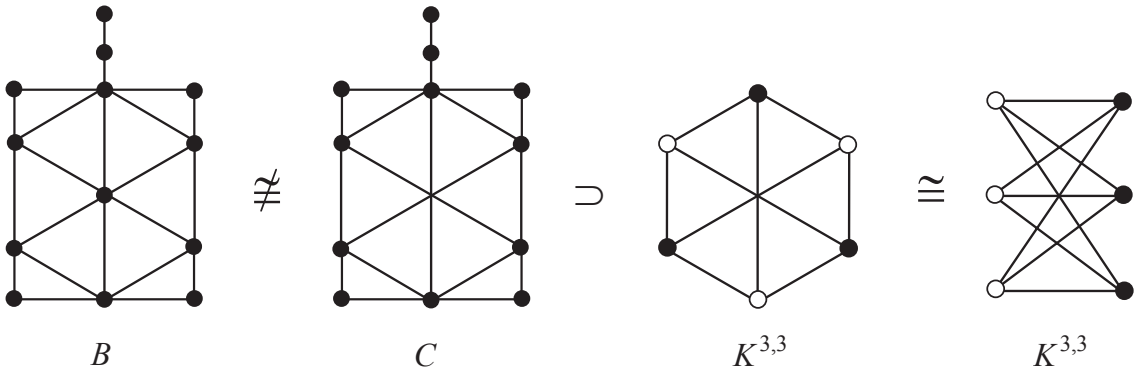
Beispiel 1

A enthält eine Unterteilung des K^6, und daher auch eine Unterteilung des K^5. *A* ist also nicht plättbar (s. Abb. nächste Seite).



Beispiel 2

B ist offensichtlich plättbar (nämlich schon planar). C ist dagegen nicht plättbar; denn C enthält einen Untergraphen, der isomorph zum $K^{3,3}$ ist.



6.5 Die Plättbarkeit von Multigraphen

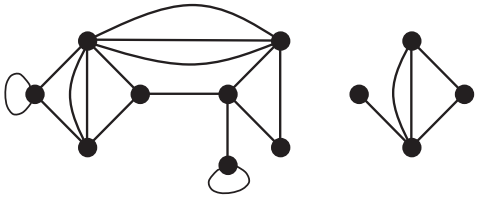
Mit dem Satz von Kuratowski ist die Frage der Plättbarkeit schlichter Graphen vollständig geklärt. Wie steht es aber mit *Multi*graphen?

Diese Frage wirft kein Problem auf. Denn um jede Einfachkante, die zwischen zwei Ecken in der Ebene verläuft, ohne andere Kanten zu kreuzen, ist stets genug Platz für einen (beliebig schmalen und ebenfalls kreuzungsfreien) ‚Kanal', durch den wir beliebig viele parallele Kanten zwischen diesen Ecken legen können; wir können jede Einfachkante gewissermaßen zu einer Mehrfachkante aufspleißen. Und an jeder Ecke ist neben einer oder zwischen zwei Kanteneinmündungen stets Platz für einen (beliebig kleinen) ‚Balkon', in den wir beliebig viele Schlingen legen können.

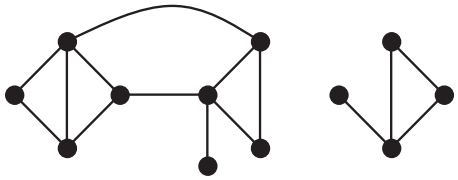
Wir sehen also: Die Frage der Plättbarkeit eines Multigraphen reduziert sich auf die Frage nach der Plättbarkeit des ihm zugrunde liegenden schlichten Graphen. Diesen bezeichnen wir als die *Reduktion* des Multigraphen.

Definition 23 Reduktion

Unter der *Reduktion* eines Multigraphen G verstehen wir den schlichten Graphen G^-, der dieselbe Eckenmenge wie G hat und aus G entsteht, indem man alle Schlingen löscht und von jeder Mehrfachkante alle Kanten bis auf eine löscht.



Ein Multigraph ...



... und seine Reduktion

Wir halten unsere Erkenntnis in dem folgenden einfachen Satz fest:

Satz 44 Reduktionssatz

Ein Multigraph ist genau dann plättbar, wenn seine Reduktion plättbar ist.

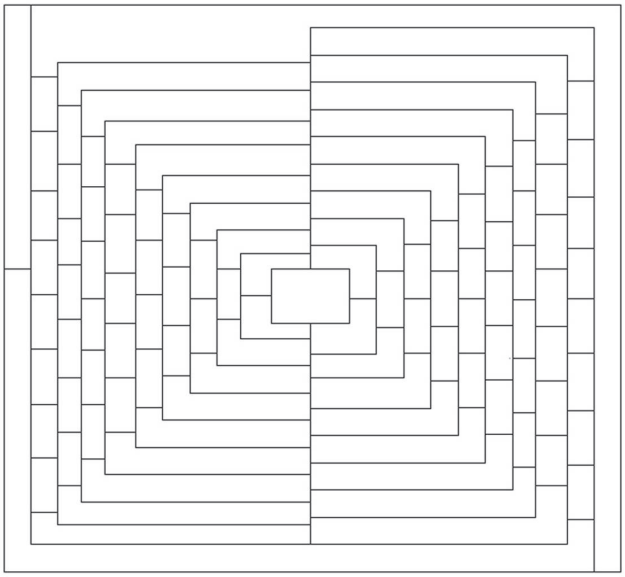
Beweis

Wir haben bereits gezeigt, dass die Plättbarkeit eines Multigraphen unmittelbar aus der Plättbarkeit seiner Reduktion folgt. Umgekehrt ist natürlich klar, dass wenn ein Multigraph plättbar ist, dann erst recht seine Reduktion plättbar ist. Es gilt also Äquivalenz. ■

7 Färbungen

Färbungen von Graphen sind motiviert durch die Färbungen von Landkarten. Auf Landkarten sind benachbarte Länder in der Regel in unterschiedlichen Farben gefärbt.

ÜBUNG 114 Färben Sie die Länder der abgebildeten ‚Landkarte' mit möglichst wenig Farben. Aber mit folgender Spielregel: Länder mit einer gemeinsamen Grenze müssen stets verschieden gefärbt sein! (Können Sie *beweisen*, dass es keine Färbung mit weniger Farben gibt?)



Die reine Nachbarschaftsstruktur einer Landkarte können wir einfach darstellen; dazu müssen wir nicht die genaue Form der Länder zeichnen: Wir legen einfach in jedes Land eine (dieses Land repräsentierende) Ecke und verbinden zwei Ecken genau dann miteinander, wenn die beiden Länder, die durch die Ecken repräsentiert werden, eine gemeinsame Grenzlinie haben. Sollte es Länder geben, die nur einen Punkt gemeinsam haben, wie etwa zwei gegenüberliegende Tortenstücke, so würden wir sie *nicht* als benachbart bezeichnen. Die Kante zwischen den beiden Ecken können wir stets durch die gemeinsame Grenzlinie der beiden repräsentierten Länder legen.

Den Graphen, den wir zu einer Landkarte L auf diese Weise konstruieren, nennen wir den *Landkartengraphen* zu L. Nach unserer Konstruktion ist ein Landkartengraph stets *planar*. Denn wir können zwei Kanten stets so legen, dass sie allenfalls in Ecken gemeinsame Punkte haben. (Das wäre nicht möglich, wenn wir das punktuelle Aneinanderstoßen, wie bei Tortenstücken, schon als Benachbartheit auffassen würden; denn dann werden wir in der Regel gezwungen sein, die Kanten durch genau diesen einen Punkt zu legen, so dass wir Kreuzungen nicht immer verhindern könnten. Sollten zwei Länder zwei oder mehrere separate gemeinsame Grenzlinien haben, zeichnen wir dennoch nur eine Kante; Motto: ‚mehr als benachbart geht nicht'. Landkartengraphen sind also stets schlichte Graphen.

7.1 Färbungen und chromatische Zahl

Die Färbung von Landkarten inspiriert uns zur folgenden Definition; analog zur Färbung von Ecken können wir auch Kanten färben, in beiden Fällen sollen adjazente bzw. inzidente Objekte verschieden gefärbt sein:

Definition 24 Eckenfärbung, Kantenfärbung

(1) Eine *Eckenfärbung* (kurz *Färbung*) eines Graphen $G=(E,K)$ ist eine Abbildung $f:E\to F$ mit $f(a)\neq f(b)$ für adjazente Ecken $a,b\in E$. Die Elemente von F heißen *Farben*, $f(a)$ heißt *Farbe der Ecke a*.

(2) Eine *Kantenfärbung* eines Graphen $G=(E,K)$ ist eine Abbildung $f:K\to F$ mit $f(k_1)\neq f(k_2)$ für inzidente Kanten $k_1,k_2\in K$. Die Elemente von F heißen *Kantenfarben*, $f(k)$ heißt *Farbe der Kante k*.

Interessant ist die Frage, wie viele verschiedene Farben wir mindestens benötigen, um einen gegebenen Graphen (seine Ecken oder seine Kanten) zu färben.

Definition 25 Chromatische Zahl

(1) Hat ein Graph $G=(E,K)$ eine (Ecken-)Färbung $f:E\to F$ mit $k=|F|$ Farben, so heißt G k-färbbar.

(2) Die kleinste Zahl k, für die ein Graph G k-färbbar ist, nennen wir die *chromatische Zahl* von G (die chromatische Zahl von G bezeichnen wir mit $\chi(G)$; gesprochen *‚chi von G'*).

(3) Hat ein Graph G die chromatische Zahl k, so nennen wir G *k-chromatisch*.

Bei *Kanten*färbungen definieren wir analog; wie verwenden dann aber die ausführlichen Bezeichnungen *k-kantenfärbbar*, *kantenchromatische Zahl* $\tilde{\chi}(G)$ sowie *k-kantenchromatisch*. Wenn wir die Art der Färbung nicht ausdrücklich festlegen, beziehen wir uns immer auf *Ecken*färbungen.

ÜBUNG 115 Welche chromatische Zahl hat der vollständige bipartite Graph $K^{m,n}$? Wie steht es mit anderen bipartiten Graphen?

ÜBUNG 116 Wie groß ist die chromatische Zahl des vollständigen Graphen K^n?

ÜBUNG 117 Ist die kantenchromatische Zahl des vollständigen Graphen K^n immer gleich n?

Satz 45

Hat ein Graph G den maximalen Eckengrad $d_{\max}(G)$, so gilt:

$$\chi(G) \leq d_{\max}(G) + 1$$

7.2 Das Vierfarbenproblem

Neben dem Königsberger Brückenproblem war es die Frage der Färbbarkeit von Landkarten mit möglichst wenig Farben (auch dies zunächst eine Frage der damaligen Unterhaltungsmathematik), die den Anstoß zur Entwicklung der Graphentheorie gegeben hat. Es bestand von Anbeginn an die Überzeugung, dass man mit höchstens 4 Farben jede Landkarte auf der Kugel bzw. in der Ebene so färben kann, dass Länder mit gemeinsamer Grenze stets verschieden gefärbt sind (*Vierfarbenvermutung*). Aber so einfach die Vermutung auch schien, man konnte sie nicht beweisen.

ÜBUNG 118 * Zeichnen Sie eine möglichst einfache Landkarte, zu deren Färbung man mindestens 4 Farben braucht.

Heawood bewies, dass man immer mit 5 Farben auskommt:

Satz 46 Fünffarbensatz (Heawood 1890)

Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

Äquivalent als Satz über Landkartenfärbungen formuliert: Jede Landkarte in der Ebene oder auf der Kugel (aber z.B. *nicht* auf einem torusförmigen künstlichen Planeten) kann mit 5 oder weniger Farben so gefärbt werden, dass benachbarte Länder

verschiedene Farben haben. Erst viel später gelang es Appel und Haken, den Beweis (nach bedeutenden Vorarbeiten von Heesch und mit sehr intensiver Unterstützung von Computern) zu führen:

Satz 47 Vierfarbensatz (Appel und Haken 1977)

Jeder planare Graph ist 4-färbbar.

Zur Geschichte des Vierfarbenproblems

Dieses Problem ist eines der berühmtesten in der Geschichte der Mathematik. Weil es nämlich so einfach aussieht und doch über mehr als ein Jahrhundert lang nicht gelöst werden konnte.

1852 fiel dem Londoner Geographie-Studenten ***Francis Guthrie (1831–1899)*** auf, dass er die Landkarte von Großbritannien mit nur vier Farben so färben konnte, dass benachbarte Regionen verschiedenfarbig waren; ob das wohl immer so sei, fragte er seinen Bruder Frederick, der es ‚ja eigentlich wissen musste', denn er studierte Mathematik. Der wusste es aber auch nicht und wandte sich deshalb an einen seiner Professoren, ***Augustus DeMorgan (1806–1871)***. DeMorgan schrieb umgehend an ***Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)*** und gab eine Karte an, zu deren Färbung mindestens 4 Farben nötig sind.

Im Jahr 1878 wurde das Vierfarbenproblem zum ersten Mal in einer Publikation erwähnt; Autor war ***Arthur Cayley (1821–1895)***. 1879 erschien dann im *American Journal of Mathematics* ein viel beachteter Beweis der Vierfarbenvermutung, interessanterweise nicht von einem Mathematiker, sondern von dem Londoner Juristen ***Sir Alfred Bray Kempe (1849–1922)***. Rund zehn Jahre lang dachte man, das Vierfarbenproblem sei damit gelöst, bis ***Percy John Heawood (1861–1955)*** in Kempes Beweis einen Fehler fand. Dennoch ist Kempes Leistung hoch zu bewerten, denn er hatte ein wichtiges Instrument zur Untersuchung von Graphenfärbungen entdeckt, die später so genannten ‚Kempeketten'. Heawood bewies 1890, dass jede Landkarte auf jeden Fall mit 5 Farben auf die gewünschte Weise gefärbt werden kann. 1922 bewies der amerikanische Mathematiker ***George David Birkhoff (1884–1944)***, dass die Vierfarbenvermutung für alle Landkarten mit bis zu 25 Ländern wahr ist.

Der deutsche Mathematiker ***Heinrich Heesch (1906–1995)*** hat den größten Teil seines beruflichen Lebens auf Untersuchungen zum Vierfarbenproblem verwandt. Er hätte es vielleicht auch gelöst, die dazu nötige Ausstattung an Personal und Computern fiel aber der Sparsamkeit zum Opfer, die deutsche Ministerien auch damals schon pflegten. Doch war seine Arbeit nicht vergebens: Auf seinen Methoden und Resultaten aufbauend, gelang schließlich Appel und Haken der Beweis.

Als ich 1975 als Student den in den USA lehrenden deutschen Mathematiker ***Wolfgang Haken (geb. 1928)*** im Scherz fragte, wann er denn endlich den Beweis der Vierfarbenvermutung fertig hätte, antwortete er: „Nächstes Jahr". Alle Anwesenden schmunzelten nur – außer Haken. Aber er behielt recht: 1976 lag der Beweis der Vierfarbenvermutung von ihm und ***Kenneth Appel (geb. 1932)*** wirklich vor.

Er war allerdings nicht leicht zu lesen, denn er bestand zum größten Teil aus Computerberechnungen, die auf fast einem Kubikmeter Papier ausgedruckt waren. Der Beweis ist inzwischen wiederholt überprüft und bestätigt worden. Aber einen Beweis, den man auf, sagen wir, einigen Dutzend Buchseiten unterbringen könnte, gibt es bis heute nicht …

8 Digraphen

In diesem Kapitel werden wir uns mit der graphentheoretischen Modellierung bestimmter Wettkampfsituationen beschäftigen. Uns interessiert dabei besonders die Frage, ob und wie wir am Ende des Wettkampfs eine Rangliste der Teilnehmer aufstellen können. Wir konzentrieren uns hier auf *Turniere*, das sind Wettkämpfe der Form ‚Jeder gegen jeden'.

8.1 Schlichte Digraphen

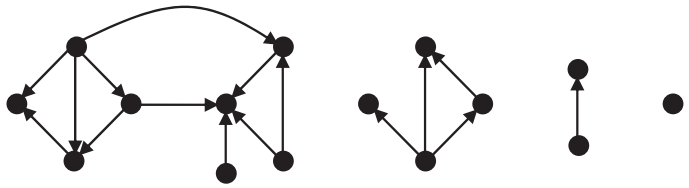
Jeden schlichten Graphen G können wir zu einem schlichten Digraphen $\vec{G}$ machen, indem wir jede Kante von G orientieren, indem wir also für jede Kante eine Richtung festlegen, in der sie durchlaufen werden soll.

Definition 26 schlichter Digraph

Ein *schlichter Digraph* ist ein Paar $\vec{G} = (E, \vec{K})$ aus einer endlichen Eckenmenge E und einer Kantenmenge $\vec{K} \subseteq E^2$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $(a,b) \in \vec{K} \Rightarrow a \neq b$ (d.h. es gibt keine Schlingen);
2. $(a,b) \in \vec{K} \Rightarrow (b,a) \notin \vec{K}$ (d.h. zwischen zwei Ecken gibt es höchstens eine Kante).

Die Kanten $(a,b) \in \vec{K}$ heißen *orientiert (gerichtet)*; die Kante $(a,b) \in \vec{K}$ hat die *Orientierung (Richtung)* ‚von a nach b'.



schlichter Digraph

Eine Kantenfolge, ein Kantenzug, ein Weg oder ein Kreis des ungerichteten Graphen G bleibt auch im gerichteten Graphen $\vec{G}$ eine Kantenfolge, ein Kantenzug, ein Weg oder ein Kreis. Beim Durchlaufen wird man allerdings einige Kanten *in* ihrer Richtung durchlaufen, andere *entgegen* ihrer Richtung. Kann man dagegen *alle Kanten in ihrer Richtung durchlaufen*, so sprechen wir von einer *gerichteten* Kantenfolge, einem gerichteten Kantenzug, Weg oder Kreis.

