Prof. Dr. Peter Berger



Kognitive Geometrie

Stand: 24.07.2014

Inhalt

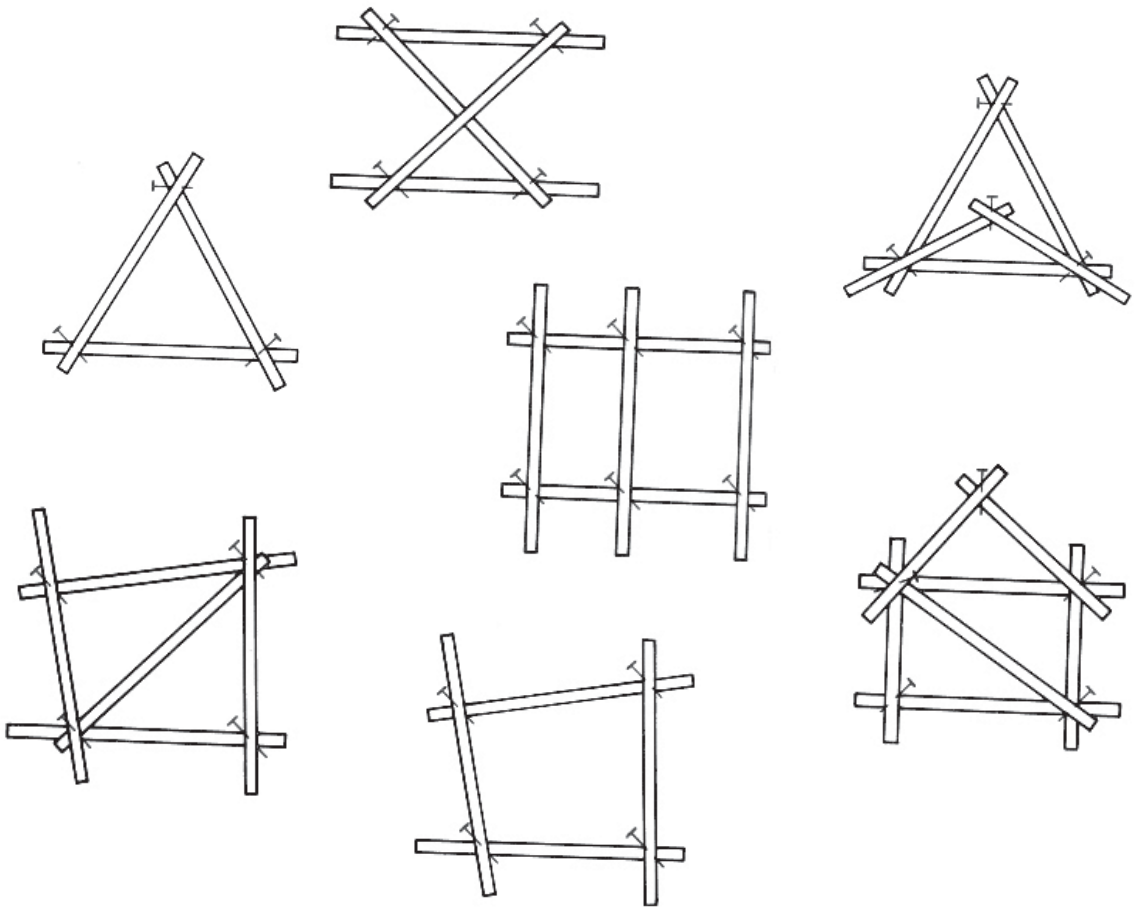
1	Kognitive Geometrie: Was ist das?	5
2	Illusionen: Die Grenzen unserer Anschauung	7
2	Axiome: Die Regeln unserer Anschauung	21
4	Geometrie lernen: Wie und wozu?	29
5	Das EIS-Prinzip: Hand–Auge–Kopf	33
6	Leitidee der Geometrie: Raum und Form	37
7	Puzzles: Kombinatorische Geometrie	41
8	Handelnd entdecken: Der n-Eck-Baukasten	49
9	Polyeder: Figurative Vielfalt	55
10	Sätze über Polyeder: Descartes und Euler	93
11	Besondere Polyeder: Drei Beispiele	101
12	Deltaeder: Alles Dreiecke	105
13	Flexible Polyeder: Biegen ja, atmen nein	109
14	Torkelkörper : Oloid, Sphericon, Pita	113
15	Kaleidozyklen: Umstülpbare Tetraeder-Ringe	119

1 Kognitive Geometrie: Was ist das?

Das verstehen wir am besten durch ein kognitiv-geometrisches **Experiment**:

Lattenverbindungen: Starr oder flexibel?

1. Küren Sie Ihren persönlichen ***Starrheits-Champion***: diejenige Lattenverbindung, bei der Sie am **allersichersten** sind, dass sie **starr** ist.
2. Küren Sie Ihren persönlichen ***Flexibilitäts-Champion***: diejenige Lattenverbindung, bei der Sie am **allersichersten** sind, dass sie **flexibel** ist.



3. Halten Sie ***Introspektion*** *(Innenschau)*: Versuchen Sie zu beschreiben, welche Gedanken Ihnen eben durch den Kopf gegangen sind. Wie sicher sind Sie bei Ihren Entscheidungen? **Wo ist Ihre Sicherheit hergekommen?** War sie sofort da oder haben Sie sie irgendwie »hergestellt«?
4. Bei welcher Lattenverbindung sind Sie **am wenigsten sicher**?