Eine formale Definition dieser gerichteten Objekte erhalten wir unmittelbar aus der entsprechenden Definition ihrer ungerichteten Verwandten (vgl. Definition 317); wir müssen nur die Kanten jeweils richtig orientieren.

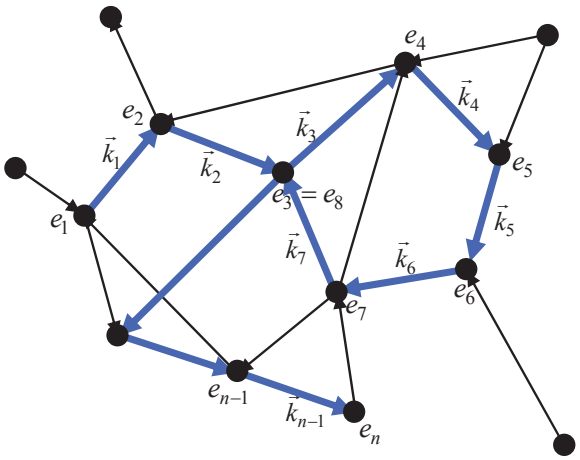
Definition 27 gerichtete Kantenfolgen, Kantenzüge, Wege, Kreise

(5) Eine *gerichtete Kantenfolge* in einem Digraphen $\vec{G}=(E,\vec{K})$ ist eine Folge $e_1\vec{k}_1e_2\vec{k}_2e_3\ldots e_{n-1}\vec{k}_{n-1}e_n$ von Ecken e_i und gerichteten Kanten $\vec{k}_i$ mit $\vec{k}_i=\overrightarrow{e_ie_{i+1}}$ (für $i=1,\ldots,n-1$). Sind Start- und Zielecke gleich ($e_1=e_n$), so heißt die gerichtete Kantenfolge *geschlossen*. Sind Start- und Zielecke verschieden ($e_1\neq e_n$), so heißt die gerichtete Kantenfolge *offen*. Die Anzahl ihrer Kanten heißt *Länge* der Kantenfolge.

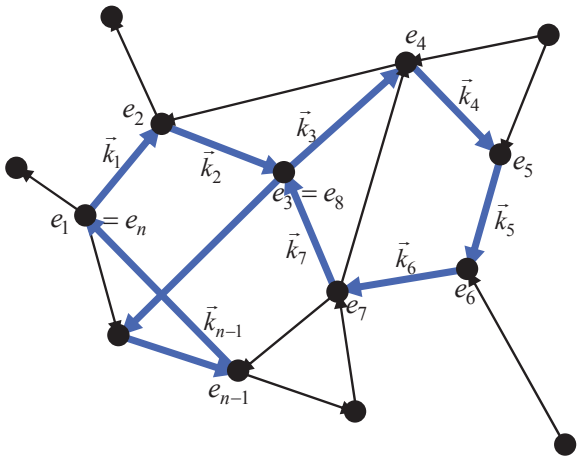
(6) Ein *gerichteter Kantenzug* in einem Digraphen $\vec{G}=(E,\vec{K})$ ist eine gerichtete Kantenfolge, in der alle Kanten paarweise verschieden sind.

(7) Ein *gerichteter Weg* in einem Digraphen $\vec{G}=(E,\vec{K})$ ist eine gerichtete Kantenfolge, in der alle Kanten und alle Ecken paarweise verschieden sind.

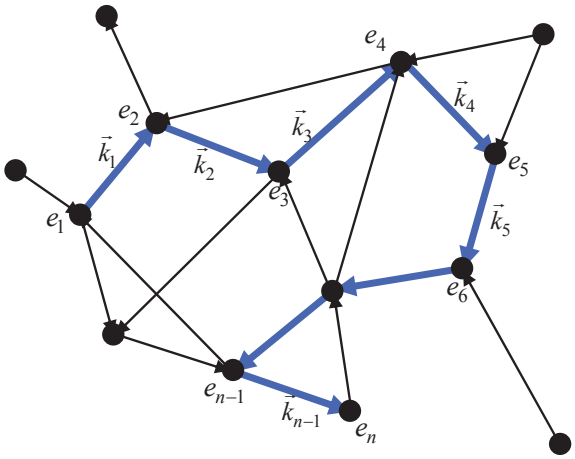
(8) Ein *gerichteter Kreis* in einem Digraphen $\vec{G}=(E,\vec{K})$ ist ein geschlossener gerichteter Weg.



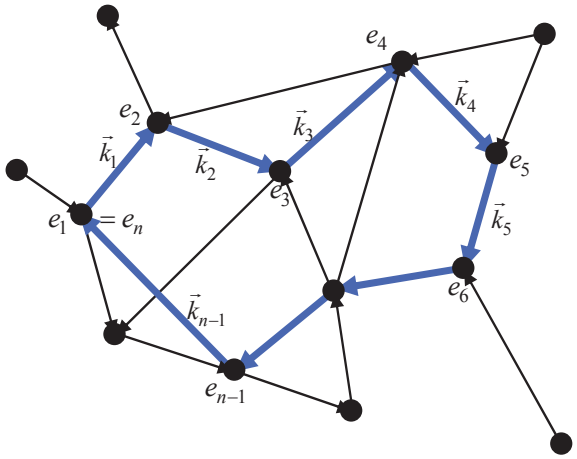
offener gerichteter Kantenzug



geschlossener gerichteter Kantenzug



offener gerichteter Weg



geschlossener gerichteter Weg (gerichteter Kreis)

Auch bei gerichteten Wegen und Kreisen ist die Frage interessant, ob sie sämtliche Ecken des Digraphen enthalten:

Definition 28 gerichteter Hamiltonweg, gerichteter Hamiltonkreis

(1) Ein gerichteter Weg bzw. Kreis in einem schlichten Digraphen $\vec{G}$, der sämtliche Ecken von $\vec{G}$ enthält, heißt *gerichteter Hamiltonweg* bzw. *gerichteter Hamiltonkreis* in $\vec{G}$.

(2) Ein *hamiltonscher Digraph* ist ein schlichter Digraph, der einen gerichteten Hamiltonkreis enthält.

Da wir in einem Digraphen manchmal unterscheiden müssen, ob eine Kante in einer Ecke beginnt oder ob sie in ihr endet, erweitern wir den Begriff des Eckengrades:

Definition 29 Eingangsgrad, Ausgangsgrad

Sei $\vec{G} = (E, \vec{K})$ ein Digraph. Der *Eingangsgrad* $d_{ein}(e)$ einer Ecke $e \in E$ ist die Anzahl der in e endenden Kanten. Der *Ausgangsgrad* $d_{aus}(e)$ einer Ecke $e \in E$ ist die Anzahl der in e beginnenden Kanten.

Es ist klar, dass der *Eckengrad* stets die Summe aus *Eingangs-* und *Ausgangsgrad* ist:

$$d(e) = d_{ein}(e) + d_{aus}(e) \text{ (für alle } e \in E\text{).}$$

Satz 48 Handschlaglemma für Digraphen

In jedem Digraphen sind die Summe der Eingangsgrade und die Summe der Ausgangsgrade jeweils gleich der Kantenzahl.

Formal: $$\sum_{e \in E} d_{ein}(e) = \sum_{e \in E} d_{aus}(e) = |K|$$

ÜBUNG 119 Beweisen Sie das Handschlaglemma für Digraphen.

Die Orientiertheit der Kanten eines Digraphen zwingt uns auch dazu, über einen anderen Grundbegriff etwas genauer nachzudenken. Wir nennen einen schlichten Graphen zusammenhängend, wenn es von einer Ecke zu einer anderen stets einen Weg gibt. Anschaulich bedeutet das: Wir können den ganzen Graphen ‚an einer beliebigen Ecke hochheben'. Wie ist das aber in einem Digraphen? Wenn wir den an einer Ecke hochheben können, muss es von jeder Ecke zu jeder Ecke einen Weg geben; dieser Weg muss aber nicht gerichtet sein. Wir sollten daher zwischen der Existenz von (einfachen) Wegen und der von gerichteten Wegen unterscheiden.

Definition 30 stark/schwach zusammenhängender Digraph

(1) Ein Digraph heißt *stark zusammenhängend*, wenn es in ihm von jeder Ecke zu jeder anderen stets einen gerichteten Weg gibt.

(2) Ein Digraph heißt *schwach zusammenhängend*, wenn es in ihm von jeder Ecke zu jeder anderen stets einen Weg gibt, aber nicht in jedem Fall einen gerichteten Weg.

8.2 Turniere

Ein Turnier können wir durch einen Graphen repräsentieren: Die Spieler werden durch Ecken, die einzelnen Spiele durch Kanten zwischen zwei Spielern/Ecken dargestellt. Da jede(r) gegen jede(n) spielen soll, erhalten wir dabei einen vollständigen Graphen K^n. Wollen wir für das Turnier am Ende eine Wertung oder Rangliste aufstellen, dann müssen wir im Graphen noch zu jedem Spiel die Information kodieren, wer jeweils gewonnen hat. Das können wir einfach durch eine Kantenorientierung erreichen (zum Beispiel: vom Verlierer zum Sieger). Wir erhalten dadurch einen vollständigen gerichteten Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten. (Beim Schach gehen viele Partien *remis* aus, was die Wertung oft schwierig macht. Hier betrachten wir nur solche Spiele, bei denen immer eine(r) gewinnt.)

Definition 31 Turnier

Ein *Turnier* $\vec{K}^n$ ist ein schlichter Digraph, den man aus dem vollständigen Graphen K^n erhält, indem man jede Kante orientiert.

Zu jedem vollständigen Graphen mit $n>1$ kann man natürlich mehrere Turniere definieren. Beachten Sie, dass darum das Symbol $\vec{K}^n$ nicht etwa einen einzelnen Digraphen bezeichnet, sondern eine ganze *Klasse von Digraphen* (nämlich alle, die man aus dem K^n durch Orientierung aller Kanten erhalten kann). K^n dagegen bezeichnet einen (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmten Graphen.

ÜBUNG 120 Wie viele verschiedene Turniere $\vec{K}^n$ gibt es (wenn man die Ecken unterscheiden kann)?

Turnier



Im europäischen Mittelalter war unter den Rittern eine Form der ritualisierten Körperverletzung beliebt, die vor den kritischen Augen sogenannter ‚minniglicher Frauen' standesgemäß zu Pferd ausgeführt und *Turnier* genannt wurde. Die Damen stellten gewissermaßen eine Evaluationskommission des Ritterstandes dar.

Die Bezeichnung *Turnier* leitet sich vom Hin- und Herwenden (*Turnieren*) des Pferdes beim Wettkampf ab. Der Wettkampf wurde zumeist so ausgetragen, dass jeder teilnehmende Ritter gegen jeden anderen antreten musste.

Im Lauf der Jahrhunderte hat sich die Bedeutung von ‚Turnier' von der ursprünglichen Wortbedeutung der Bewegung des Pferdes (Wenden) verlagert auf die dabei übliche Organisationsform des Wettkampfs (Jeder gegen jeden). Heute noch nennt man sportliche Wettkämpfe, die in dieser Form ablaufen, Turniere (Schachturnier, Tennisturnier).

Turniere werden nicht nur ausgeführt, um den Sieger oder die Siegerin zu ermitteln. Das eigentliche Ziel war vielmehr, eine möglichst vollständige Rangfolge unter allen Teilnehmern (*Rangliste*) aufzustellen. Eine Rangliste ist eine Folge $e_1,e_2,\ldots,e_n$ aller Teilnehmer in aufsteigender Wertung (gewonnen hat also e_n).

Ranglistenproblem

Gibt es in einem Turnier immer eine eindeutige vollständige Rangliste?

Offenbar ist eine solche Rangliste graphentheoretisch nichts anderes als ein gerichteter hamiltonscher Weg. Wann enthält aber ein Turnier einen solchen Weg?

Die Antwort auf diese Frage hat Rédei gegeben: Immer!

Satz 49 (Rédei 1934)

Jedes Turnier enthält einen gerichteten Hamiltonweg.

Ist damit das Ranglistenproblem gelöst? Wir interpretieren eine Rangliste $e_1, e_2, \ldots, e_n$ doch so: e_2 ist besser als e_1; e_3 ist besser als e_2 und e_1; und so weiter, und e_n ist besser als alle anderen. Es scheint so zu sein, dass die Tatsache, dass es eine vollständige Rangliste gibt, zugleich bedeutet, dass man eine faire Totalbewertung aller teilnehmenden Personen hat.

Was ist jedoch, wenn das Turnier nicht nur *einen* gerichteten Hamiltonweg enthält, sondern mehrere? Oder sogar einen gerichteten Hamilton*kreis*? Im ersten Fall hätten wir zwei oder noch mehr konkurrierende Ranglisten, die sich gegenseitig beweisen, dass sie sinnlos sind. Im anderen Fall könnten wir den Kreisdurchlauf bei jeder Person enden lassen und hätten so für jeden Teilnehmer eine Rangliste, die aussagt, er sei besser als alle anderen. Und wenn wir den Kreis als Ganzes interpretieren, kommen wir zu so unsinnigen Aussagen wie: ‚Jeder ist besser als jeder, auch als er selbst'. – Aber vielleicht kann es das alles ja gar nicht geben?

ÜBUNG 121 ✻ Kann ein Turnier mehrere gerichtete Hamiltonwege enthalten? Kann ein Turnier einen gerichteten Hamiltonkreis enthalten?

ÜBUNG 122 ✻ Zeichnen Sie ein transitives Turnier mit 4 Ecken sowie ein nichttransitives Turnier mit 4 Ecken. Notieren Sie für beide die Folge der Ausgangsgrade.

ÜBUNG 123 ✻ Kann ein transitives Turnier hamiltonsch sein? Wie ist es umgekehrt?

Definition 32 transitiver Digraph

Ein Digraph $\vec{G} = (E, \vec{K})$ heißt *transitiv*, wenn er zu zwei Kanten $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc} \in \vec{K}$ immer auch die Kante $\overrightarrow{ac} \in \vec{K}$ enthält.

Satz 50 Eindeutigkeitssatz für Turniere

Ein Turnier $\vec{K}^n$ enthält genau dann einen einzigen gerichteten Hamiltonweg, wenn es transitiv ist.

Satz 51 Transitivitätssatz für Turniere

Ein Turnier $\vec{K}^n$ ist genau dann transitiv, wenn es die Ausgangsgradfolge $(0,1,2,\ldots,n-1)$ hat.

ÜBUNG 124 Beweisen Sie den Transitivitätssatz für Turniere.

Unsere Frage nach einer gerechten vollständigen Rangliste aller Turnierteilnehmer können wir damit endlich beantworten: Gerecht kann die Rangliste nur sein, wenn es genau eine einzige solche Liste gibt, wenn das Turnier also einen einzigen gerichteten Hamiltonweg hat. Das ist nach dem Transitivitätssatz genau dann der Fall, wenn von den n Teilnehmern einer keinmal, einer einmal, einer zweimal, usw. und einer $(n-1)$-mal gewonnen hat. Einfacher gesagt:

Lösung des Ranglistenproblems

In einem Turnier gibt es genau dann eine eindeutige vollständige Rangliste, wenn es keine zwei Spieler gibt, die gleich viele Spiele gewonnen haben.

Dies ist eine zwar umfassende, aber doch ziemlich enttäuschende, weil triviale Antwort auf unsere Frage nach einer gerechten Totalbewertung aller Turnierteilnehmer. Der Sinn solcher Jeder-gegen-jeden-Wettkämpfe wird dadurch ein wenig relativiert: Sie sind weniger sinnvoll und aussagekräftig als es auf den ersten Blick scheint. Das wird besonders deutlich bei Turnieren, die einen Hamiltonkreis enthalten.

Welche Turniere enthalten einen gerichteten Hamilton*kreis*? Camion hat zwei Sätze bewiesen, die eine Antwort auf diese Frage geben:

Satz 52 (Camion 1959)

Ein stark zusammenhängendes Turnier $\vec{K}^n$ enthält stets gerichtete Kreise der Längen $3,4,\ldots,n$.

Es gibt also hamiltonsche Turniere, denn gerichtete Kreise der Länge n sind in einem $\vec{K}^n$ ja nichts anderes als gerichtete Hamiltonkreise.

Da umgekehrt ein hamiltonsches Turnier stets stark zusammenhängend sein muss, gilt insgesamt also:

Satz 53 (Camion 1959)

Ein Turnier ist genau dann hamiltonsch, wenn es stark zusammenhängend ist.

ÜBUNG 125 Zeichnen Sie einige hamiltonsche Turniere.

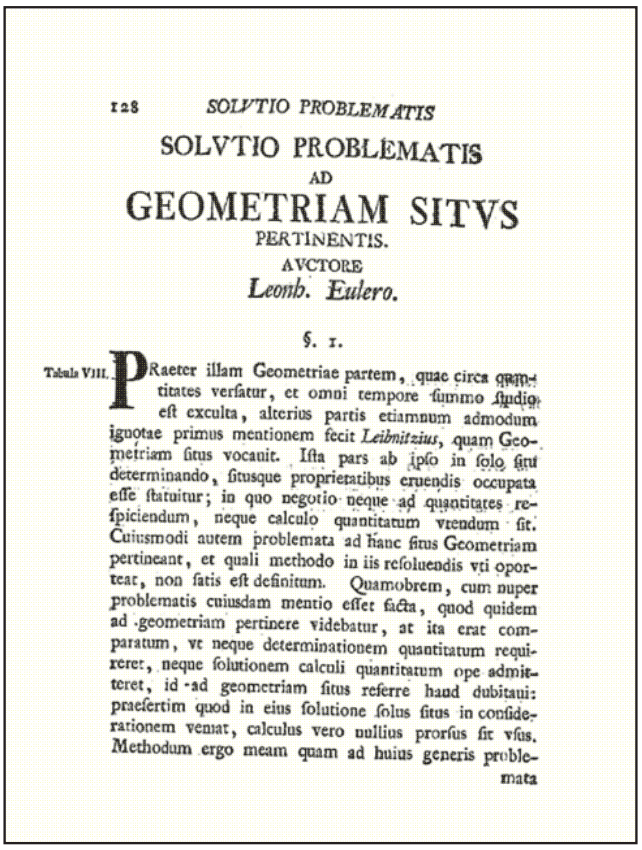
9 Materialien

Hier folgen zwei wichtige Originaltexte zur Graphentheorie, deren Lektüre einen Eindruck davon geben soll, wie man früher Mathematik betrieben (und beschrieben) hat. Die historische Perspektive wird im Rahmen des Mathematikstudiums leider kaum vermittelt bzw. gelernt. Sie kann uns aber helfen, Mathematik besser zu verstehen: Zum einen gewinnen wir einen Blick auf die *‚Gewordenheit' der scheinbar ‚ewigen' Mathematik*. Zum anderen erkennen wir, dass der Sprach- und Denkstil, mit man Mathematik betreibt, immer schon *zeit-, mode- und vielleicht auch geschmacksabhängig* war. Das kann uns helfen, die Art und Weise, in der andere uns die Mathematik präsentieren, kritisch zu ‚hinterfragen': *Wenn es früher anders war, muss es heute dann so sein, wie es ist?* Wo liegen die Stärken unseres Stils? Und wo die Schwächen?