Beobachtungen

Vielleicht geht es Ihnen so wie den meisten Menschen, mit denen ich dieses kognitiv-geometrische Experiment durchgeführt habe:

1. Sie haben einen Starrheits-Champion und einen Flexibilitäts-Champion gekürt und sind Ihrer Sache dabei ziemlich sicher gewesen.
2. Ihr Starrheits-Champion war vielleicht das Dreieck. Das geht den meisten so.
3. Vielleicht haben Sie sich vorgestellt, wie es wäre, wenn Sie die Latten in die Hände nehmen und versuchen würden, sie ein wenig zu bewegen. Und dabei haben Sie gemerkt, dass Sie irgendwie schon wissen, dass das Dreieck starr ist. Auch wenn Sie die Latten gar nicht in die Hand nehmen können, weil sie ja nur auf dem Papier stehen.
4. Wenn Sie zur überwiegenden Mehrheit gehören, dann haben Sie eines *nicht* getan – Sie haben *nicht* gesagt: »Es gibt ja den Kongruenzsatz SSS (Seite-Seite-Seite), und der sagt doch gerade, dass das Dreieck starr sein muss (seine Form nicht verändern kann), wenn die Längen seiner drei Seiten fest liegen (wegen der Nägel können sich die ja nicht ändern).«
5. Und vielleicht haben Sie jetzt ein wenig ein ‚schlechtes Gewissen'? Das haben die meisten Leute in dieser Situation. Aber das ist völlig unnötig. Denn es ist nichts passiert, dessen man sich schämen müsste. Sie haben lediglich zwei wesentliche Tatsachen erlebt:
   - Man macht **vom eigenen Geometrie-Wissen oft keinen Gebrauch**, obwohl man einen Vorteil davon hätte. (Man kommt oft überhaupt nicht auf die Idee, das eigene mathematische Wissen anzuwenden.)
   - Man hat aber andererseits soviel **Geometrie »intuitiv drauf«**, dass man geometrische Probleme oft wie aus dem Gefühl korrekt lösen kann. (Dabei spielt das **vorgestellte Handeln** – also die bloße Vorstellung, etwas in die Hände zu nehmen und damit etwas zu tun – eine mitunter schon etwas unheimlich anmutende Rolle als **mächtige Überzeugungsmethode**.)

Resümee

Es lohnt sich, nicht einfach Geometrie-Stoff zu lernen, sondern aufmerksam darauf zu schauen, was so alles mit uns und in uns passiert, wenn wir ein geometrisches Problem lösen. Anschaulich formuliert: Es lohnt sich, wenn wir uns **beim Geometrie Treiben selbst »über die Schulter gucken«.** Wissenschaftlich ausgedrückt: Wir gewinnen wertvolle Erkenntnisse, wenn wir beim **geometrischen Denken die besondere Art und Weise geometrischer Kognitionsprozesse** untersuchen. Denn guter Geometrieunterricht ist nur möglich, wenn wir diese geometrischen Kognitionsprozesse bei uns selbst und bei unseren Schülerinnen und Schülern zu verstehen lernen.

Diesen geometriedidaktischen Forschungsansatz bezeichnen wir mit dem Begriff **»kognitive Geometrie«**.

2 Illusionen: Die Grenzen unserer Anschauung

Die Geometrie, die wir in der Schule lernen, die Elementargeometrie, ist die zwei- und dreidimensionale *euklidische Geometrie*, also die rund zweieinhalb Jahrtausende alte Geometrie der ‚alten Griechen'. Ihre Objekte sind die Punkte, Geraden, Strecken, Winkel, Abstände, Figuren usw. der Ebene bzw. des Raumes.

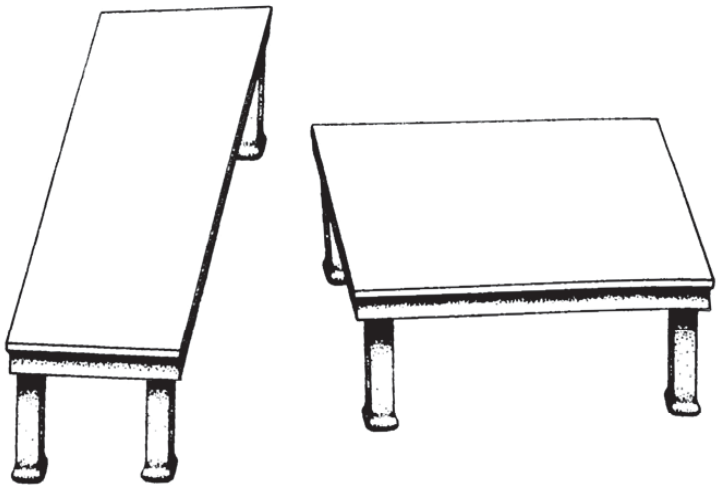
Diese Geometrie ist einerseits eine strenge mathematische Theorie, in der jeder Satz formal aus wenigen Grundsätzen bewiesen werden kann (und muss), die man *Axiome* nennt. Andererseits sind viele dieser Sätze unmittelbar so völlig einleuchtend, dass man gar nicht das Bedürfnis empfindet, sie auch noch zu beweisen. Wie passt das zusammen?

Warum muss man in der Geometrie überhaupt etwas beweisen?

Wenn ich etwas genau sehe, brauche ich doch keinen Beweis mehr. Mehr Sicherheit als meine Augen kann mir kein Beweis liefern. Meinen Sie? Dann lesen Sie mal weiter.

1. Versuch

Betrachten Sie die beiden Tische der Abbildung. Welcher hat die größere Tischfläche? Oder sind beide Flächen etwa gleich? Denken Sie nach und entscheiden Sie sich. Sprechen Sie Ihre Antwort laut aus, bevor Sie weiterlesen.



Shepard-Täuschung (»turning tables«)

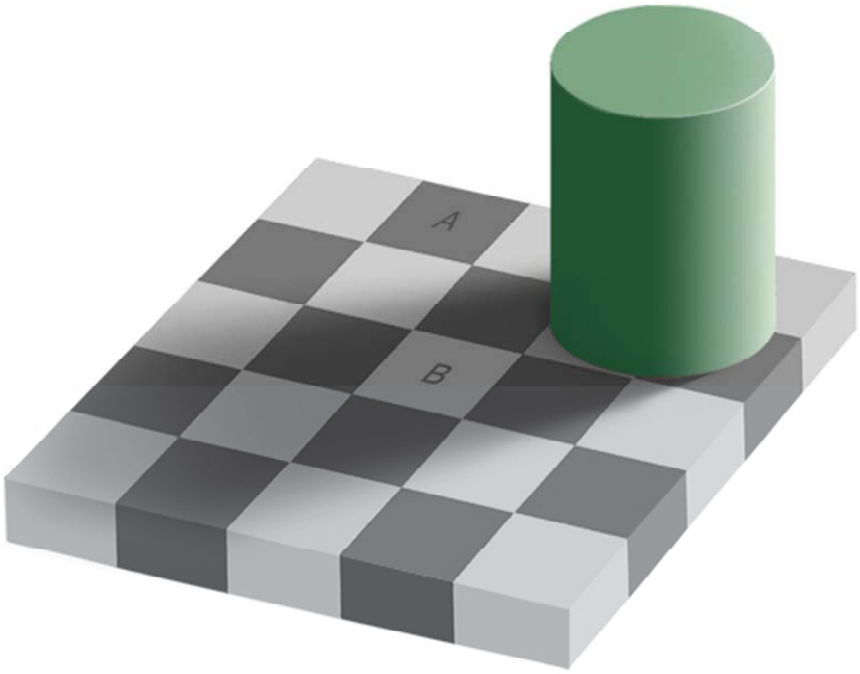
Die Fragestellung sollte Sie ein wenig ablenken. Um die Flächeninhalte geht es überhaupt nicht. Sondern um die Flächen selbst.

Die Tischflächen beider Tische haben nicht nur denselben Inhalt. Beide Tischflächen sind exakt kongruent! Niemand glaubt das zunächst, weil niemand glauben will, dass die eigene Anschauung so falsch liegen kann. Man sieht doch, dass der

linke Tisch lang und schmal ist, der rechte dagegen kürzer und breiter. Stimmt, man ‚sieht' das, aber es ist einfach nicht wahr. Drucken Sie die Seite aus, schneiden Sie eine Tischfläche aus und legen Sie sie auf die andere, dann werden Sie sehen: Es passt genau. Trösten Sie sich, es geht allen so…

2. Versuch

Können Sie hell und dunkel unterscheiden? Sind Sie sicher? Werfen Sie einen Blick auf das Schachbrett unten und sagen Sie, was Sie sehen. Was ist mit den Feldern A und B?



Adelson-Täuschung (»checker shadow illusion«)

Sie sehen sicher wie jeder andere auch ein kleines Schachbrett, auf dem ein grüner Zylinder steht, der einen leichten Schatten wirft. Und das ist natürlich auch zutreffend. Und außerdem sehen Sie noch zwei Felder A und B, ein dunkles und ein helles, wie das beim Schachbrett eben so ist. Nichts Außergewöhnliches.

Aber das stimmt einfach nicht. Die beiden Felder haben in Wahrheit exakt dieselbe Farbe. Glauben Sie nicht? Schneiden Sie eines aus und legen Sie es neben das andere. Sie werden schon sehen …

Wie kann das sein?! Die landläufige Vorstellung, dass Sehen so etwas ist wie ‚Fotografieren der Realität' ist einfach falsch. Sehen ist vielmehr stets *Interpretieren der Realität*. Sehen ist ein weitgehend *automatischer* und *konstruktiver* Prozess der *Sinnkonstruktion* auf dem optischen Input. Der einzige Zweck, für den die Evolution den Prozess des Sehens optimiert hat, besteht darin, die Realität für uns überhaupt verstehbar zu machen. Und das funktioniert wegen der ungeheuren Komplexität der Realität und wegen ihrer optischen Unstrukturiertheit nur

durch *zwei Hauptstrategien*, die jeder Sehprozess immer verfolgt, ohne dass wir davon etwas mitbekommen: durch *Reduktion von Komplexität* und durch *Strukturierung.* Dies sind Sinngebungsversuche, die unser Gehirn mit dem was die Augen an Input liefern, immer anstellt. Und wir verstehen viele Bilder von außen überhaupt nur, wenn unser Gehirn sie für uns durch diesen Sinnkonstruktionen anpasst, d.h. verändert.

Genaugenommen zeigt das Bild überhaupt kein Schachbrett. In Wirklichkeit ist da nichts schwarz/weiß. Sondern eine ungeheuer große Vielfalt von abgestuften Grautönen. Diese Farb-Komplexität wird vom Gehirn zur einfachen und klaren Struktur ‚Schachbrett' reduziert. Die Reduktion von Komplexität wird durch Strukturierung erreicht. Eine geniale Leistung unseres Gehirns, die uns hilft, *schnell ein inneres Bild vom Wesentlichen* aufzubauen. Diese Schnelligkeit und diese Konzentration auf das Wesentliche sind die Voraussetzungen, ohne die wir bei der Wahrnehmung der Welt nicht zurecht kämen. Wir nicht, die Neandertaler nicht, und auch die Tiere nicht. Die Evolution hat uns allen also nicht etwa einen Mangel ins Gehirn programmiert, sondern eine phantastische Fähigkeit, um in der Welt überhaupt leben zu können.

Was heißt das nun für das Beweisen? Da wir unseren Augen, genauer dem was unser Gehirn aus deren Input macht, nicht immer vertrauen können, ist für uns Beweisen die einzige zuverlässige Möglichkeit, um uns von der Wahrheit geometrischer Aussagen zu überzeugen.

Weitere optische Illusionen

- irritieren und faszinieren (‚Verblüffungseffekt', charakteristische Reaktionen: Lachen, Kopfschütteln, Sich-nicht-lösen-können);
- wecken Neugier, aktivieren den Spieltrieb;
- wecken Zweifel an der Zuverlässigkeit der eigenen Sinneswahrnehmung;
- wecken das Bedürfnis nach aktiver Wiederherstellung der Sicherheit und
- motivieren daher zum Nachmessen, Begründen, Beweisen.

Es gibt viele Möglichkeiten, optische Illusionen zu kategorisieren. Wir verwenden hier eine einfache Aufteilung in drei Typen:

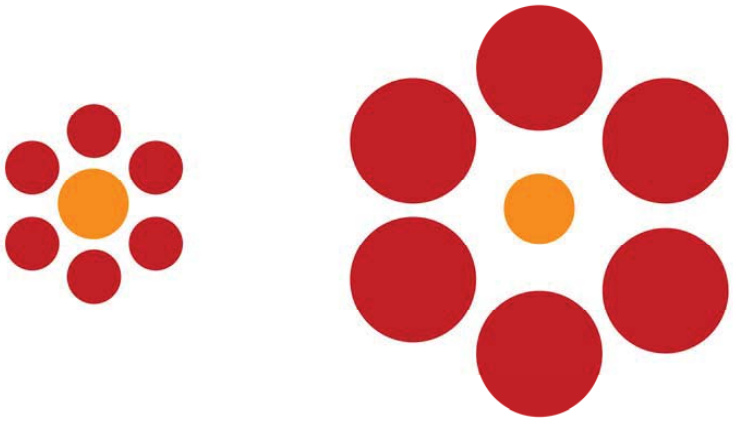
1. optische Täuschungen (im engeren Sinne)
2. unmögliche Figuren
3. Schein-Animationen