9.1 Euler

L. Euler: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Commentarii Academiae Scientiarium Imperialis Petropolitanae 8 (1736), S. 128–140.

Diese Veröffentlichung Eulers gilt als die erste zur (erst später so bezeichneten) Graphentheorie. Oft zitiert, selten gelesen. Wir sehen, wie der geniale Euler dachte und formulierte. Er wendet sich hier an gebildete mathematische Laien. Daher der recht ausführliche, anschauliche und konstruktive (die heutigen Leser vielleicht auf Dauer auch etwas ‚ermüdende') Duktus.



128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque ſolutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam ſitus referre haud dubitaui: praeſertim quod in eius ſolutione ſolus ſitus in conſiderationem veniat, calculus vero nullius prorſus ſit vſus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

.

Leonhard Euler
Solutio Problematis Ad Geometriam Situs Pertinentis

1. Praeter illam geometriae partem, quae circa quantitates versatur et omni tempore summo studio est exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit LEIBNITZIUS, quam Geometriam situs vocavit. Ista pars ab ipso in solo situ determinando situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur; in quo negotio neque ad quantitates respiciendum neque calculo quantitatum utendum sit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc situs geometriam pertineant et quali methodo in iis resolvendis uti oporteat, non satis est definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio esset facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erst comparatum, ut neque determinationem quantitatum requireret neque solutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam situs referre haud dubitavi, praesertim quod in eius solutione solus situs in considerationem veniat, calculus vero nullius prorsus sit usus. Methodum ergo meam, quam ad huius generis problemata solvenda inveni, tanquam specimen Geometriae situs hic exponere constitui.

Leonhard Euler
Lösung eines Problems die Geometrie der Lage betreffend

(Übersetzung: P. Berger)

1. Außer jenem Gebiet der Geometrie, das sich mit Größen beschäftigt und immer schon intensiv erforscht worden ist, gibt es noch ein weiteres, bislang fast unbekanntes, das LEIBNITZ zuerst erwähnt und *Geometrie der Lage* genannt hat. Dieses Gebiet beschäftigt sich mit dem, was allein durch die Lage bestimmt werden kann, sowie mit der Untersuchung der Lageeigenschaften; Größen werden dabei außer acht gelassen und es wird nicht mit Größen gerechnet. Welche Probleme zu dieser Geometrie der Lage gehören und welche Methode bei ihrer Lösung angewandt werden muss, steht allerdings noch nicht ganz fest. Als ich neulich von einem Problem erfuhr, das zwar zur Geometrie zu gehören schien, aber weder die Bestimmung einer Größe erforderte, noch überhaupt mit Hilfe des Größenkalküls lösbar ist, hatte ich keinen Zweifel, es der Geometrie der Lage zuzurechnen, eben weil zu seiner Lösung nur die Lage eine Rolle spielt und Rechnen keinerlei Sinn macht. Meine Methode, die ich zur Lösung von Problemen dieser Art erfunden habe, werde ich hier als Beispiel für die Geometrie der Lage vorstellen.

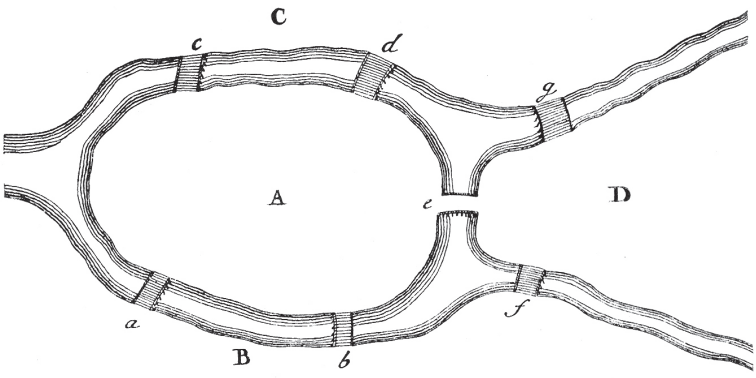


Fig. 1.

2. Problema autem hoc, quod mihi satis notum esse perhibebatur, erat sequens: Regiomonti in Borussia esse insulam *A*, *der Kneiphof* dictam, fluviumque eam cingentem in duos dividi ramos, quemad-

2. Das Problem nun, das meines Wissens recht bekannt ist, war folgendes: Zu Königsberg in Preußen gibt es eine Insel *A*, *der Kneiphof* genannt, und der Fluss, der sie umfließt, ist in zwei Arme geteilt, wie in Fig. 1

modum ex figura (Fig. 1) videre licet; ramos vero huius fluvii septem instructos esse pontibus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* et *g*. Circa hos pontes iam ista proponebatur quaestio, num quis cursum ita instituere queat, ut per singulos pontes semel et non plus quam semel transeat. Hocque fieri posse, mihi dictum est, alios negare alios dubitare; neminem vero affirmare. Ego ex hoc mihi sequens maxime generale formavi problema: quaecunque sit fluvii figura et distributio in ramos atque quicunque fuerit numerus pontium, invenire, utrum per singulos pontes semel tantum transiri queat an vero secus.

3. Quod quidem ad problema Regiomontanum de septem pontibus attinet, id resolvi posset facienda perfecta enumeratione omnium cursuum, qui institui possunt; ex his enim innotesceret, num quis cursus satisfaceret an vero nullus. Hic vero solvendi modus propter tantum combinationum numerum et nimis esset difficilis atque operosus et in aliis quaestionibus de multo pluribus pontibus ne quidem adhiberi posset. Hoc porro modo si operatio ad finem perducatur, multa inveniuntur, quae non erant in quaestione; in quo procul dubio tantae difficultatis causa consistit. Quamobrem missa hac methodo in aliam inquisivi, quae plus non largiatur, quam ostendat, utrum talis cursus institui queat an secus; talem enim methodum multo simpliciorem fore sum suspicatus.

4. Innititur autem tota mea methodus idoneo modo singulos pontium transitus designandi, in quo utor litteris maiusculis *A*, *B*, *C*, *D* singulis regionibus adscriptis, quae flumine sunt separatae. Ita, si quis ex regione *A* in regionem *B* transmigrat per pontem *a* sive *b*, hunc transitum denoto litteris *AB*, quarum prior praebet regionem, ex qua exierat viator, postorior vero dat regionem, in quam pontem transgressus pervenit. Si deinceps viator ex regione *B* abeat in regionem *D* per pontem *f*, hic transitus repraesentabitur litteris *BD*; duos autem hos transitus successive institutos *AB* et *BD* denoto tantum tribus litteris

zu sehen. Über die Arme dieses Flusses führen sieben Brücken *a, b, c, d, e, f* und *g*. Es wurde die Frage gestellt, ob man seinen Spazierweg so wählen kann, dass man jede dieser Brücken einmal und nicht mehr als einmal überquert. Mir wurde erzählt, dass einige dies verneinen, andere daran zweifeln, niemand jedoch davon überzeugt ist. Hieraus stellte ich mir folgendes ganz allgemeine Problem: Wie auch die Form des Flusses, seine Verzweigung in Arme und seine Brückenzahl sein möge, herauszufinden, ob es möglich ist, jede Brücke genau einmal zu überqueren oder nicht.

3. Was das Königsberger Problem von den sieben Brücken angeht, so könnte man es durch eine vollständige Aufzählung aller nur möglichen Spazierwege lösen; denn damit wäre klar, ob einer davon die Bedingung erfüllt oder keiner. Wegen der großen Zahl von Kombinationen ist dieser Lösungsweg jedoch schwierig und aufwendig, und er wäre darüber hinaus bei Fragestellungen mit weit mehr Brücken schon gar nicht mehr anwendbar. Würde man in dieser Weise vorgehen, würde man vieles herausfinden, was gar nicht gefragt ist; worin sicher der Grund für die große Schwierigkeit [dieser Methode] liegt. Darum habe ich statt dieser Methode eine andere gesucht, die nicht mehr leistet als eben aufzuzeigen, ob ein solcher Spazierweg gefunden werden kann oder nicht; denn ich nahm an, dass eine solche Methode viel einfacher sein würde.

4. Meine ganze Methode besteht nun [schlicht] darin, dass ich das Überqueren der einzelnen Brücken auf geschickte Weise beschreibe, indem ich mit den Großbuchstaben *A, B, C, D* die einzelnen Gebiete bezeichne, die durch den Fluss getrennt sind. Wenn man also vom Gebiet *A* über die Brücke *a* oder *b* in das Gebiet *B* hinübergeht, bezeichne ich diesen Übergang mit den Buchstaben *AB,* wobei der erste das Gebiet bezeichnet, aus dem der Spaziergänger kommt, und der zweite das Gebiet, in das er nach Überquerung der Brücke hineingeht. Wenn der Spaziergänger danach aus dem Gebiet *B* über die Brücke *f* in das Gebiet *D* weitergeht,

ABD, quia media *B* designat tam regionem, in quam primo transitu pervenit, quam regionem, ex qua altero transitu exit.

wird dieser Übergang mit den Buchstaben *BD* bezeichnet; die Durchführung beider Übergänge *AB* und *BD* nacheinander bezeichne ich lediglich mit den drei Buchstaben *ABD,* weil das mittlere *B* sowohl das Gebiet angibt, in welches der erste Übergang hineinführte, wie auch das Gebiet, aus dem der zweite Übergang herausführt.

5. Simili modo si viator ex regione *D* progrediatur in regionem *C* per pontem *g*, hoc tres transitus successive factos quatuor litteris *ABDC* denotabo. Ex his enim quatuor litteris *ABDC* intelligetur viatorem primo in regione *A* existentem transiisse in regionem *B*, hinc esse progressum in regionem *D* ex hacque ultra esse profectum in *C*; cum vero hae regiones fluviis sint *a* se invicem separatae, necesse est, ut viator tres pontes transierit. Sic transitus per quatuor pontes successive instituti quinque litteris denotabuntur; et si viator trans quotcunque pontes eat, eius migratio per litterarum numerum, qui unitate est maior quam numerus pontium, denotabitur. Quare transitus per septem pontes ad designandum octo requirit litteras.

5. Geht der Spaziergänger sodann aus dem Gebiet *D* über die Brücke *g* in das Gebiet *C* weiter, so bezeichne ich diese drei nacheinander durchgeführten Übergänge entsprechend mit den vier Buchstaben *ABDC.* Diesen vier Buchstaben *ABDC* ist nämlich zu entnehmen, dass der Spaziergänger, zu Beginn im Gebiet *A* befindlich, in das Gebiet *B* hinübergegangen ist*,* von hier weiter in das Gebiet *D* und von dort endlich nach *C*; da diese Gebiete durch Flüsse von einander getrennt sind, ergibt sich zwingend, dass der Spaziergänger drei Brücken überqueren muss. Eine Überquerung von vier Brücken nacheinander wird so durch fünf Buchstaben bezeichnet; geht der Spaziergänger über irgendeine Anzahl von Brücken, so wird sein Spaziergang durch eine Anzahl von Buchstaben bezeichnet, die um eins größer ist als die Zahl der Brücken. Die Überquerung von sieben Brücken benötigt demnach zur Bezeichnung acht Buchstaben.

6. In hoc designandi modo non respicio, per quos pontes transitus sit factus, sed si idem transitus ex una regione in aliam per plures pontes fieri potest, perinde est, per quemnam transeat, modo in designatam regionem perveniat. Ex quo intelligitur, si cursus per septem figurae pontes ita institui posset, ut per singulos semel ideoque per nullum bis transeatur, hunc cursum octo litteris repraesentari posse easque litteras ita esse debere dispositas, ut immediata litterarum *A* et *B* successio bis occurrat, quia sunt duo pontes *a* et *b* has regiones *A* et *B* iungentes; simili modo successio litterarum *A* et *C* quoque debet bis occurrere in illa octo litterarum serie; deinde successio litterarum *A* et *D* semel occurret similiterque successio litterarum *B* et *D* itemque *C* et *D* semel occurrat necesse est.

6. Bei dieser Bezeichnungsweise berücksichtige ich nicht, über welche Brücken die Überquerung erfolgt, denn es ist, falls der Übergang aus einem Gebiet in ein anderes über mehrere Brücken möglich ist, gleichgültig, über welche man geht, sofern sie nur in das entsprechende Gebiet führt. Daraus ist zu ersehen, dass man, wenn der Weg über die sieben Brücken so gelegt werden könnte, dass jede einmal und keine zweimal überquert wird, ihn mit acht Buchstaben repräsentieren könnte, und diese Buchstaben müssten so verteilt sein, dass die Buchstaben *A* und *B* zweimal unmittelbar hintereinander vorkommen, weil zwei Brücken *a* und *b* die Gebiete *A* und *B* verbinden; entsprechend müssten auch die Buchstaben *A* und *C* zweimal unmittelbar hintereinander in der Folge der acht Buchstaben vorkommen; außerdem müssten die Buchstaben *A* und *D*

7. Quaestio ergo huc reducitur, ut ex quatuor litteris *A*, *B*, *C* et *D* series octo litterarum formetur, in qua omnes illae successiones toties occurrant, quoties est praeceptum. Antequam autem ad talem dispositionem opera adhibeatur, ostendi convenit, utrum tali modo hae litterae disponi queant an non. Si enim demonstrari poterit talem dispositionem omnino fieri non posse, inutilis erit omnis labor, qui ad hoc efficiendum locaretur. Quamobrem regulam investigavi, cuius ope tam pro hac quaestione quam pro omnibus similibus facile discerni queat, num talis litterarum dispositio locum habere queat.

und desgleichen *B* und *D* sowie *C* und *D* jeweils einmal unmittelbar hintereinander vorkommen.

7. Die Frage reduziert sich also darauf, ob aus den vier Buchstaben *A*, *B*, *C* und *D* eine Folge von acht Buchstaben gebildet werden kann, in der alle diese Abfolgen so vorkommen, wie es vorgegeben ist. Bevor man sich jedoch die Arbeit macht, nach einer solchen Folge zu suchen, sollte man zeigen, ob die Buchstaben auf solche Art überhaupt anzuordnen sind oder nicht. Könnte man nachweisen, dass eine solche Anordnung gar nicht möglich ist, wäre ja die ganze Arbeit nutzlos, die man für die Suche aufwendet. Ich habe daher nach einer Regel gesucht, mit der man bei dieser Frage wie auch bei allen ähnlichen leicht entscheiden kann, ob eine solche Buchstabenanordnung möglich ist.

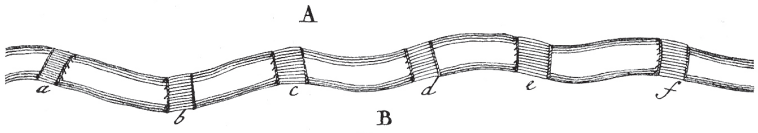


Fig. 2.

8. Considero ad huiusmodi regulam inveniendam unicam regionem *A*, in quam quotcunque pontes *a*, *b*, *c*, *d* etc. conducant (Fig. 2). Horum pontium contemplor primo unicum *a*, qui ad regionem *A* ducat; si nunc viator per hunc pontem transeat, vel ante transitum esse debuit in regione *A* vel post transitum in *A* perveniet; quare in supra stabilito transitus designandi modo oportet, ut littera *A* semel occurrat. Si tres pontes, puta *a*, *b*, *c*, in regionem *A* conducant et viator per omnes tres transeat, tum in designatione eius migrationis littera *A* bis occurret, sive ex *A* initio cursum instituerit sive minus. Simili modo si quinque pontes in *A* conducant, in designatione transitus per eos omnes littera *A* ter occurrere debet. Atque si numerus pontium fuerit quicunque numerus impar, tum, si is unitate augeatur, eius dimidium dabit, quot vicibus littera *A* occurrere debeat.

8. Um eine solche Regel zu finden, betrachte ich ein einziges Gebiet *A,* in das beliebig viele Brücken *a, b, c, d* etc. hineinführen (Fig. 2). Von diesen Brücken betrachte ich zunächst lediglich *a*, die auf das Gebiet *A* führt. Überquert nun der Spaziergänger diese Brücke, so muss er sich entweder vor der Überquerung in *A* befunden haben, oder er gelangt nach der Überquerung nach *A*; so dass in der oben eingeführten Überquerungsbezeichnungsweise der Buchstabe *A* einmal vorkommt. Wenn drei Brücken *a, b,* c nach *A* führen und der Spaziergänger über alle drei hinübergeht, dann wird in seiner Wegbeschreibung der Buchstabe *A* zweimal vorkommen, ob der Spaziergang seinen Anfang in *A* genommen hat oder nicht. Führen fünf Brücken nach *A*, so muss entsprechend in der Bezeichnung einer Überquerung von ihnen allen der Buchstabe *A* dreimal vorkommen. Und wenn die Anzahl der Brücken irgendeine ungerade Zahl ist, so halbiere man sie, nachdem man sie um eins erhöht hat, womit man die Häufigkeit des Buchstaben *A* erhält.