1. Optische Täuschungen (im engeren Sinne)

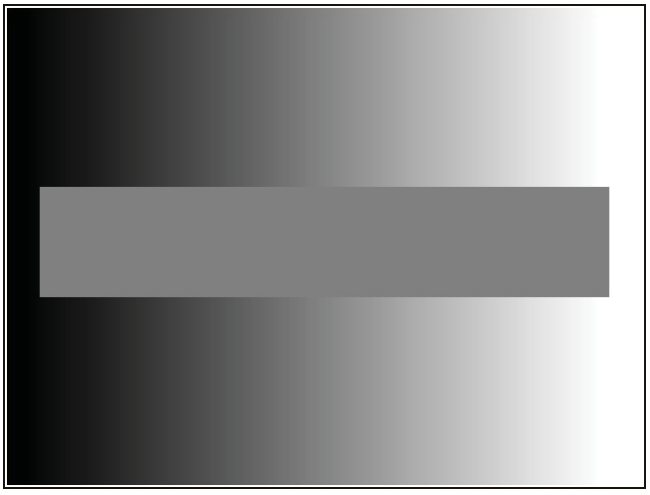
Statt von ‚*Täuschungen*' sollte man eigentlich von ***Illusionen*** sprechen (allerdings hat sich die Bezeichnung ‚Täuschungen' als Sprachgebrauch eingebürgert). Denn die im Wort ‚Täuschung' enthaltene negative Bewertung ist unangemessen. Aus der Sicht der evolutionären Psychologie stellen diese Phänomene nämlich keine Mängel unserer Sinnessysteme dar. Vielmehr beruhen sie auf der (im Laufe der Evolution entwickelte) Fähigkeit der Sinnessysteme, die Realität durch Betonun-

gen und Übertreibungen auf vorteilhafte Weise zu interpretieren. Dies geschieht automatisch und unbewusst und führt damit ohne den zeitraubenden ‚Umweg des bewussten Denkens' unmittelbar zu Erfolg versprechendem Handeln.

Beispiel: In der Umgebung kleinerer Früchte am Baum wird eine größere Frucht als (übertrieben) viel größer wahrgenommen und so schneller als ‚besonders essenswert' erkannt.



Dies sichert Überlebensvorteile im Kampf um Nahrung. Unter großen Früchten wird umgekehrt eine kleinere als übertrieben klein wahrgenommen und dadurch unattraktiv. Allerdings ist dieser ‚evolutionäre Vorteils-Effekt' bei anderen Illusionen nicht immer ohne weiteres erkennbar.

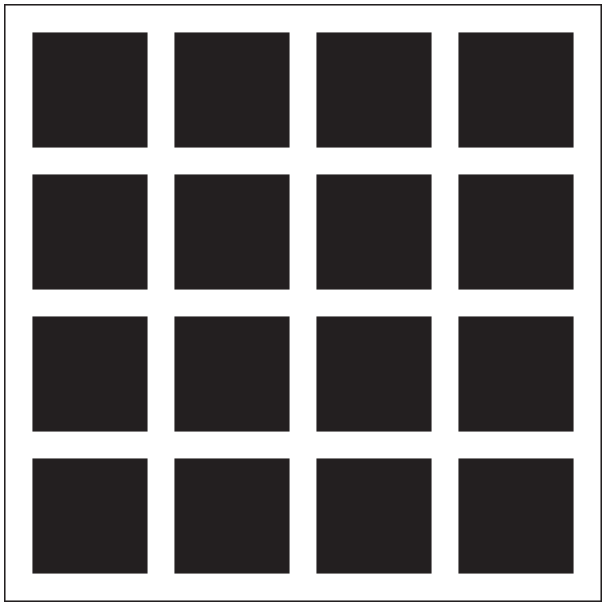


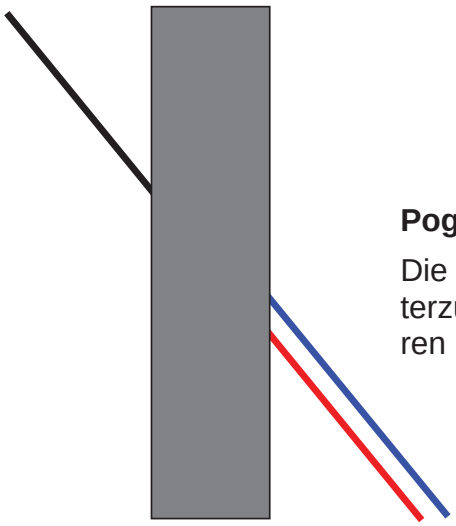
Farbverlaufs-Täuschung

Vor einem von dunkel nach hell verlaufenden Hintergrund erscheint ein Rechteck entgegengesetzten Farbverlauf zu haben, obwohl es in Wahrheit einfarbig ist.

Hermann-Täuschung

Zwischen den schwarzen Quadraten erscheinen die Kreuzungen dunkel, obwohl der gesamte Hintergrund weiß ist.



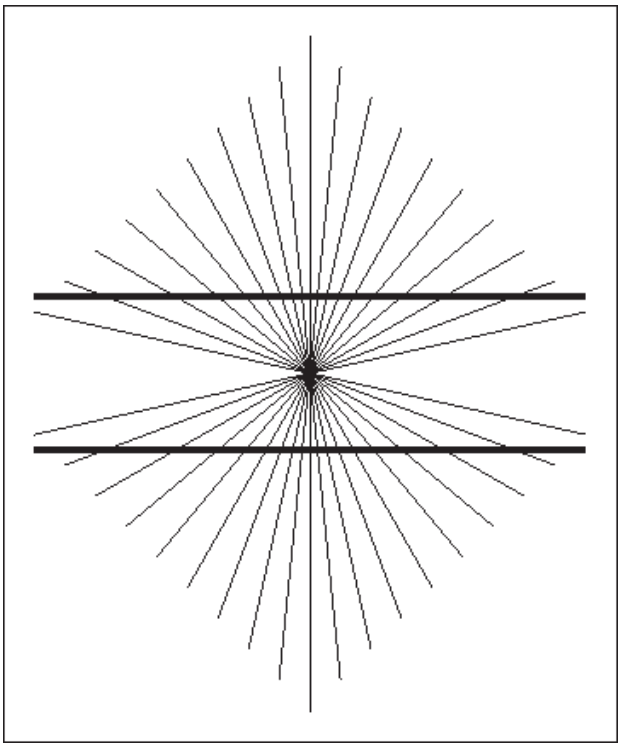


Poggendorff-Täuschung

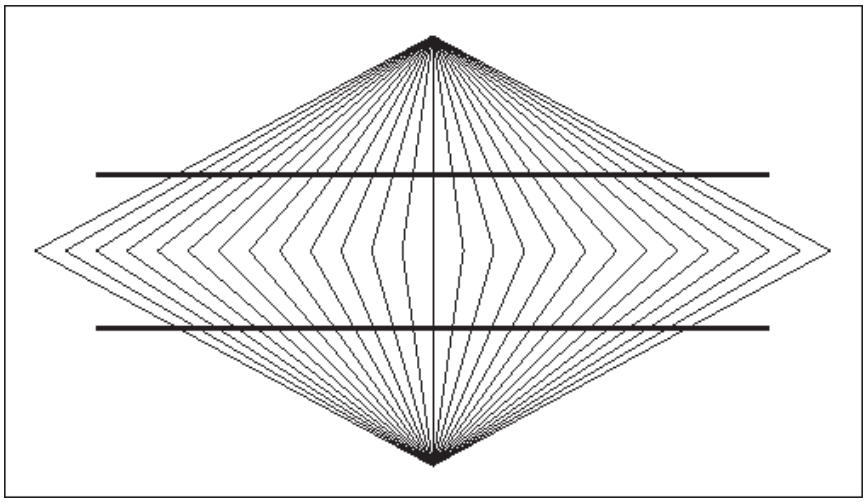
Die linke Linie scheint rechts in der oberen Linie weiterzulaufen. In Wahrheit läuft sie genau in der unteren Linie weiter.

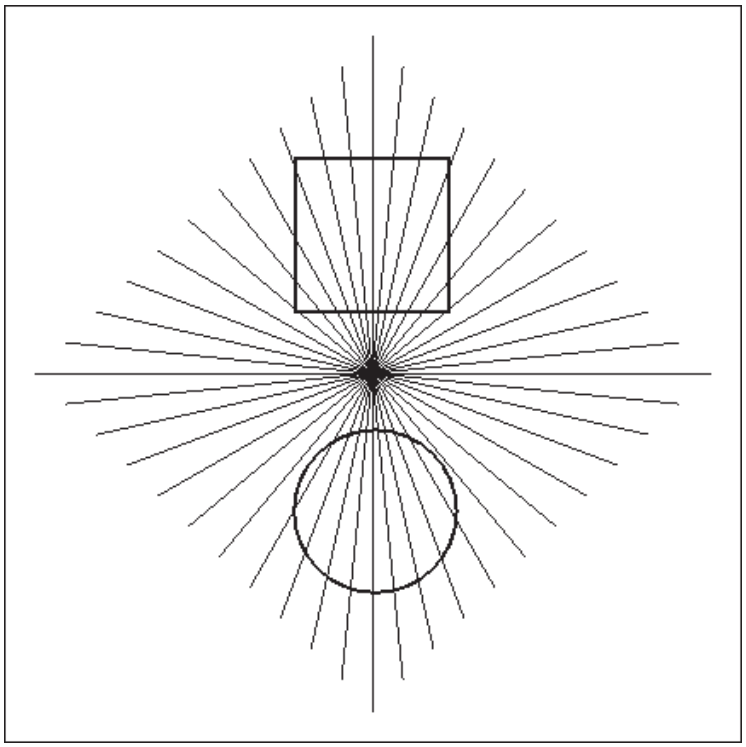
Hering-Täuschung

Vor dem Hintergrund schräger Linien scheinen Geraden gebogen.



Wundt-Täuschung



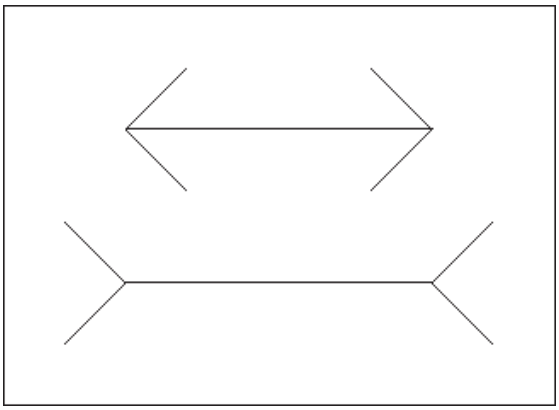


Ehrenstein-Orbison-Täuschung

Vor dem Hintergrund schräger Linien scheinen Quadrat und Kreis verformt.

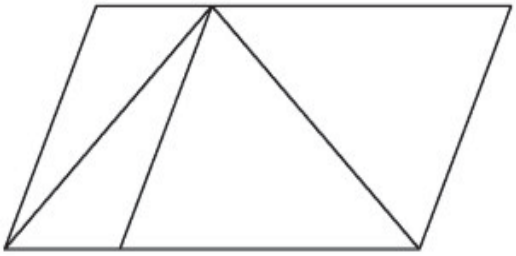
Müller-Lyer-Täuschung

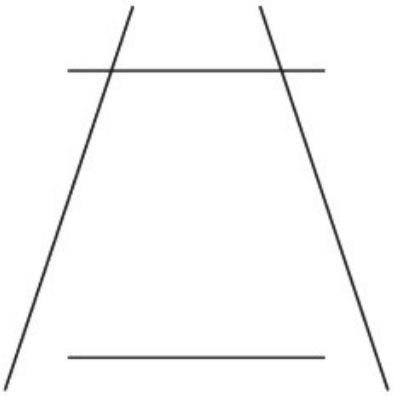
Die beiden horizontalen Strecken erscheinen unterschiedlich lang; in Wahrheit sind sie gleich lang.



Sandersche Täuschung

Die Diagonale im rechten (größeren) Parallelogramm erscheint länger als die im linken (kleineren) Parallelogramm. In Wahrheit sind sie gleich lang.