9. In casu igitur pontium transeundorum Regiomontano (Fig. 1), quia in insulam *A* quinque pontes deducunt *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, necesse est, ut in designatione transitus per hos pontes littera *A* ter occurrat. Deinde littera *B*, quia in regionem *B* tres pontes conducunt, bis debet occurrere similique modo littera *D* bis debet occurrere atque etiam littera *C* bis. In serie ergo octo litterarum, quibus transitus per septem pontes deberet designari, littera *A* ter adesse deberet, litterarum vero *B*, *C* et *D* unaquaeque bis; id quod in serie octo litterarum omnino fieri nequit. Ex quo perspicuum est per septem pontes Regiomontanos talem transitum institui non posse.

9. Im Fall der zu überquerenden Königsberger Brücken also (Fig. 1), muss, da zur Insel *A* fünf Brücken *a, b, c, d, e* führen, in der Überquerungsbeschreibung dieser Brücken der Buchstabe *A* dreimal vorkommen. Außerdem muss der Buchstabe *B*, da ins Gebiet *B* drei Brücken führen, zweimal vorkommen und ebenso müssen *D* und *C* zweimal vorkommen. In der Reihe der acht Buchstaben, durch die der Übergang über die sieben Brücken darzustellen ist, muss mithin der Buchstabe *A* dreimal, jeder der Buchstaben *B, C* und *D* aber zweimal auftreten; das ist aber in einer Reihe von acht Buchstaben ganz unmöglich. Damit ist klar, dass sich eine solche Überquerung der sieben Königsberger Brücken nicht einrichten lässt.

10. Simili modo de omni alio casu pontium, si quidem numerus pontium, qui in quamque regionem conducit, fuerit impar, iudicari potest, an per singulos pontes transitus semel fieri queat. Si enim evenit, ut summa omnium vicium, quibus singulae litterae occurrere debent, aequalis sit numero omnium pontium unitate aucto, tum talis transitus fieri potest; sin autem, ut in nostro exemplo accidit, summa omnium vicium maior fuerit numero pontium unitate aucto, tum talis transitus nequaquam institui potest. Regula autem, quam dedi pro numero vicium *A* ex numero pontium in regionem *A* deducentium inveniendo, aeque valet, sive omnes pontes ex una regione *B*, ut in figura (Fig. 2) repraesentatur, ducant sive ex diversis; tantum enim regionem *A* considero et inquiro, quot vicibus littera *A* occurrere debeat.

10. Entsprechend kann man auch in allen anderen Fällen, wo die Anzahl der Brücken, die in irgendein Gebiet führen, ungerade ist, entscheiden, ob es einen Weg gibt, der über jede Brücke genau einmal führt. Wenn sich nämlich ergibt, dass die Summe aller Häufigkeiten, mit denen die einzelnen Buchstaben vorkommen müssen, gleich der um eins vermehrten Brückenzahl ist, dann ist eine solche Überquerung möglich. Wenn aber, wie es in unserem Beispiel der Fall ist, die Summe aller Häufigkeiten größer ist als die um eins vermehrte Brückenzahl, so kann eine solche Überquerung keinesfalls konstruiert werden. Die Regel, die ich angegeben habe, um die Häufigkeit von *A* aus der Anzahl der Brücken zu bestimmen, die in das Gebiet *A* führen, ist unabhängig davon, ob alle Brücken aus einem einzigen Gebiet *B* herkommen, wie in Fig. 2 dargestellt, oder aus verschiedenen; denn ich betrachte nur das Gebiet *A* und untersuche, mit welcher Häufigkeit der Buchstabe *A* vorkommen muss.

11. Si autem numerus pontium, qui in regionem *A* conducunt, fuerit par, tum circa transitum per singulos notandum est, utrum initio viator cursum suum ex regione *A* instituerit an non. Si enim duo pontos in *A* conducant et viator ex *A* cursum inceperit, tum littera *A* bis occurrere debet; semel enim adesse debet ad designandum

11. Wenn aber die Anzahl der Brücken, die in das Gebiet *A* führen, gerade ist, dann muss man hinsichtlich der Überquerung der einzelnen beachten, ob der Spaziergänger seinen Weg in *A* begonnen hat oder nicht. Wenn nämlich zwei Brücken nach *A* führen und der Spaziergänger von *A* losgeht, dann muss der Buchstabe *A* zweimal vorkommen;

exitum ex *A* per alterum pontem et semel quoque ad designandum reditum in *A* per alterum pontem. Sin autem viator ex alia regione cursum inceperit, tum semel tantum littera *A* occurret; semel enim posita tam adventum in *A* quam exitum inde denotabit, ut huiusmodi cursus designare statui.

12. Conducant iam quatuor pontes in regionem *A* et viator ex *A* cursum incipiat; tum in designatione totius cursus littera *A* ter adesse debebit, si quidem per singulos semel transierit. At si ex alia regione ambulare inceperit, tum bis tantum littera *A* occurret. Si sex pontes ad regionem *A* conducant, tum littera *A*, si ex *A* initium eundi est sumptum, quator occurret, at si non ex *A* initio exierit viator, tum ter tantum occurrere debebit. Quare generaliter: si numerus pontium fuerit par, tum eius dimidium dat numerum vicium, quibus littera *A* occurrere debet, si initium non est in regione *A* sumptum; dimidium vero unitate auctum dabit numerum vicium, quoties littera *A* occurrere debet, initio cursus in ipsa regione *A* sumpto.

13. Quia autem in tali cursu nonnisi ex una regione initium fieri potest, ideo ex numero pontium, qui in quamvis regionem deducunt, ita numerum vicium, quoties littera quamque regionem denotans occurrere debet, definio, ut sumam numeri pontium unitate aucti dimidium, si numerus pontium fuerit impar; ipsius vero numeri pontium medietatem, si fuerit par. Deinde si numerus omnium vicium adaequet numerum pontium unitate auctum, tum transitus desideratus succedit, at initium ex regione, in quam impar pontium numerus ducit, capi debet. Sin autem numerus omnium vicium fuerit unitate minor quam pontium numerus unitate auctus, tum transitus succedet incipiendo ex regione, in quam par pontium numerus ducit, quia hoc modo vicium numerus unitate est augendus.

und zwar einmal zur Bezeichnung des Verlassens von *A* über die eine Brücke und ein zweites Mal zur Bezeichnung der Rückkehr nach *A* über die andere Brücke. Beginnt aber der Spaziergänger seinen Weg in einem anderen Gebiet, dann kommt der Buchstabe *A* nur einmal vor; das einmalige Vorkommen bezeichnet ja sowohl die Ankunft in *A* wie den Weggang von dort, gemäß meiner Wegbezeichnungsweise.

12. Führen nun vier Brücken in das Gebiet *A*, so muss in der vollständigen Wegbezeichnung der Buchstabe *A* dreimal vorkommen, wenn der Spaziergänger den Weg in *A* beginnt und er jede Brücke einmal überquert. Würde er den Spaziergang aber in einem anderen Gebiet beginnen, so würde der Buchstabe *A* nur zweimal vorkommen. Führen sechs Brücken nach *A*, so kommt der Buchstabe *A* viermal vor, falls der Weg seinen Anfang in *A* nimmt, aber wenn der Spaziergänger nicht in *A* losgeht, nur dreimal. Daher allgemein: Ist die Brückenzahl gerade, so gibt ihre Hälfte an, wie oft *A* vorkommen muss, falls der Beginn nicht im Gebiet *A* gelegen hat; die um eins vermehrte Hälfte aber gibt an, wie oft *A* vorkommen muss, wenn der Weg in *A* begonnen hat.

13. Da nun ein solcher Spaziergang nicht anders als in einem Gebiet beginnen kann, so bestimme ich aus der Zahl der Brücken, die in ein Gebiet führen, die Häufigkeit, mit welcher der das Gebiet bezeichnende Buchstabe vorkommt, indem ich die Hälfte der um eins vermehrten Brückenzahl nehme, falls die Brückenzahl ungerade ist; die Hälfte der Brückenzahl aber, wenn sie gerade ist. Ist dann die Summe aller dieser Häufigkeiten gleich der um eins vermehrten Brückenzahl, so gelingt die gewünschte Überquerung, allerdings muss man in einem Gebiet beginnen, in das eine ungerade Zahl von Brücken führt. Ist diese Summe aller Häufigkeiten jedoch um eins kleiner als die um eins vermehrte Brückenzahl, so gelingt der Spaziergang von einem Gebiet aus, in das eine gerade Brückenzahl führt, da in diesem Fall die Zahl noch um eins vergrößert werden muss.

14. Proposita ergo quacunque aquae pontiumque figura ad investigandum, num quis per singulos semel transire queat, sequenti modo operationem instituo. Primo singulas regiones aqua a se invicem diremptas litteris *A*, *B*, *C* etc. designo. Secundo sumo omnium pontium numerum eumque unitate augeo atque sequenti operationi praefigo. Tertio singulis litteris *A*, *B*, *C* etc. sibi subscriptis cuilibet adscribo numerum pontium ad eam regionem deducentium. Quarto eas litteras, quae pares adscriptos habent numeros, signo asterisco. Quinto singulorum horum numerorum parium dimidia adiicio, imparium vero unitate auctorum dimidia ipsis adscribo. Sexto hos numeros ultimo scriptos in unam summam coniicio; quae summa si vel unitate minor fuerit vel aequalis numero supra praefixo, qui est numerus pontium unitate auctus, tum concludo transitum desideratum perfici posse. Hoc vero est tenendum, si summa inventa fuerit unitate minor quam numerus supra positus, tum initium ambulationis ex regione asterisco notata fieri debere; contra vero ex regione non signata, si summa fuerit aequalis numero praescripto. Ita ergo pro casu Regiomontano operationem instituo, ut sequitur: Numerus pontium 7, habetur ergo 8. Quia ergo plus prodit quam 8, huiusmodi transitus nequaquam fieri potest.

14. Um nun bei einer beliebigen Konstellation von Flüssen und Brücken herauszufinden, ob man über jede Brücke genau einmal gehen kann, führe ich folgende Rechnung durch. Als erstes bezeichne ich die einzelnen vom Wasser getrennten Gebiete mit den Buchstaben *A*, *B*, *C* usw. Zweitens nehme ich die Zahl aller Brücken, erhöhe sie um eins und setze sie den folgenden Rechnungen voran. Drittens schreibe ich darunter die einzelnen Buchstaben *A*, *B*, C usw. und neben jeden derselben die Zahl der Brücken, die zu diesem Gebiet führen. Viertens hebe ich die Buchstaben mit einer geraden Zahl durch einen Stern hervor. Fünftens setze ich neben diese geraden Zahlen ihre Hälfte, neben die ungeraden aber schreibe ich die Hälfte der um eins vergrößerten Zahl. Sechstens fasse ich diese zuletzt geschriebenen Zahlen in einer Summe zusammen; ist diese Summe um eins kleiner oder gleich der zuoberst notierten Zahl, so folgere ich, dass die gewünschte Überquerung durchgeführt werden kann. Man muss aber beachten, dass man, falls die Summe um eins kleiner als die zuoberst stehende Zahl ist, den Spaziergang in einem mit Stern bezeichneten Gebiet beginnen muss; sonst aber, wenn die Summe gleich der zuoberst stehenden Zahl ist, in einem Gebiet ohne Stern. Für den Königsberger Fall führe ich die Rechnung mithin folgendermaßen durch: Die Brückenzahl ist 7, macht also 8. Da sich [als Summe der rechten Spalte] mehr als 8 ergibt, kann die Überquerung also nicht durchgeführt werden.

	Pontes *Brücken*	
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

15. Sint duae insulae *A* et *B* aqua circumdatae, qua cum aqua communicent quatuor fluvii, quemadmodum figura (Fig. 3) repraesentat. Traiecto porro sint super aquam insulas circumdantem et fluvios quindecim

15. Es seien zwei Inseln *A* und *B* von Wasser umgeben, in das sich vier Flüsse teilen, wie Fig. 3 zeigt. Weiter seien über das Wasser, das die Inseln umgibt, und über die Flüsse fünfzehn Brücken *a, b, c, d* usw. gespannt,

pontes *a*, *b*, *c*, *d* etc. et quaeritur, num quis cursum ita instituere queat, ut per omnes pontes transeat, per nullum autem plus quam semel.

und es wird gefragt, ob man den Weg so einrichten kann, dass er über alle Brücken führt, über keine aber mehr als einmal.

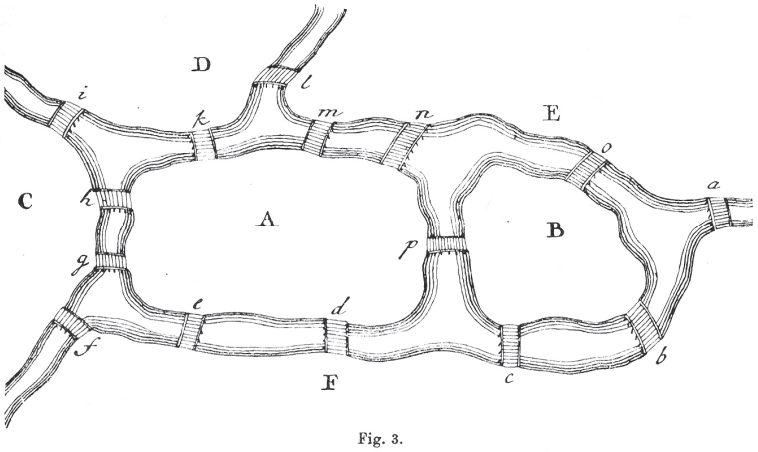


Fig. 3.

Designo ergo primum omnes regiones, quae aqua a se invicem sunt separatae, litteris *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, cuiusmodi ergo sunt sex regiones. Dein numerum pontium 15 unitate augeo et summam 16 sequenti operationi praefigo.

Zunächst bezeichne ich also alle Gebiete, die durch das Wasser getrennt sind, mit den Buchstaben *A, B, C, D, E, F,* von diesen Gebieten gibt es also sechs. Dann erhöhe ich die Brückenzahl 15 um eins und notiere die Zahl 16 über den folgenden Rechnungen.

		16
*A**	8	4
*B**	4	2
*C**	4	2
D	3	2
E	5	3
*F**	6	3
		16

Tertio litteras A, B, C etc. sibi invicem subscribo et ad quamque numerum pontium, qui in eam regionem ducunt, pono, ut ad A octo ducunt pontes, ad B quatuor etc. Quarto litteras, quae pares adiunctos habent numeros, asterisco noto. Quinto in tertiam columnam scribo parium numerorum dimidia, impares vero unitate augeo et semisses appono. Sexto tertiae columnae numeros invicem addo et obtineo summam 16; quae cum aequalis sit numero supra posito 16, sequitur transitum desiderato modo fieri posse, si modo cursus vel ex regione D vel E incipiatur, quippe quae non sunt asterisco notatae. Cursus autem

Drittens schreibe ich die Buchstaben *A*, *B, C* usw. untereinander und setze zu jedem die Zahl der Brücken, die in dieses Gebiet führen, so nach *A* acht Brücken, nach *B* vier usw. Viertens bezeichne ich die mit einer gerade Zahl versehenen Buchstaben mit einem Stern. Fünftens schreibe ich in die dritte Spalte die Hälfte der geraden Zahlen, während ich die ungeraden um eins erhöhe und dann halbiere. Sechstens addiere ich die Zahlen der dritten Spalte und erhalte die Summe 16; da diese gleich der zuoberst notierten Zahl 16 ist, folgt, dass die gewünschte Überquerung durchgeführt werden kann, wenn der Weg im Gebiet *D* oder *E* be-

ita fieri poterit

E a F b B c F d A e F f C g A h C i D k A m E n A p B o E l D,

ubi inter litteras maiusculas pontes simul collocavi, per quos fit transitus.

16. Hac igitur ratione facile erit in casu quam maxime composito iudicare, utrum transitus per omnes pontes semel tantum fieri queat an non. Hoc tamen adhuc multo faciliorem tradam modum idem dignoscendi, qui ex hoc ipso modo non difficulter eruetur, postquam sequentes observationes in medium protulero. Primo autem observo omnes numeros pontium singulis litteris *A*, *B*, *C* etc. adscriptos simul sumptos duplo maiores esse toto pontium numero. Huius rei ratio est, quod in hoc computo, quo pontes omnes in datam regionem ducentes numerantur, quilibet pons bis numeretur; refertur enim quisque pons ad utramque regionem, quas iungit.

17. Sequitur ergo ex hac observatione summam omnium pontium, qui in singulas regiones conducunt, esse numerum parem, quia eius dimidium pontium numero aequatur. Fieri ergo non potest, ut inter numeros pontium in quamlibet regionem ducentium unicus sit impar; neque etiam, ut tres sint impares, neque quinque etc. Quare si qui pontium numeri litteris *A*. *B*, *C* etc. adscripti sunt impares, necesse est, ut eorum numerus sit par; ita in exemplo Regiomontano quatuor erant pontium numeri impares litteris regionum *A*, *B*, *C*, *D* adscripti, uti ex §14 videre licet; atque in exemplo praecedente, §15, duo tantum sunt numeri impares, litteris *D* et *E* adscripti.

18. Cum summa omnium numerorum litteris *A*, *B*, *C* etc. adiunctorum aequet duplum pontium numerum, manifestum est illam summam binario auctam et per 2 divisam dare numerum operationi praefixum. Si igitur omnes numeri litteris *A*, *B*, *C*, *D* etc. adscripti fuerint pares et eorum

ginnt, da diese nicht mit einem Stern bezeichnet sind. Der Weg kann nun so erfolgen:

E a F b B c F d A e F f C g A h C i D k A m E n A p B o E l D,

wobei ich zwischen den Großbuchstaben zugleich die Brücken notiert habe, über die der Übergang führt.