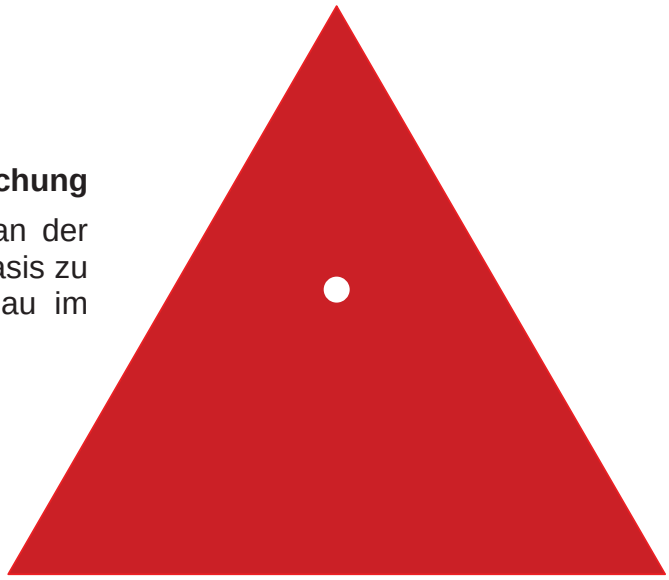
Ponzo-Täuschung

Die obere horizontale Strecke erscheint länger als die untere. In Wahrheit sind sie gleich lang.

(Die beiden seitlichen Linien werden perspektivisch interpretiert, wodurch die obere Strecke als weiter weg erscheint und dadurch, bei gleicher sichtbarer Länge, als in der räumlichen Realität länger.)

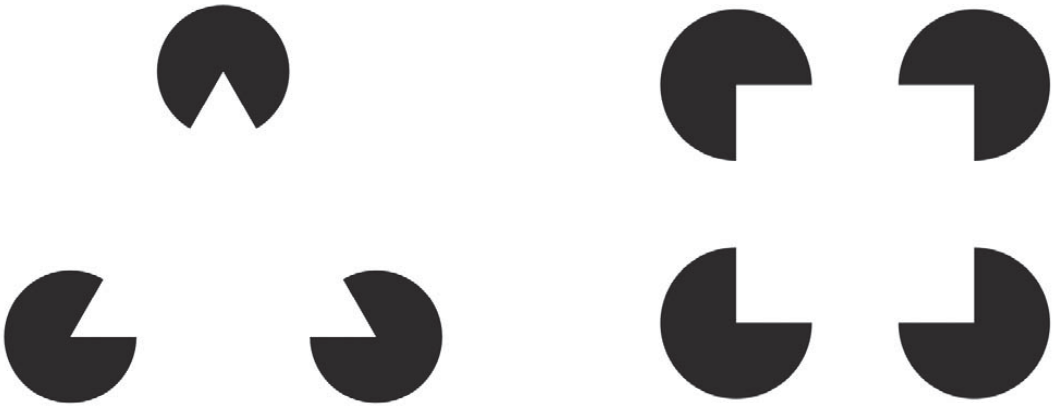
Höhentäuschung

Der weiße Kreis scheint näher an der Spitze des Dreiecks als an der Basis zu liegen. In Wahrheit sitzt er genau im Höhenmittelpunkt.



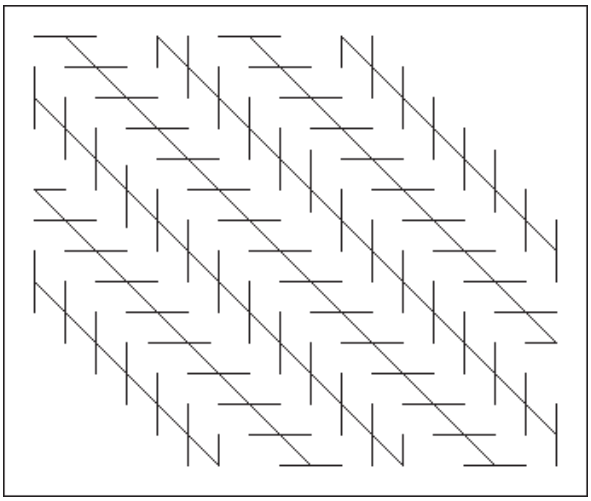
Gestalttäuschungen

Man sieht Figuren (‚Gestalten', hier Dreieck und Quadrat), die nicht abgebildet sind. Die tatsächlich abgebildeten Elemente werden als ‚unvollständig' interpretiert und automatisch zu vollständigen Kreisen ergänzt. Die Vorstellung der Unvollständigkeit erzwingt dann die Illusion einer Figur, die die fehlenden Teile der vollständigen Kreise ‚verdeckt'.

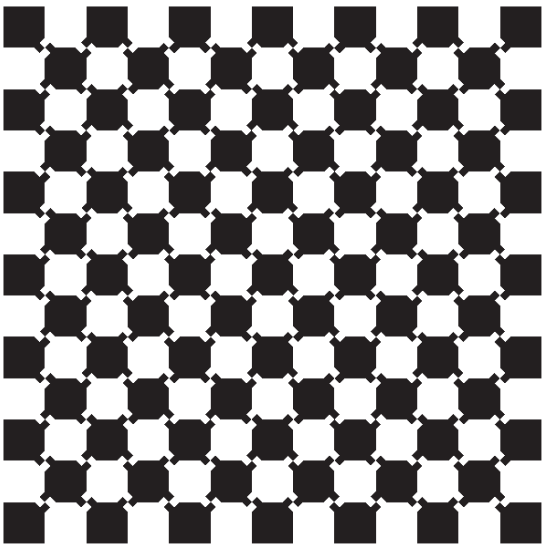


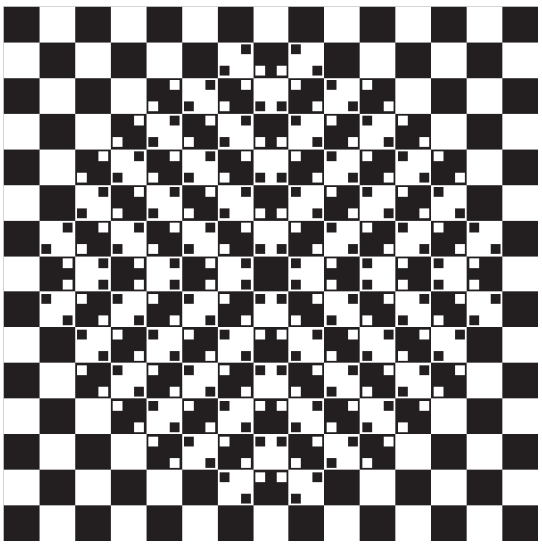
Zöllner-Täuschung

Im Feld der Zick-zack-Strecken scheinen die Geraden zueinander schräg zu verlaufen. In Wahrheit sind sie exakt parallel.



Besonders stark wird diese Illusion bei diesen scheinbar verzerrten Schachbrettmustern. In Wahrheit sind die größeren Quadrate exakt rechtwinklig/parallel angeordnet.



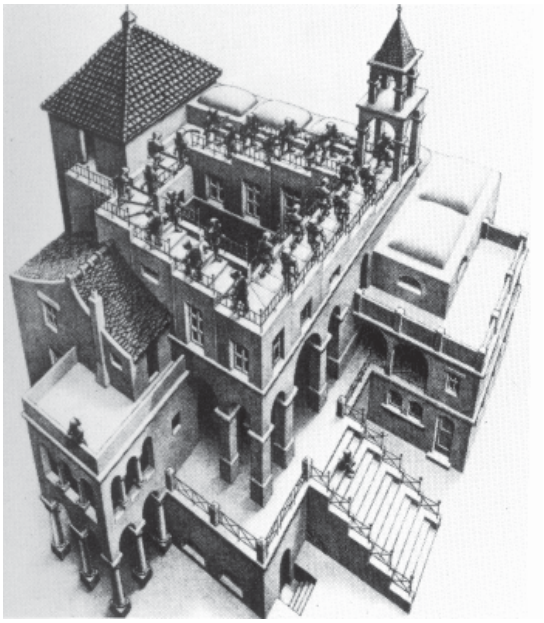


2. Unmögliche Figuren

Um dreidimensionale Objekte in der Ebene so darzustellen, dass sie räumlich wahrgenommen werden, verwendet man bestimmte Darstellungsmethoden (perspektivisches Zeichnen). Diese Methoden können aber auch ‚missbräuchlich' angewandt werden, um eine realistische räumliche Existenz von Gegenständen vorzugaukeln, die es in Wahrheit nicht gibt.

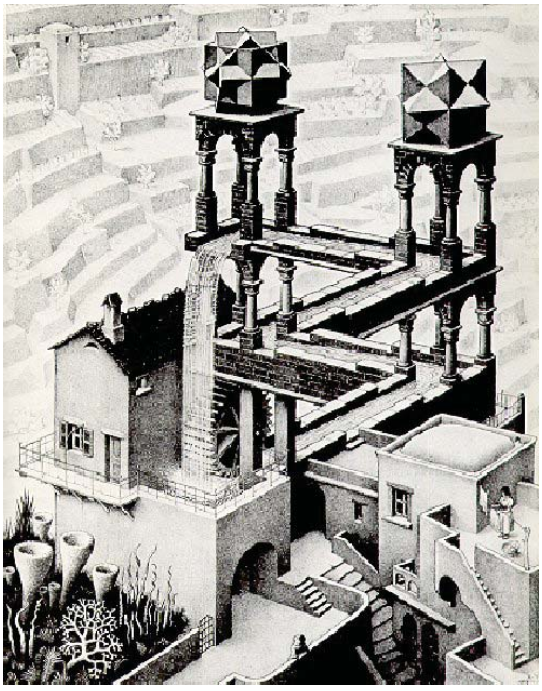
Eine herausragende Stellung nimmt hier der niederländische Graphiker **Maurits Cornelis Escher** (1898-1972) ein. Sein Hauptthema war das grafische Spiel mit der menschlichen Wahrnehmung.

»Indem ich auf sinnliche Weise den Rätseln, die uns umgeben, aufgeschlossen gegenüberstehe und meine Beobachtungen überdenke und analysiere, komme ich mit dem Gebiet der Mathematik in Berührung. Obwohl ich über keinerlei exakt-wissenschaftliche Ausbildung und Kenntnisse verfüge, fühle ich mich oft mehr mit Mathematikern als mit meinen eigenen Berufskollegen verwandt.« (M.C.Escher: Grafiek en Tekeningen, 1960)



Eschers unendliche Treppe

Die Personen (Mönche) scheinen auf einer Treppe mit nur endlich vielen Stufen ohne Ende ab- bzw. aufsteigen zu können. (C.M.Escher, Treppauf und treppab, Lithografie, 35.0X28.5 cm, 1960)

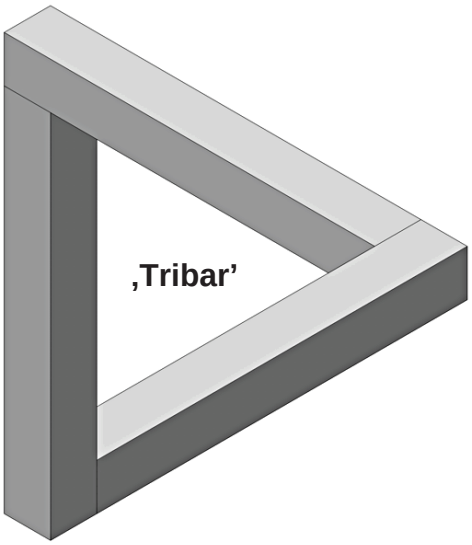


Eschers unmöglicher Wasserfall

Der Wasserfall fließt wieder hinauf und bildet so ein (unmögliches) Perpetuum mobile. (C.M.Escher, Wasserfall, Lithografie, 28.0X28.0 cm, 1961)

Diese Bilder Eschers sind Weiterentwicklungen der Figur ***Tribar*** des Mathematikers **Roger Penrose** (erstmals veröffentlicht 1958 im British Journal of Psychology, Band 49).