16. Auf diese Art und Weise wird auch in einem sehr komplexen Fall leicht zu beurteilen sein, ob eine Überquerung, einmal über jede Brücke, überhaupt möglich ist oder nicht. Doch ich werde nun eine viel einfachere Methode dafür zeigen, die sich ohne Schwierigkeit aus der bisherigen ergibt, wenn ich noch folgende Beobachtungen vorgetragen haben werde. Zuerst stelle ich fest, dass die Summe der Brückenzahlen, die neben den einzelnen Buchstaben *A, B, C* usw. stehen, das Doppelte der Gesamtzahl der Brücken ist. Der Grund dafür ist, dass bei dieser Rechnung, wo alle in das jeweilige Gebiet führenden Brücken gezählt werden, jede Brücke doppelt gezählt wird; jede Brücke wird nämlich bei beiden der von ihr verbundenen Gebiete berücksichtigt.

17. Aus dieser Beobachtung folgt, dass die Summe aller Brücken, die in die einzelnen Gebiete führen, gerade sein muss, weil ihre Hälfte gleich der Brückenzahl ist. Es kann daher nicht sein, dass unter den Zahlen der in ein Gebiet führenden Brücken genau eine ungerade ist; auch nicht, dass drei ungerade sind oder fünf usw. Wenn also von den neben die Buchstaben *A, B, C* usw. geschriebenen Zahlen einige ungerade sind, so muss deren Anzahl gerade sein; so waren im Königsberger Beispiel die vier Brückenzahlen bei den Buchstaben *A, B, C, D* ungerade, wie aus §14 zu sehen ist; und im vorigen Beispiel §15, waren insgesamt zwei Zahlen ungerade, die zu den Buchstaben *D* und *E*.

18. Da die Summe der den Buchstaben *A, B, C* usw. zugeordneten Zahlen gleich dem Zweifachen der Brückenzahl ist, so ist klar, dass diese Summe, vermehrt um 2 und halbiert, die zuoberst geschriebene Zahl ergibt. Wenn also alle den Buchstaben *A, B, C* usw. zugeordneten Zahlen gerade sind, und je-

singulorum medietates capiantur ad numeros tertiae columnae obtinendos, erit horum numerorum summa unitate minor quam numerus praefixus. Quamobrem his casibus semper transitus per omnes pontes fieri potest. In quacunque enim regione cursus incipiatur, ea habebit pontes numero pares ad se conducentes, uti requiritur. Sic in exemplo Regiomontano fieri potest, ut quis per omnes pontes bis transgrediatur; quilibet enim pons quasi in duos erit divisus numerusque pontium in quamvis regionem ducentium erit par.

weils ihre Hälften genommen werden, um die Zahlen der dritten Spalten zu erhalten, so wird die Summe dieser Zahlen um eins kleiner sein als die zuoberst geschriebene Zahl. Daher ist in diesen Fällen immer eine Überquerung aller Brücken möglich. Denn in welchem Gebiet der Weg auch beginnt, immer wird eine gerade Zahl von Brücken hineinführen, wie es erforderlich ist. So ist es im Königsberger Beispiel möglich, dass man über jede Brücke zweimal geht; gewissermaßen ist nämlich jede Brücke zweigeteilt und [so ist bei dieser Vorstellung] die Zahl der in ein Gebiet führenden Brücken gerade.

19. Praeterea, si duo tantum numeri litteris *A*, *B*, *C* etc. adscripti fuerint impares, reliqui vero omnes pares, tum semper desideratus transitus succedet, si modo cursus ex regione, ad quam pontium impar numerus tendit, incipiatur. Si enim pares numeri bisecentur atque etiam impares unitate aucti, uti praeceptum est, summa harum medietatum unitate erit maior quam numerus pontium ideoque aequalis ipsi numero praefixo. Ex hocque porro perspicitur, si quatuor vel sex vel octo etc. fuerint numeri impares in secunda columna, tum summam numerorum tertiae columnae maiorem fore numero praefixo eumque excedere vel unitate vel binario vel ternario etc. et idcirco transitus fieri nequit.

19. Sind außerdem nur zwei der den Buchstaben *A, B, C* usw. zugeordneten Zahlen ungerade, die restlichen dagegen alle gerade, dann gelingt die gewünschte Überquerung immer, wenn der Weg in einem Gebiet beginnt, zu dem eine ungerade Brückenzahl führt. Wenn man nämlich gemäß der Vorschrift die geraden Zahlen halbiert und auch die um eins erhöhten ungeraden, so wird die Summe dieser Hälften um eins größer sein als die Brückenzahl und darum gleich der zuoberst geschriebenen Zahl. Hieraus ersieht man außerdem, dass wenn vier, sechs oder acht Zahlen usw. der zweiten Spalte ungerade sind, die Summe der Zahlen in der dritten Spalte größer ist als die zuoberst geschriebene Zahl, und zwar um eins, bzw. zwei bzw. drei usw., und darum eine Überquerung nicht möglich ist.

20. Casu ergo quocunque proposito statim facillime poterit cognosci, utrum transitus per omnes pontes semel institui queat an non, ope huius regulae: Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus est impar, tum certo affirmari potest talem transitum non dari. Si autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus est impar, tunc transitus fieri poterit, si modo cursus in altera harum regionum incipiatur. Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum transitus desiderato modo institui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur. Hac igitur data regula problemati proposito

20. In jedem beliebigen Fall kann man mithin ganz einfach erkennen, ob eine Überquerung einmal über jede Brücke durchgeführt werden kann oder nicht, [und zwar] mit Hilfe dieser Regeln: Gibt es mehr als zwei Gebiete mit einer ungeraden Zahl hinzuführender Brücken, so kann man sicher behaupten, dass es eine solche Überquerung nicht gibt. Ist aber für genau zwei der Gebiete die Zahl der hinzuführenden Brücken ungerade, so kann die Überquerung durchgeführt werden, sofern der Weg in einem dieser Gebiete beginnt. Gibt es schließlich überhaupt kein Gebiet, zu dem eine ungerade Zahl von Brücken führt, so kann die gewünschte Überquerung [stets] durchgeführt werden, in welchem Gebiet man auch losgeht. Diese Regel

plenissime satisfit.

21. Quando autem inventum fuerit talem transitum institui posse, quaestio superest, quomodo cursus sit dirigendus. Pro hoc sequenti utor regula: tollantur cogitatione, quoties fieri potest, bini pontes, qui ex una regione in aliam ducunt, quo pacto pontium numerus vehementer plerumque diminuetur; tum quaeratur, quod facile fiet, cursus desideratus per pontes reliquos; quo invento pontes cogitatione sublati hunc ipsum cursum non multum turbabunt, id quod paululum attendenti statim patebit; neque opus esse iudico plura ad cursus reipsa formandos praecipere.

löst mithin das vorgelegte Problem vollständig.

21. Nachdem man herausgefunden hat, dass eine solche Überquerung durchgeführt werden kann, bleibt allerdings die Frage, wie der Weg zu führen ist. Hierzu benutze ich folgende Regel: Man entferne in Gedanken, so oft das geht, je zwei Brücken, die aus einem Gebiet in ein anderes führen [d.h. gleiche Gebiete verbinden], wodurch die Zahl der Brücken zumeist erheblich verringert wird; sodann suche man, was leicht geht, den gewünschten Weg über die verbleibenden Brücken; hat man diesen gefunden, so werden die in Gedanken entfernten Brücken den Weg nicht sehr verwirren [komplizierter machen], wie mit ein wenig Nachdenken sofort klar wird; ich denke daher, dass es nicht nötig ist, noch mehr zur Wegkonstruktion vorzutragen.

9.2 Hierholtzer

C. Hierholzer: *Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren.* Mathematische Annalen 6 (1873), S. 30–32.

Die Originalarbeit, die Freunde nach dem frühen Tod von Hierholtzer herausgegeben haben, ist hier in zeichengetreuer Form wiedergegeben.

Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren.

Von CARL HIERHOLZER.
Mitgetheilt von CHR. WIENER.

Die folgende Untersuchung trug der leider so früh dem Dienste der Wissenschaft durch den Tod entrissene Privatdocent Dr. Hierholzer dahier (gest. 13. Sept. 1871) einem Kreise befreundeter Mathematiker vor. Um sie vor Vergessenheit zu bewahren, musste sie bei dem Mangel jeder schriftlichen Aufzeichnung aus dem Gedächtniss wieder hergestellt werden, was ich unter Beihilfe meines verehrten Collegen *Lüroth* durch das Folgende möglichst getreu auszuführen suchte.

In einem beliebig verschlungenen Linienzuge mögen *Zweige* eines Punktes diejenigen verschiedenen Theile des Zuges heissen, auf welchen man den fraglichen Punkt verlassen kann. Ein Punkt mit mehreren Zweigen heisse ein *Knotenpunkt,* der so vielfach genannt werde, als die Anzahl der Zweige angiebt, und je nach dieser Anzahl als gerad oder ungerad genannt sein soll. Ein gewöhnlicher Doppelpunkt wäre hiernach ein vierfacher Knotenpunkt, ein gewöhnlicher Punkt kann als ein zweifacher und eine freie Endigung als ein einfacher Knotenpunkt bezeichnet werden.

Wenn ein Linienzug in einem Zuge umfahren werden kann, ohne dass irgend ein Linienstück mehrfach durchlaufen wird, so hat er entweder keinen oder zwei ungerade Knotenpunkte. Wenn man beim Durchlaufen irgend einen Punkt überschreitet, so sind dadurch zwei Zweige eines Knotenpunktes beschrieben, und da keine Strecke zweimal durchlaufen werden soll, muss ein Punkt, den man im Ganzen n mal überschreitet, ein $2n$ facher Knotenpunkt sein. Ein Punkt kann daher nur dann ein ungerader Knotenpunkt sein, wenn er beim Durchlaufen einmal nicht überschritten wird, d. h. wenn er Anfangs- oder Endpunkt ist. Wenn man daher beim Durchlaufen zu dem Ausgangspunkte bei dem Schlusse zurückkehrt, so können nur gerade Knotenpunkte vorhanden sein; wenn nicht, so sind Ausgangs- und Endpunkt ungerade Knotenpunkte.

Umgekehrt: *Wenn ein zusammenhängender Linienzug keinen oder zwei ungerade Knotenpunkte enthält, so kann er in einem Zuge umfahren werden.*

Denn a) hat man irgend einen Theil des Linienzuges umfahren, so ist jeder Knotenpunkt im noch nicht durchfahrenen Theile gerad oder ungerad, wie er es im ganzen Zuge war; nur der Anfangs- und Endpunkt des durchlaufenen Stücks kehren ihren Charakter um, ausser wenn sie zusammenfallen. Denn durch das Durchlaufen eines Punktes werden zwei Zweige, durch den Anfang und das Ende des Durchlaufens je ein Zweig ausgeschlossen.

b) Hat man einen Linienzug in einem ungeraden Knotenpunkt zu umfahren angefangen, so kann man nur in einem andern ungeraden Knotenpunkte stecken bleiben. Denn in einem geraden Knotenpunkte hat man bei jedesmaligem Durchlaufen zwei Zweige ausgeschlossen, so dass bei erneutem Ankommen in demselben wenigstens noch ein Zweig zum Verlassen übrig bleibt. Der Anfangspunkt ist aber durch den Beginn zu einem geraden Knotenpunkte verwandelt worden, so dass auch in ihm ein Steckenbleiben nicht möglich ist. Fängt man dagegen einen Linienzug in einem geraden Knotenpunkte zu umfahren an, so kann man auch in diesem stecken bleiben, indem er durch den Beginn zu einem ungeraden verwandelt wurde.

c) Hat nun ein Linienzug zwei ungerade Knotenpunkte, so beginne man das Umfahren in einem derselben; man wird dann nothwendig in dem andern stecken bleiben. Der zurückgelegte Linienzug ist in diesem Falle ein offener. Hat der gegebene Linienzug dagegen keine ungeraden Knotenpunkte, so beginne man das Umfahren in einem beliebigen Punkte, der also ein gerader Knotenpunkt ist; man wird dann nothwendig im Ausgangspunkte stecken bleiben. Der zurückgelegte Linienzug ist in diesem Falle ein geschlossener.

d) Bleibt dabei ein Theil *b* undurchlaufen, so kann derselbe nur gerade Knotenpunkte enthalten, weil die zwei etwa vorhandenen ungeraden Knotenpunkte durch das erste Umfahren ausgeschlossen wurden, und die übrigen Knotenpunkte ihren Charakter behielten. Zugleich muss *b* mit dem schon beschriebenen Zuge *a* durch wenigstens einen gemeinsamen Punkt zusammenhängen, weil sonst der Zug in mehrere nicht zusammenhängende zerfallen würde. Geht man beim Umfahren des *a* in einem solchen Punkte *P* des Zusammenhangs auf *b* über, so muss man nothwendig auf *b* in *P* stecken bleiben, und kann von da das Umfahren des *a* so fortsetzen, wie es früher geschehen war. Auf dieselbe Weise hängt man jedes noch nicht umfahrene Stück an die schon umfahrenen an und beschreibt so die ganze Linie in einem Zuge.

Es ergiebt sich noch folgender Satz: *Ein Linienzug kann nur eine gerade Anzahl ungerader Knotenpunkte besitzen.* Denn schaltet man durch Umfahren ein Linienstück aus, indem man in einem ungeraden Knotenpunkte beginnt und so lange weiter geht, bis man stecken bleibt, was wieder in einem ungeraden Knotenpunkte geschehen muss, und entfernt dadurch zwei ungerade Knotenpunkte; so kann man durch Wiederholung die Anzahl der ungeraden Knotenpunkte auf weniger als zwei vermindern. Dieser Rest kann aber nicht Eins, sondern muss Null sein; denn wenn ein Zug nur einen ungeraden Knotenpunkt besässe und man würde in ihm anfangen den Zug zu umfahren, so könnte man nie zu Ende kommen, da dies nur in *einem* andern ungeraden Knotenpunkte möglich ist. Die Zahl der ungeraden Knotenpunkte des ursprünglichen Linienzuges ist daher eine gerade.

Carlsruhe, im December 1871.

---

10 LÖSUNGSHINWEISE

Übung 1

Wenn wir uns vorstellen, dass wir eine einzelne Ecke ‚anfassen und hochheben', dann heben wir alles hoch, was mit dieser Ecke ‚zusammenhängt'. Dieses ganze Gebilde ist eine ‚Komponente' des Graphen. Wir müssen also irgendwie ausdrücken, was ‚zusammenhängen' heißt. Außerdem müssen wir ausdrücken, dass ‚alles, was zusammenhängt' eine Komponente bildet.

Übung 2

Ein Untergraph ist induziert, wenn zwei seiner Ecken genau dann benachbart sind, wenn sie es im Ausgangsgraphen auch sind.

Übung 3

Beobachtung: Die Summe der Eckengrade ist stets eine gerade Zahl. Sie ist stets das Doppelte der Kantenzahl. (Siehe *Handschlaglemma*)

Übung 4

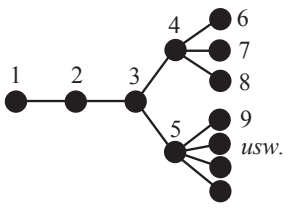
Beobachtung: Die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad ist stets eine gerade Zahl. (Siehe *Folgerung aus dem Handschlaglemma*)

Übung 5

Beobachtung: Einen solchen Graphen gibt es nicht. (Siehe *Zwillingssatz*)

Übung 6

Eine Möglichkeit ist z.B. die folgende: Man beginnt mit einer Endecke (Grad 1), die mit einer Ecke vom Grad 2 benachbart ist. Daran hängt man eine Ecke von Grad 3, an die man zwei Ecken vom Grad 4 und Grad 5 hängt.



Von oben nach unten und von links nach rechts macht man so weiter, indem man stets eine neue Ecke mit einem größeren (also neuen) Grad anhängt. Da man immer (und zunehmend mehr) freie Kanten hinzufügt, muss man an diese auch unaufhörlich neue Ecken anhängen. D.h. das Ganze funktioniert nur, wenn man niemals aufhört.

Man konstruiert also einen *unendlichen* Baum, in dem alle Ecken unterschiedlichen Grad haben.

Übung 7

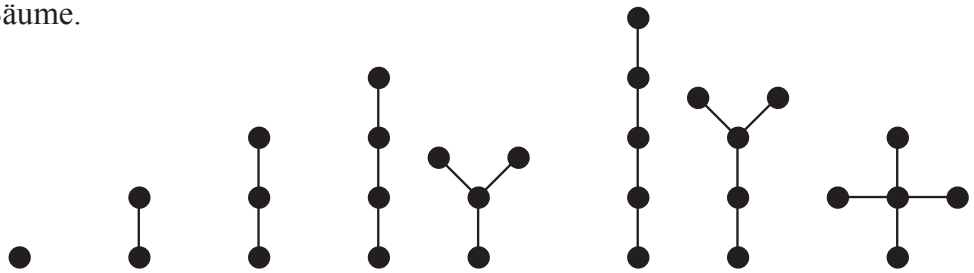
Einen solchen Graphen gibt es nicht. Immer haben zwei maximale Wege eine gemeinsame Ecke. (Siehe den Beweis des *Kreuzungssatzes*)

Übung 8

Beobachtung: Bei zusammenhängenden kreislosen Graphen (Bäumen) ist die Kantenzahl stets um 1 kleiner als die Eckenzahl. (Siehe *Ecken-/Kantenzahlkriterium*)

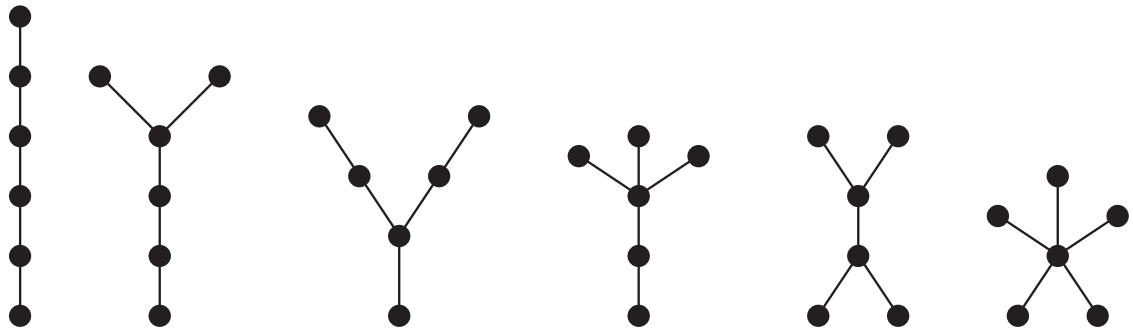
Übung 9

Es gibt (bis auf Isomorphie) 8 Bäume mit höchstens 5 Ecken. ‚Bis auf Isomorphie' heißt: Wir können die Bäume zwar vielleicht etwas anders zeichnen als hier abgebildet, doch jeder Baum mit bis zu 5 Ecken ist isomorph zu einem der hier dargestellten Bäume.



Übung 10

Es gibt (bis auf Isomorphie) 6 Bäume mit 6 Ecken:



Übung 11

Ein Wald mit n Ecken und t Komponenten (Bäumen) hat $n-t$ Kanten . Siehe Satz 6.

Übung 12

Jeder Baum mit mindestens 2 Ecken hat mind.2 Endecken. Siehe Satz 14.

Übung 13

Was einem sofort einfällt, sind die *Kreisgraphen* (n-Ecke). Sie haben stets gleich viele Ecken wie Kanten. Diese Gleichheit bleibt erhalten (aber auch nur dann), wenn wir

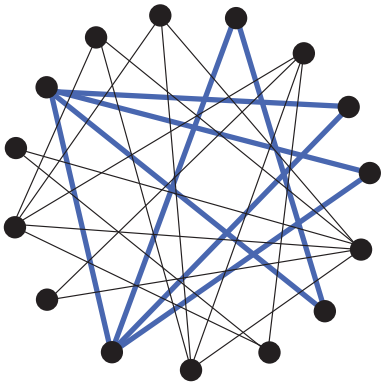
irgendwo Endecken hinzufügen (d.h. von einer bestehende Ecke eine neue Kante zu einer neuen Ecke ziehen). Das können wir immer so weiter machen. Jeder so entstehende Graph lässt sich einfach charakterisieren: *Er hat genau einen Kreis (‚Ein-Kreis-Graph')*.

Wir können aber auch Satz 6 benutzen: Die zusammenhängenden Graphen mit Eckenzahl = Kantenzahl erhält man aus Bäumen, indem man eine neue Kante (aber keine neue Ecke) ergänzt. Dabei entsteht immer *genau* ein Kreis.

Zeigen Sie das ‚*genau*' ausführlich; indem Sie zeigen: Wenn ein Graph nach Hinzufügen einer durch eine neue Kante zwei (oder mehr) Kreise hat, dann hatte er vorher bereits (mindestens) einen Kreis.

Übung 14

Der Graph hat 2 Komponenten. Methode *Ecken- und Kantenfärbung*: Man färbt ausgehend von einer Ecke alle damit zusammenhängenden Ecken und Kanten mit einer Farbe, bis es keine weitere zusammenhängende Ecke mehr gibt. Falls es noch ungefärbte Ecken gibt, beginnt man bei einer von ihnen mit einer neuen Farbe und wiederholt den Prozess.



Übung 15

Nur die Graphenpaare von (a) und (c) sind isomorph.

Übung 16

Familien werden hier repräsentiert durch Komponenten.

Übung 17

Gefragt war hier das Kreiskriterium für bipartite Graphen.

Übung 18

Ein Graph hat genau dann maximale Kantenzahl, wenn jede Ecke mit jeder anderen benachbart ist. Bei 100 Ecken gehen dann also von jeder Ecke 99 Kanten aus. Insgesamt sind das $100 \cdot 99 / 2 = 4950$ Kanten. (Der Graph ist der vollständige Graph K^{100}.)

Übung 19

Die Graphen mit der kleinsten Eckenzahl bei gegebener Kantenzahl sind die vollständigen Graphen – doch nur, wenn es zu dieser Kantenzahl auch wirklich einen vollständigen Graphen gibt. Das ist nach Satz 11 genau dann der Fall, wenn die Kantenzahl k ein Binomialkoeffizient der Form

$$k = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \qquad (*)$$

ist (n ist dann die Eckenzahl). Durch Probieren findet man leicht

$$10 = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2}.$$

Es gibt also einen vollständigen Graphen mit 10 Kanten, nämlich den K^5 . Dies ist also der Graph mit 10 Kanten, der die kleinste Eckenzahl hat.

Auch um die minimale Eckenzahl eines Graphen mit 45 Kanten zu finden, kann man hoffen, dass es einen vollständigen Graphen mit 45 Kanten gibt. Man findet dann

$$45 = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2},$$

die Hoffnung hat sich also erfüllt. Der gesuchte Graph ist demnach der K^{10} mit 45 Kanten. Die gesuchte minimale Eckenzahl ist also 10.

Wenn man die Lösungen nicht durch Probieren finden möchte, löst man die Gleichung $(*)$. Man formt sie um zur quadratischen Gleichung $n^2 - n = 2k$ mit der Lösung $n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{8k+1})$. (Überprüfen Sie, dass Einsetzen der Kantenzahlen $k = 10$ bzw. 45 tatsächlich zu den Eckenzahlen $n = 5$ bzw. 10 führt, wie wir durch Probieren gefunden haben.)

Übung 20

Beim Handschlaglemma haben wir jede Kante von jeder ihrer beiden Ecken aus gezählt, wir haben sie also doppelt gezählt. Hier dagegen zählen wir jede Kante nur einfach, nämlich ausgehend von derjenigen ihrer beiden Ecken, die in A liegt.

Übung 21

Diese Graphen könnte man *Sterngraphen* nennen – und so heißen sie auch.

Übung 22

$K^{n,m}$ und $K^{m,n}$ sind isomorph. Das lesen wir unmittelbar an der Zeichnung beider Graphen ab. Es folgt aber auch unmittelbar aus der Definition bipartiter Graphen.

Übung 23

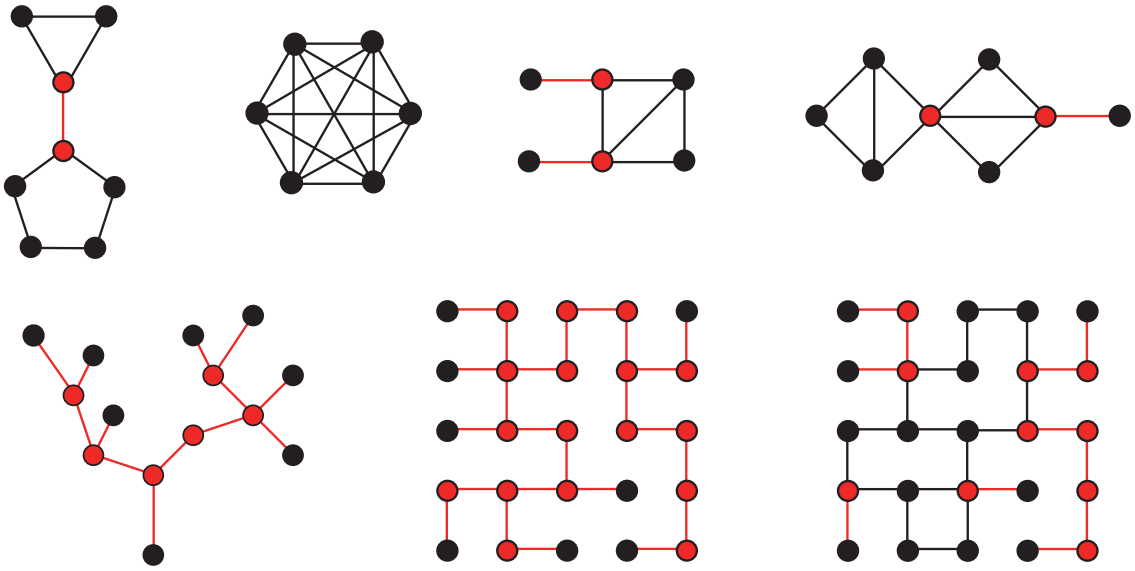
‚Vollständig' bedeutet, dass zwei Ecken eines Graphen immer adjazent sind. In einem Multigraphen (und damit auch in einem gerichteten Graphen) ist die Anzahl der Kanten zwischen zwei Ecken nicht beschränkt. Daher gibt es für eine gegebene Eckenmenge nicht *genau einen* vollständigen Multigraphen (oder Digraphen) mit dieser Eckenmenge, sondern unendlich viele. Weil es hier auch Schlingen geben kann, gehört zum Begriff der Vollständigkeit auch, dass jede Ecke zu sich selbst adjazent ist, also an jeder Ecke (mindestens) eine Schlinge vorhanden ist. Einen vollständigen Digraphen würde man sicher so definieren, dass zu zwei beliebigen (nicht notwendig verschiedenen) Ecken a, b stets die beiden gerichteten Kanten ab und ba existieren (evtl. jeweils mehrfach).

Übung 24

Der Graph ist ein Baum.

Übung 25
Der Graph ist ein Baum.

Übung 26
Der Graph ist ein Baum.

Übung 27


Übung 28
Brücken (rot markiert) sind genau die Kanten, *die nicht zu einem Kreis gehören.*

Zerlegungsecken (rot markiert): Wenn eine Ecke mit (mindestens) einer Brücke inzident ist, dann wird beim Entfernen dieser Ecke auch die Brücke entfernt. Nach der Definition von Brücken erhöht sich dann die Komponentenzahl des Graphen. Wenn nun auch die Ecke entfernt wird, bleibt die Komponente, in der diese Ecke lag, aber nur genau dann erhalten, wenn die Ecke keine Endecke war. War sie eine Endecke, so besteht die neue Komponente nur aus ihr, so dass mit dem Entfernen dieser Ecke die ganze neue Komponente entfernt wird, sich die Komponentenzahl also *nicht* erhöht.

Im Gegensatz zu Endecken bleiben beim Entfernen von Nicht-Endecken, die mit einer Brücke inzident sind, in der Komponente dieser Nicht-Endecke noch weitere Ecken übrig. So dass beim Entfernen der Nicht-Endecke tatsächlich eine zusätzliche Komponente übrig bleibt, wodurch sich also die Komponentenzahl erhöht.

Also gilt: *(1) Eine Endecke ist immer mit einer Brücke inzident, ist aber niemals Zerlegungsecke. (2) Eine Nicht-Endecke, die mit einer Brücke inzident ist, ist immer eine Zerlegungsecke.* Die Umkehrung gilt aber nicht: Denn es gibt Zerlegungsecken, die nicht mit einer Brücke inzident sind. Beweis: Zum Beispiel die rotmarkierten Ecken im Graph oben rechts von Übung 27.

Die Inzidenz mit einer Brücke ist für Nicht-Endecken also ein *hinreichendes* Kriterium dafür, Zerlegnugsecke zu sein. Es ist aber *kein notwendiges* Kriterium.

In kreislosen Graphen (d.h. in Bäumen und Wäldern) ist jede Kante eine Brücke und jede Ecke entweder eine Endecke oder eine Zerlegungsecke.

Wir können auch so formulieren: *In jedem Graphen spannen die Brücken Untergraphen auf, die Bäume sind.* In dem Graphen unten rechts in Übung 27 sind dies die 5 Baum-Untergraphen, die von den roten Kanten aufgespannt werden.

Übung 29

Ein Baum hat mindestens zwei Endecken (sofern er mindestens 2 Ecken hat).

Übung 30

Lösung im Text.

Übung 31

Der indizierte K^2 hat einen Spannbaum (sich selbst).

Der indizierte K^3 hat 3 Spannbäume (jeweils eine Kante löschen).

Der indizierte K^4 hat 16 Spannbäume (macht etwas Mühe).

Vermutung: Falls man für alle indizierten K^n die Anzahl der Spannbäume mit einem *einfachen* gemeinsamen Term berechnen kann, könnte das nur der Term n^{n-2} sein.

$4^{4-2} = 4^2 = 16 \qquad 3^{3-2} = 3^1 = 3 \qquad 2^{2-2} = 2^0 = 1$

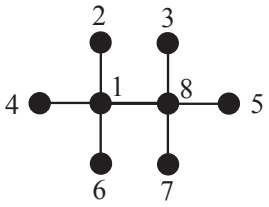
Übung 32

Prüfer-Codes der 4 Bäume (von links nach rechts):

$(3,1,3,1,9,3,9)$, ( ), $(1,8,1,5,6,8,6)$, $(7,9,8,7,9,1,1,8)$

$(1,1,1,1,1)$: Stern mit Zentrum 1 und Endecken 2 bis 7.

$(1,8,1,8,1,8)$:



$(1,9,3,1,5)$: kein Prüfer-Code, da Länge = 5, also Eckenzahl = 7 (9 kann nicht vorkommen).

$(1,7,3,1,5)$: Weg 4,7,5,1,3,6 mit zusätzlicher Endecke 2 adjazent zu 1.

$(1,2,3,4,\ldots,99,100)$: Weg $101,1,2,3,4,\ldots,99,100,102$. Allgemein: $(1,2,3,\ldots,n)$ ist Prüfer-Code des Weges $n+1,1,2,3,\ldots,n,n+2$

Übung 33

Der Grad einer Ecke ist stets um 1 größer als die Häufigkeit, mit der sie im Prüfer-Code auftritt.

Beweis: Sei h die Häufigkeit der Ecke e im Prüfer-Code. Bei jedem Hinzufügen der Ecke e zum Code wird ein Nachbar von e gelöscht. Wenn e also h-mal im Code vorkommt, dann muss e im Ausgangsbaum mindestens h Nachbarn haben. Zum Zeitpunkt des letztmaligen Einfügens von e in den Code ist e im Restbaum noch vorhanden, und zwar als Endecke (wäre e nicht Endecke, so müsste e später nochmals zu dem Code hinzugefügt werden). Das heißt aber: e hat noch genau einen Nachbarn mehr als die h gelöschten. Also hat e den Grad $h+1$.

Daher tauchen die Ecken mit Grad 1, d.h. die *Endecken* des Baums, im Prüfercode 0-mal, also überhaupt nicht auf.

Übung 34

Man kann soviel Kanten löschen, bis ein Baum entsteht. Da ein Baum mit n Ecken $n-1$ Kanten hat, kann man die folgende Zahl an Kanten weglassen:

$$\binom{n}{2}-(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{2(n-1)}{2}$$

$$=\frac{n(n-1)-2(n-1)}{2}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}=\binom{n-1}{2}$$

Übung 35

Es gibt mehrere, siehe Abbildungen bei Prim und Kruskal.

Übung 36

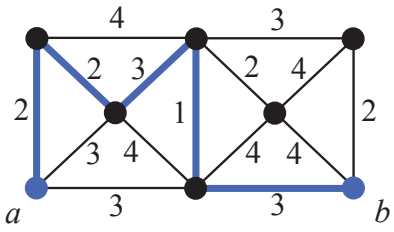
Nicht jeder gewichtete Graph hat einen minimalen Spannbaum. Denn nur ein zusammenhängender Graph hat einen Spannbaum (mindestens einen). Ein zusammenhängender gewichteter Graph hat stets einen minimalen Spannbaum, häufig mehrere verschiedene. Die minimalen Spannbäume müssen nicht isomorph sein, wie die Beispiele bei Prim und Kruskal zeigen.

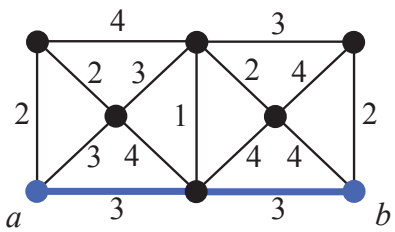
Übung 37

Man zeichnet immer die kürzesten Verbindungsstrecken ein.

Übung 38

Hier würde sich ein Weg der Länge 11 ergeben (s. Abb. links), der bei weitem kein kürzester ist. Die Greedy-Strategie ist beim *Problem des kürzesten Weges* also nicht erfolgreich. Der kürzeste Weg hat die Länge 6 (s. Abb. rechts).





Übung 39

Übung 40

Die C-Atome genügen völlig. Denn aus dem reinen Molekülskelett der C-Atome kann man alle H-Atome mit ihren genauen Positionen konstruieren, indem man bei jedem C-Atom evtl. noch bis 4 fehlende Bindungen durch H-Atome auffüllt („absättigt“). Die C’s kann man auch noch weglassen. Beispiel (vgl. Übung 46):

Übung 41

Man entdeckt, dass bei 4 C-Atomen genau dann die nötigen 10 Bindungen für H-Atome übrigbleiben, wenn die C-Atome keine Mehrfachbindungen und keine Zyklen aufweisen. Dann gibt es nur zwei Struktur-Isomere: Das Butan und das Isobutan.

Übung 42

Das kleinste Alkan ist das Methan CH_4 mit nur einem C-Atom.

Verzweigungen sind erst in Ketten ab einer Länge von 4 möglich. Denn 1 bis 3 Ecken bilden immer einen Weg. Daher ist das kleinste Isoalkan das Isobutan C_4H_{10}, in dem ein C-Atom an die beiden übrigen gebunden ist.

Drei Raumpunkte liegen immer in einer Ebene; ab vier muss das nicht so sein. Daher liegen beim Cyclopropan C_3H_6 die drei C-Atome alle in einer Ebene. Das ist aber auch nur bei diesem Cycloalkan so.

Übung 43

1. Fall: Das Alkan hat nur eine Verzweigung, d.h. ein C-Atom, das mit mehr als zwei weiteren C-Atomen verknüpft ist. Von diesem lösen wir einen Zweig ab, ebenso von einem C-Atom am Ende der Kette ein H-Atom. Beide vertauschen wir nun. Dadurch entsteht ein unverzeigtes Molekül, das dieselbe Anzahl an C- und H-Atomen hat wie das verzweigte. Beide haben also die selbe Summenformel.

2. Fall: Das Alkan hat k Verzweigungen. Dann lässt es sich aus einem unverzweigten Molekül mit gleicher Summenformel herstellen, indem man k-mal den Schritt vom 1. Fall ausführt. Nach jedem Schritt entsteht also wieder ein Molekül mit derselben Summenfomel.

Übung 44

Übung 45

Genau so viele, wie es nichtzyklische Alkane mit 20 C-Atomen gibt, also 366.319.

Übung 46

Durch Abzählen findet man: $C_{26}H_{40}$. Dies entspricht auch der allgemeinen Formel, da das Molekül 3 Doppelbindungen und 4 Zyklen enthält. Die Anzahl der H-Atome ist also $2 \cdot 26 + 2 - (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = 54 - 14 = 40$.

Übung 47

Gegenüber einer Einfachbindung bindet jede Doppelbindung an den beiden verbundenen C-Atomen je eine Bindung zusätzlich, so dass dort insgesamt 2 H-Atome weniger gebunden werden können. Graphentheoretisch liegt hier das Hinzufügen einer weiteren Kante zwischen zwei bereits bestehenden Ecken vor. Analog bei einer Dreifachbindung: Graphentheoretisch werden hier zwei Kanten zwischen zwei bestehenden Ecken hinzugefügt. Chemisch: Pro C-Atom jeweils 2 H-Atome weniger, insgesamt also 4 H-Atome pro Dreifachbindung weniger. Daher zählen Dreifachbindungen doppelt so stark wie Doppelbindungen. Ein Ring (graphentheoretisch: Kreis) entsteht aus einer Kette (graphentheoretisch: Weg) durch Hinzufügen einer weiteren Kante wischen bereits bestehenden C-Atomen (graphentheoretisch: Ecken).

Also muss man für jede Doppelbindung und für jeden Ring jeweils 2 H-Atome abziehen, für jede Dreifachbindung doppelt so viele, also 4 H-Atome. Das genau wird in der Summenformel ausgedrückt (ausgehend von $2n + 2$ H-Atomen beim nichtzyklischen Alkan).

Übung 48

Zu 3: 2,4-Dimethylpentan, 3,4-Dimethylheptan – unten: 2-Methyl-3-Ethylpentan

Übung 49

Übung 50

Übung 51

Aus der Existenz einer (geschlossenen oder offenen) Eulertour folgt lediglich, dass die *Kanten* alle zusammenhängen. Der Graph selbst muss nicht zusammenhängend sein, er kann auch isolierte Ecken haben. Alle Kanten müssen in *einer* Komponente liegen. Der (Multi-)Graph ist also *bis evtl. auf isolierte Ecken zusammenhängend*.

Übung 52

Übung 53

Übung 54

Übung 55

Übung 56

Ja, Euler formuliert das Handschlaglemma so: „16. […] Zuerst stelle ich fest, dass die Summe der Brückenzahlen, die neben den einzelnen Buchstaben *A, B, C* usw. stehen, das Doppelte der Gesamtzahl der Brücken ist. Der Grund dafür ist, dass bei dieser Rechnung, wo alle in das jeweilige Gebiet führenden Brücken gezählt werden, jede Brücke doppelt gezählt wird; jede Brücke wird nämlich bei beiden der von ihr verbundenen Gebiete berücksichtigt.“

Übung 57

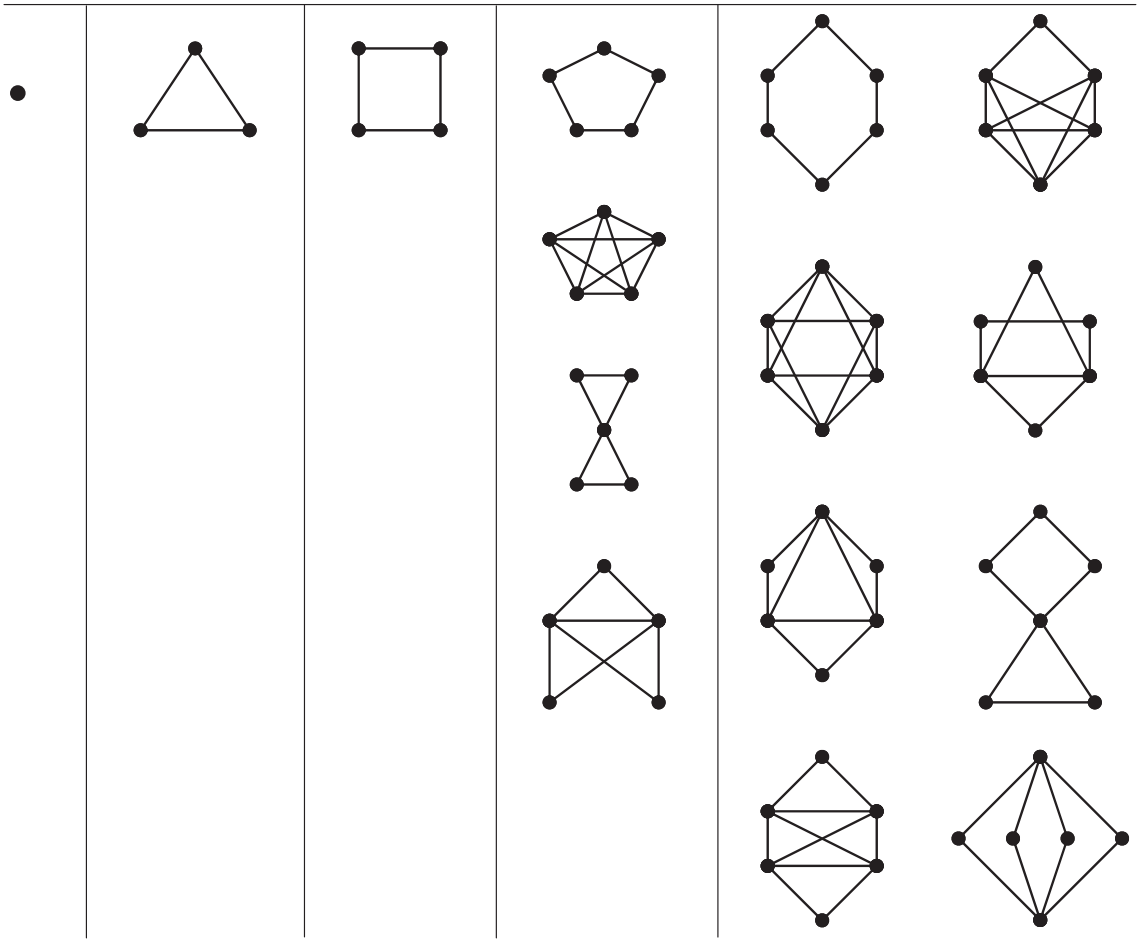
Ja, es gibt vollständige Graphen, die eulersch sind. Es sind die mit ungerader Eckenzahl n. Denn um eulersch zu sein, muss der K^n ausschließlich gerade Ecken haben. Da der Grad jeder seiner Ecke $n-1$ ist, ist das gleichbedeutend damit, dass n ungerade ist.

Übung 58

Allgemeine Methode: Zeichne zum Grundriss den zugehörigen (Multi-)Graphen: In jedes Zimmer eine Ecke zeichnen; zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbinden, wenn zwischen beiden Zimmern eine Tür besteht (die Kante kann durch die gemeinsame Tür gezeichnet werden). Einen Tür-Rundweg gibt es genau dann, wenn der zugehörige (Multi-)Graph eulersch ist. Im Beispiel existiert kein Rundweg, weil es zwei ungerade Ecken (vom Grad 3 bzw. 5) gibt.

Übung 59

Vorüberlegung: Ist die Eckenzahl n, so hat jede Ecke einen Grad $\leq n-1$. Es kommen also nur die geraden Zahlen von 0 bis $n-1$ als Eckengrade in Frage. Bei bis zu 6 Ecken muss also jede Ecke den Grad 0, 2 oder 4 haben. Es gibt die folgenden 15 Graphen (in der Tabelle geordnet nach der Eckenzahl).



Übung 60

Eulersche Multigraphen (ohne isolierte Ecken) mit maximal 5 Kanten: Es gibt 1 mit 1 Kante, 2 mit 2 Kanten, 3 mit 3 Kanten, 7 mit 4 Kanten, 12 mit 5 Kanten.

Übung 61

Ein solches Kantenmodell aus einem einzigen langen, an den Ecken gebogenen Draht ist nichts anderes als die ‚technische Realisierung' einer geschlossenen Eulertour. Das ist also genau dann möglich, wenn alle Ecken (des Kantengraphen) geraden Grad haben. Das ist aber nur beim Oktaeder der Fall. Also lässt sich nur ein Oktaeder-Kantenmodell aus einem Draht biegen.

Übung 62

Beweis: Man stellt aus dem Mutigraphen einen neuen her, indem man jede Kante verdoppelt. Danach sind alle Eckengrade gerade. Nach Euler-Hierholzer gibt es im neuen Multigraphen also eine Eulertour. Diese verwendet jede der neuen Kanten genau einmal; also jede der alten Kanten genau zweimal.

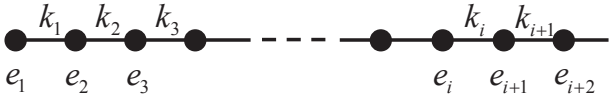
Übung 63

Für einen schlichten Graphen ist die Behauptung klar. Denn wenn jede Ecke einen Grad ≥ 2 hat, dann kann keine Komponente ein Baum sein (sonst gäbe es isolierte Ecken oder Endecken, siehe Satz). Also enthält jede Komponente einen Kreis. Dieser ist ein geschlossener Kantenzug.

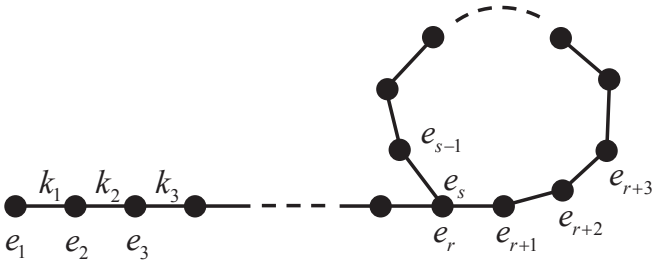
Für einen echten Multigraphen ist die Behauptung aber noch leichter zu zeigen. Denn jede Mehrfachkante und jede Schlinge ist ein geschlossener Kantenzug.

Ohne den Satz „Jeder Baum hat mind. 2 Endecken" können wir so beweisen: Sei G ein schlichter Graph ohne isolierte Ecken und ohne Endecken (genau das bedeutet ja die Voraussetzung, dass jeder Eckengrad mindestens 2 ist). Wir zeigen, dass *G* einen Kreis haben muss.

Wir wählen irgendeine Ecke e_1 und eine davon ausgehende Kante k_1, die zu einer Ecke e_2 führt. (Eine solche Kante k_1 muss es geben, da e_1 sonst isoliert wäre.) Da e_2 keine Endecke ist, muss es eine weitere Kante $k_2 \neq k_1$ geben, die zu einer Ecke e_3 führt. (Nebenbei bemerkt: Die drei Ecken e_1, e_2, e_3 müssen verschieden sein, da $k_2 \neq k_1$.) So konstruieren wir weiter; allgemein formuliert: wenn wir von einer Ecke e_i über eine Kante k_i zu einer Ecke e_{i+1} gekommen sind, dann muss von dieser eine andere Kante k_{i+1} zu einer Ecke e_{i+2} führen (denn von jeder Ecke gehen ja mindestens zwei Kanten aus).



Irgendwann muss dabei einmal eine Ecke erreicht werden, die dieser Weg bereits früher einmal passiert hat. Andernfalls kämen unaufhörlich neue Ecken hinzu, was unmöglich ist, weil *G* nur endlich viele Ecken hat. Nennen wir die erste solche Ecke



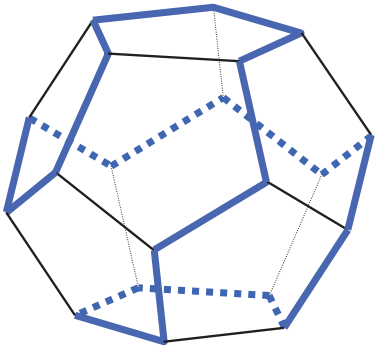
e_s, dann ist also e_s ist identisch mit einer Ecke e_r mit $r < s$. Mit anderen Worten: $e_r, e_{r+1}, e_{r+2}, e_{r+3}, \ldots, e_{s-1}, e_s$ ist ein Kreis.

Übung 64

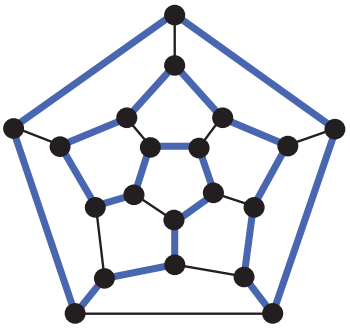
Der Beweis ergibt sich aus dem Beweis des Satzes von Hierholtzer.

Übung 65

Eine Lösung von Hamiltons Puzzle ist z.B.:



Rundreise auf des Dodekaeders



Hamiltonkreis im Dodekaedergraphen

Übung 66

Das handwerkliche Werkzeug, das Vorbild für Hamiltons Puzzle war, ist der ‚Stopfpilz', der früher zum Stopfen von Strümpfen benutzt wurde.

Wenn man ein Kantenmodell eines Dodekaeders auf eine seiner Fünfeckflächen stellt und sich vorstellt, alle Kanten wären aus Gummi, dann kann man die fünf Ecken der Basis so weit auseinander ziehen (und stramm halten), dass – genau senkrecht von oben betrachtet – keine Kanten einander überschneiden (außer an den Ecken). Man erhält dabei im wesentlichen die ‚Stopfpilz'-Figur von Hamiltons Puzzle.

Projiziert man dieses Bild auf die Basisebene, so erhält man den (planaren) Dodekaedergraphen. Dass dieser Dodekaedergraph und das Kantenmodell Dodekaeder dieselbe topologische Struktur haben, bedeutet nichts anderes, als dass beide Graphen zueinander isomorph sind. Das prüft man mit den bereits bekannten Methoden nach.

Diese topologische Verzerrung lässt sich bei allen platonischen Körpern, ja bei allen konvexen Polyedern durchführen. Zu jedem konvexen Polyeder (genauer: zu jedem Kantenmodell eines konvexen Polyeders) gibt es einen isomorphen planaren Graphen, den zugehörigen ‚Polyedergraphen'.

Übung 67

Je mehr Kanten er hat, desto eher ist ein Graph hamiltonsch. Wenn (bei gegebener Eckenmenge) alle möglichen Kanten vorhanden sind, ist der Graph vollständig und damit sicher hamiltonsch.

Übung 68

Vollständige Graphen sind natürlich immer hamiltonsch (siehe Satz 23). – Vollständige *bipartite* Graphen sind genau dann hamiltonsch, wenn beide Eckenteilmengen gleichgroß sind. Denn ein Hamiltonkreis muss (wie jeder Kreis in einem bipartiten Graphen) abwechselnd A-Ecken und B-Ecken enthalten. Da ein Hamiltonkreis jede Ecke des Graphen enthält, muss in einem bipartiten Graphen jeder Hamiltonkreis ebenso viele A- wie B-Ecken enthalten. Damit ist das Kriterium „beide Eckenteilmengen gleichgroß“ notwendig. Es ist aber auch hinreichend. Denn wenn es erfüllt ist, kann man mit jeder beliebigen Ecke starten und (abwechselnd zwischen den beiden Eckenteilmengen) zu einer beliebigen noch nicht besuchten Ecke weitergehen, um einen Hamiltonkreis zu bilden.

Übung 69

Man erweitert einfach zu einem vollständigen Graphen.

Übung 70

Wenn man Kanten ‚einfach drauflos' ergänzt, erhält man irgendwann einen Graphen, der zwar *noch nicht hamiltonsch* ist, der aber

– *entweder* bei Hinzufügen jeder weiteren Kante hamiltonsch wird (dann ist er also maximal nicht-hamiltonsch)

– *oder* nur bei Hinzufügen *spezieller* Kanten hamiltonsch wird. In diesem Fall ist der Graph also (noch) nicht *maximal* nicht-hamiltonsch. Man muss dann nur solche Kanten ergänzen, die den Graphen noch nicht hamiltonsch machen. Irgendwann gibt es keine solche Kante mehr. Dann hört man auf. Jede weitere Kante würde den Graphen nun hamiltonsch machen. D.h. jetzt ist er *maximal* nicht-hamiltonsch.

Der Algorithmus *Erweiterung zu einem maximal nicht-hamiltonschen Graphen* hat also nur eine einzige, sehr einfache Regel: Ergänze eine beliebige Kante, die den Graphen nicht hamiltonsch macht; und höre auf, wenn es keine solche mehr gibt. (Dann ist der zuletzt entstandene Graph automatisch *maximal nicht-hamiltonsch*.)

Übung 71

Nein. Denn der Dodekaedergraph hat $n = 20$ Ecken, ist aber 3-regulär. Um Dirac anwenden zu können, müsste jede Ecke einen Grad von mindestens $n/2 = 10$ haben (und nicht 3). Man sieht also: Der Satz ist ‚leider ziemlich selten' anwendbar.

Übung 72

Ganz einfach so: Wenn jede Ecke mit *mehr als der Hälfte der übrigen* adjazent ist,

dann muss der Graph hamiltonsch sein. (Vorausgesetzt, er hat mindestens 3 Ecken, aber sonst kann er ja überhaupt keinen Kreis enthalten, da es hier nur um schlichte Graphen geht.) Machen Sie sich das für einen Graphen mit 10 und einen mit 11 Ecken klar.

Übung 73

Übung 74
Ganz einfach: Zum Beispiel ein Dreieck. Weitere Beispiele bitte selbst finden.

Übung 75
Nur der linke ist hamiltonsch. (Kein formaler Beweis für den rechten erforderlich; es soll hier reichen, genügend lange zu probieren).

Übung 76
Die kleinste Eckenzahl ist 3, da kleinere Graphen kreislos sind. Um alle hamiltonschen Graphen mit n Ecken zu finden, geht man vom K^n aus, den man als n-Eck mit sämtlichen Diagonalen zeichnet, und lässt auf alle möglichen Arten Diagonalen weg. Jeden neu erzeugten Graphen vergleicht man mit bereits gezeichneten (mit gleicher Diagonalenzahl) auf evtl. Isomorphie; bei Isomorphie löscht man den zuletzt erzeugten Graphen wieder. – *Verbindung zur Übung 77:* Auf die beschriebene Weise zeichnet man faktisch genau die Kreis-Diagonalen-Graphen mit n Ecken; das sind eben genau die hamiltonschen Graphen mit n Ecken.

Übung 77
Die Behauptung ist trivial. Jeder Kreis-Diagonalen-Graph ist nach Definition automatisch hamiltonsch. Denn der Kreis enthält ja alle Ecken. Hat ein Graph umgekehrt einen Hamiltonkreis $e_1e_2\ldots e_ne_1$, so zeichnet man auf einem Kreis in der Ebene ringsherum einfach n Punkte (=Ecken) $e_1e_2\ldots e_n$ ein, die man je nach Adjazenz noch diagonal miteinander verbindet.

Übung 78
Die Behauptung trifft zu. Denn bei einer Eckenzahl $n=2k-1$ ist der Eckengrad $k>k-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2k-1)=\frac{1}{2}n$. Also ist die Voraussetzung des Satzes von Dirac erfüllt, d.h. der Graph ist hamiltonsch.

Übung 79
Die geschlossene Eulertour muss über jede Ecke führen, und zwar jeweils genau einmal. Das ist genau dann möglich, wenn jede Ecke den Grad 2 hat (und der Graph zusammenhängend ist). Mit anderen Worten: wenn der Graph ein Kreis ist.

Übung 80
Einen solchen *nicht*-zusammenhängenden Graphen kann es nicht geben. Angenom-

men, es gäbe doch so einen Graphen. Dann müsste er mindestens 2 Komponenten haben. Wir betrachten eine Ecke a in der einen und eine Ecke b in der zweiten Komponente (evtl. weitere Komponenten brauchen wir nicht zu betrachten). Der Eckengrad jeder Ecke ist nach Voraussetzung $\geq n/2$, was dasselbe bedeutet, wie dass jede Ecke mit mehr als der Hälfte der übrigen Ecken adjazent ist. Demnach müsste sowohl a als auch b mit mehr als der Hälfte der jeweils übrigen Ecken adjazent sein, d.h. in jeder der beiden Komponenten müsste jeweils mehr als die Hälfte aller Ecken liegen. Komponenten sind aber natürlich stets eckendisjunkt, so dass also in den beiden Komponenten insgesamt mehr als alle Ecken liegen müssten. Widerspruch.

Übung 81

Ist G hamiltonsch, dann erst recht auch G^{+ab}.

Sei umgekehrt G^{+ab} hamiltonsch mit $d(a)+d(b)\geq n$. Wäre G *nicht* hamiltonsch, so könnten wir wie im Beweis des Satzes von Dirac vorgehen und die Ungleichung (6) herleiten: $d(a)+d(b)= \quad \cdots \quad < n$. Widerspruch zur Voraussetzung $d(a)+d(b)\geq n$. Also muss auch G hamiltonsch sein.

Übung 82

Da es 6 Städte sind, und jede mit jeder anderen adjazent ist, gibt es $5!/2=60$ verschiedene Rundreisen. Die kürzeste Rundreise ist Aachen–Köln–Bonn–Frankfurt–Wuppertal–Düsseldorf–Aachen mit einer Gesamtlänge (einem Gesamtgewicht) von 617 km.

Übung 83

Lösung: Das maximale (perfekte) Matching auf der nächsten Seite

Übung 84

Eine Paarung ist eine Menge paarweise nicht-inzidenter Kanten (siehe Definition).

Übung 85

Das abgebildete Matching ist nicht erweiterbar. Aber es ist auch nicht maximal: Denn durch Umfärben der Kanten entlang des markierten Weges erhält man ein Matching, das eine Kante mehr enthält.

Übung 86

Jeder Kreisgraph (Graph, der ein Kreis ist) mit gerader Eckenzahl $2n$ hat ein perfektes Matching mit n Kanten (einfach jede zweite Kante färben). Jeder Eckengrad in einem Kreisgraphen ist 2. D.h. ab $n\geq 2$ ist keine Ecke „mit mehr als der Hälfte aller Ecken benachbart“, obwohl der Kreisgraph ein perfektes Matching hat.

Übung 87

Übung 88

Übung 89

Übung 90

Übung 91

Übung 92

Übung 93

Einen solchen Graphen gibt es nicht (siehe Satz 32).

Übung 94

Einen solchen Graphen gibt es nicht. Ein regulärer bipartiter Graph hat immer ein perfektes Matching. (siehe Satz 33)

Übung 95

Der Zustellbezirk hat ausschließlich solche Kreuzungen, in die eine gerade Zahl von Straßen des Bezirks (!) einmündet. Es gibt also eine geschlossene Eulertour in dem Bezirk. Diese ist zugleich eine kürzeste Briefträgertour, da jede Straße des Bezirks ja mindestens einmal abgelaufen werden muss. Ihre Länge ist demnach die Summe aller Längen von Straßen des Bezirks (4640 m).

Wichtigste Erkenntnis nach Neubau der Straße: Die Tour verlängert sich *nicht* einfach um die Länge der neuen Straße. Denn mit der neuen Straße ist der Bezirk nicht mehr eulersch. Nun muss jede Briefträgertour (die ja geschlossen sein muss) mindestens eine Straße doppelt begehen. Die kürzeste Lösung besteht darin, die neue Straße einfach zweimal zu gehen (z.B. unmittelbar hintereinander in die eine, dann zurück in der anderen Richtung). Die ursprüngliche Tour verlängert sich also um *zweimal* 440 m, also um 880 m.

Übung 96

Eine Briefträgertour ist graphentheoretisch eine Kantenfolge, die jede Kante mindestens einmal enthält. Eine *kürzeste* Briefträgertour ist eine solche mit *minimalem Gewicht* (minimaler *Gesamtlänge*).

Übung 97

Wie wir gesehen haben, ist bei *eulerschen* (Multi-)Graphen eine kürzeste Briefträgertour unmittelbar erkennbar: In eulerschen (Multi-)Graphen ist eine Eulertour automatisch eine kürzeste Briefträgertour.

Übung 98

Nein, die Startecke (Startkreuzung) ist nicht von Bedeutung. Da eine Briefträgertour über alle Kanten führen muss, führt sie durch jede Ecke; und da sie geschlossen ist, kann sie bei jeder Ecke des Graphen (bei jeder Kreuzung des Zustellbezirks) beginnen, ohne dass sich an der Gesamtlänge etwas ändern würde.

Übung 99

Der Graph oben links ist eulersch. Eine kürzeste Briefträgertour hat also als Länge die Summe aller Kantenlängen (28).

Der Graph oben Mitte ist nicht eulersch; durch Verdopplung der Kante mit Länge 5 entsteht der eulersche Multigraph mit der kürzesten Briefträgertour der Länge.

Der Graph oben rechts gleicht dem in der Mitte, doch ist hier die Verdopplung der Kante mit Länge 7 nicht optimal. Man kann die beiden ungeraden Ecken kürzer verbinden, wenn man die beiden Kanten der Länge 3 wählt. Also führt die Verdopplung dieser beiden Kanten zu einem eulerschen Multigraphen, in dem jede Eulertour eine kürzeste Briefträgertour im Ausgangsgraphen repräsentiert. Deren Länge ist also $28+5+2\cdot 3=39$.

Der Graph unten links ist ein Baum. Wir beobachten, dass wir bei Bäumen immer jede einzelne Kante verdoppeln müssen, um eine überhaupt eine Briefträgertour zu ermöglichen. (Das liegt daran, dass man Brücken immer verdoppeln muss, siehe den Worst-Case-Satz).

Der Graph unten rechts macht mehr Mühe; eine ausführliche Lösung hierfür steht im Text.

Übung 100

Die heimtückischsten Zustellbezirke müssen die baumförmigen sein. Wir haben bereits beobachtet, dass Bäume tatsächlich immer die Verdopplung aller Kanten erfordern.

Übung 101

Behauptung: Ein Graph mit einer Brücke muss Ecken von ungeradem Grad haben. Der (indirekte) Beweis nutzt die Idee aus dem Beweis des Worst-Case-Satzes: Angenommen, der Graph hätte nur gerade Ecken. Wir betrachten die Komponente des Graphen, in der die Brücke liegt. Da auch diese Komponente nur gerade Ecken enthält, ist sie eulersch, sie enthält also eine *geschlossene* Eulertour. Diese Eulertour muss alle Kanten der Komponente benutzen, also auch die Brücke. Nach Überqueren einer Brücke kann aber eine Eulertour nicht mehr zu den davor passierten Ecken zurückkehren, da sie jede Kante nur einmal benutzt. Die Eulertour kann also *nicht geschlossen* sein. Widerspruch.

Übung 102

Der Ikosaederstumpf hat 12 Fünfecke, 20 Sechsecke, also 32 Flächen; 60 Ecken und 90 Kanten. Also $e-k+f=60-90+32=2$.

Übung 103

Übung 104

Enthält ein Graph eine Brücke, so kann es in ihm keine geschlossene Eulertour geben

(Begründung wie im Beweis von Satz 34). Also kann er nicht nur gerade Ecken haben. Da die Anzahl ungerader Ecken gerade sein muss, muss der Graph mindestens zwei ungerade Ecken haben.

Übung 105

Übung 106

Übung 107

Übung 108

Übung 109

Ein Ikosaeder hat 20 Flächen, jede wird von 3 Kanten berandet. Multiplizieren wir $3 \cdot 20$, so zählen wir jede Kante doppelt, da jede Kante zu genau zwei Dreiecken gehört. Also hat ein Ikosaeder 30 Kanten.

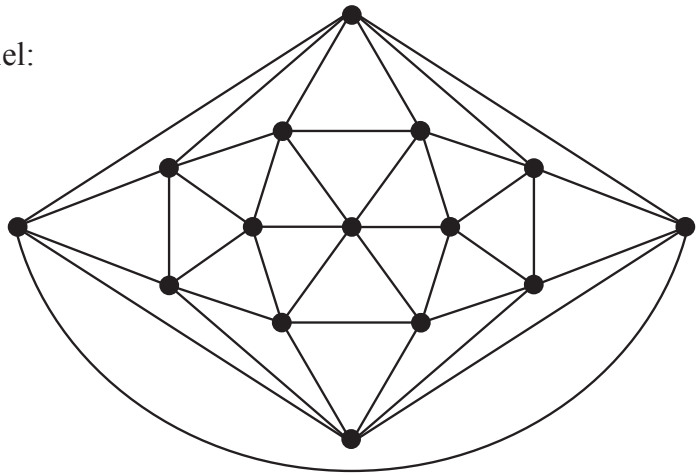
Übung 110

(1) Jede Fläche wird mindestens von 3 Kanten berandet. Also ist die doppelte Kantenzahl mindestens $3 \cdot 92 = 276$. Die Kantenzahl ist also mindestens 138.

(2) Beim *Dodecaedron simum* ergibt $3 \cdot 80 + 5 \cdot 12 = 300$ die doppelte Kantenzahl. Dieser archimedische Körper hat also 150 Kanten.

Übung 111

(1) Zum Beispiel:



(2) Einen solchen planaren Graphen gibt es nicht (siehe den folgenden Satz).

Übung 112

Ist in einem planaren Graphen jeder Eckengrad ≥ 5, so ist die Summe aller Eckengrade mindestens $5e$. Nach dem Handschlaglemma ist also $2k \geq 5e$ bzw. $e \leq \frac{2}{5}k$. Nach der Zweidrittel-Ungleichung ist $f \leq \frac{2}{3}k$. Nach der Eulerschen Polyederformel gilt dann $2 = e - k + f \leq \frac{2}{5}k - k + \frac{2}{3}k = \frac{6}{15}k - k + \frac{10}{15}k = \frac{1}{15}k$. Also $2 \leq \frac{1}{15}k$ bzw. $k \geq 30$. Ein solcher Graph muss also mindestens 30 Kantenhaben.

Übung 113

Bereits 3 Häuser sind zu viel! Denn der $K^{3,3}$ ist nicht plättbar. Und daher kein $K^{3,n}$ für $n \geq 3$.

Übung 114

Man kommt mit 4 Farben aus.

Übung 115

In *jedem* bipartiten Graphen $G = (A \oplus B, K)$ erhält man eine zulässige Färbung, wenn man alle A-Ecken mit der einen und alle B-Ecken mit der anderen Farbe färbt. Denn da Kanten nur zwischen A- und B-Ecken verlaufen, verbindet jede Kante dann verschieden gefärbte Ecken. Mit weniger als einer Farbe kommt man nicht aus. Also hat jeder bipartite Graph die chromatische Zahl 2.

Übung 116

Die chromatische Zahl des vollständigen Graphen K^n ist n, denn alle seine Ecken müssen unterschiedlich gefärbt sein: Da jede Ecke mit jeder anderen adjazent ist, gäbe es sonst adjazente Ecken mit gleicher Farbe.

Übung 117

Nein, beim K^4 kommt man beispielsweise schon mit 3 Kantenfarben aus.

Übung 118

Zum Beispiel so: Drei Länder bilden einen Ring, der ein viertes Land einschließt; so dass jedes Land mit jedem anderen eine gemeinsame Grenzlinie hat.

Übung 119

Handschlaglemma für beliebige (nicht unbedingt schlichte) Digraphen:

Als anschauliches Modell wählen wir nicht „Zwei Menschen geben einander die Hand“ (symmetrisch, nicht-orientiert), sondern „Ein Mensch übergibt einem anderen einen Brief“ (nicht-symmetrisch, orientiert). In diesem Modell gilt: Die Anzahl der Briefabgaben ist gleich der Anzahl der Briefentgegennahmen und gleich der Anzahl der übergebenen Briefe. Es besteht eine Isomorphie zwischen unserem Modell und einem Digraphen: Die Anzahl der Briefabgaben entspricht der Summe der Ausgangsgrade, die Anzahl der Briefentgegennahmen entspricht der Summe der Eingangsgrade, die Anzahl der Briefe entspricht der Summe der Kanten.

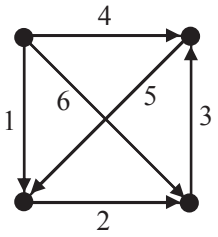
Übung 120

Ein Turnier mit n Ecken hat $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ gerichtete Kanten. Da man jede Kante auf zwei Arten orientieren kann, ist die Anzahl verschiedener Turniere mit n Ecken:

$$2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

Könnte man die Ecken (und damit die Kanten) *nicht* unterscheiden, gäbe es darunter zahlreiche zueinander isomorphe Turniere. Dadurch würde sich die Anzahl verschiedener (unterscheidbarer) Turniere erheblich reduzieren. Kann man die Ecken dagegen unterscheiden, so sind die $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ verschiedenen Turniere alle verschieden.

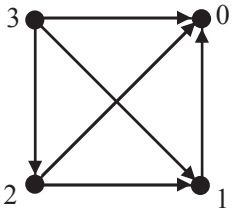
Übung 121



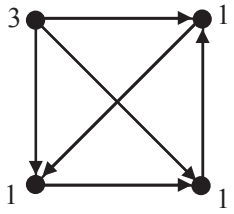
Ein Turnier kann natürlich mehrere verschiedene Hamiltonwege enthalten. Im abgebildeten Turnier $\vec{K}^4$ sind z.B. 1,2,3 und 4,5,2 hamiltonsche Wege. Einen Hamiltonkreis hat dieses Turnier nicht.

Aber natürlich *kann* ein Turnier einen gerichteten Hamiltonkreis enthalten: Wir brauchen nur einen gerichteten Kreis mit n Ecken zu zeichnen und jedes noch nicht adjazente Eckenpaar durch eine gerichtete Kante in beliebiger Orientierung zu verbinden. Auf diese Weise entsteht immer ein hamiltonsches Turnier mit n Ecken.

Übung 122



Links ein *transitives* Turnier mit 4 Ecken; es gibt nur einen Hamiltonweg; Ausgangsgradfolge: (0,1,2,3).



Rechts ein *nicht-transitives* Turnier mit 4 Ecken; es gibt zwei Hamiltonwege; Ausgangsgradfolge: (1,1,1,3).

Übung 123

Ein hamiltonsches Turnier hat stets mehrere Hamiltonwege und kann daher nicht transitiv sein (denn dann hätte es nur einen Hamiltonweg).

Ausführlicher gilt folgende Fallunterscheidung (Beachte: Ein Turnier hat nach dem Satz von Rédei stets mindestens einen gerichteten Hamiltonweg):

1. Das Turnier hat genau einen Hamiltonweg. Es ist also transitiv.
2. Das Turnier hat mehr als einen Hamiltonweg. Es ist also nicht transitiv.
   a. Das Turnier ist hamiltonsch (hat einen gerichteten Hamiltonkreis).
   b. Das Turnier ist nicht hamiltonsch (hat keinen gerichteten Hamiltonkreis).

Übung 124

Übung 125