Penrose-Figuren

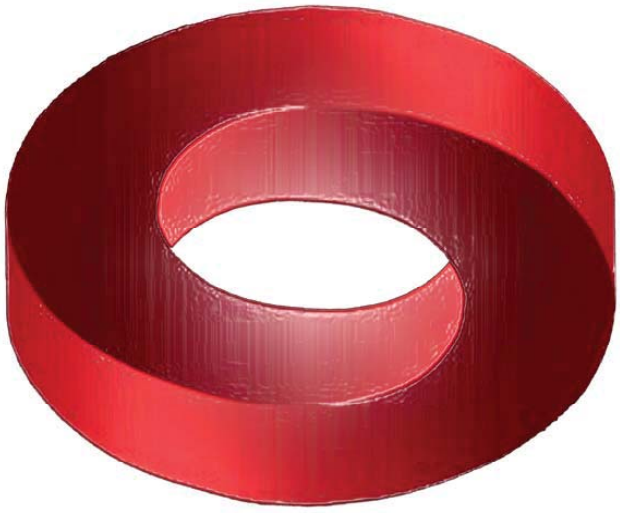


Tribar-Variationen





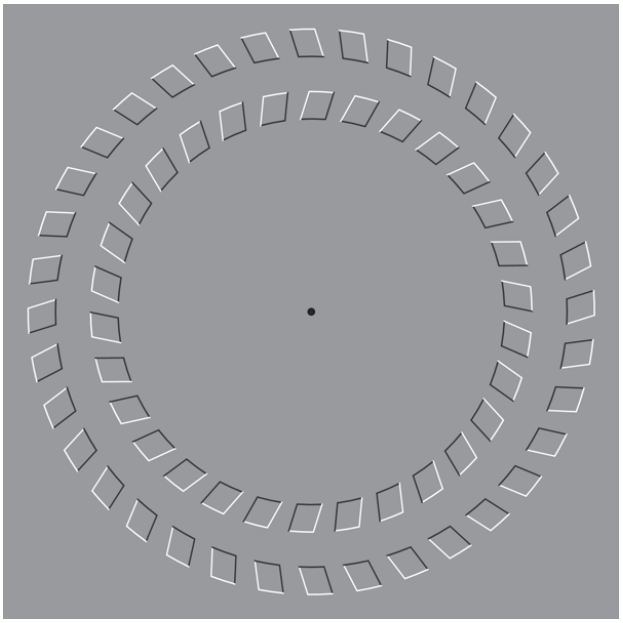
Unmöglicher Torus
(Berger)



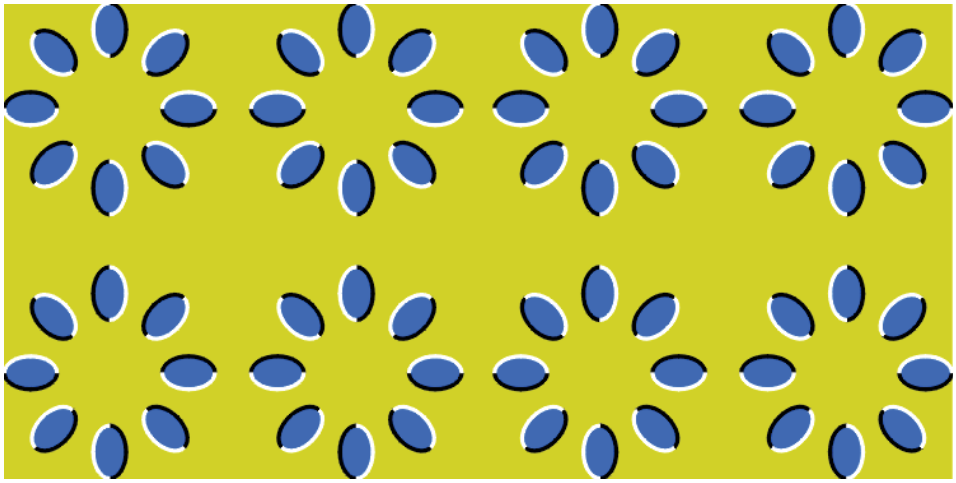
3. Schein-Animationen

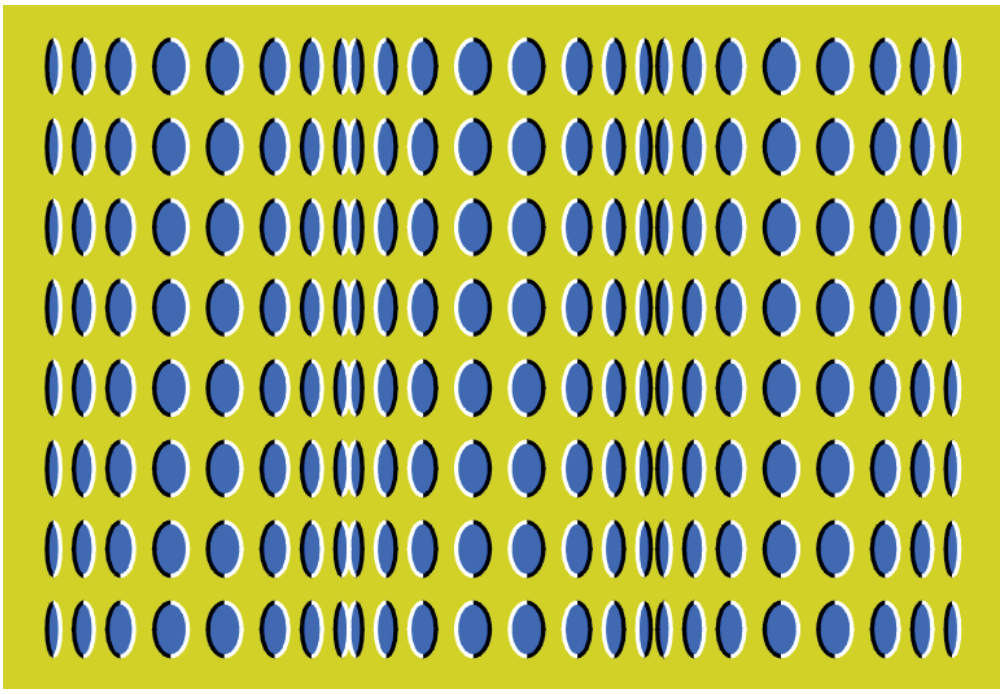
Schein-Animationen nennen wir hier Bilder, die die Illusion von Bewegung erzeugen (obwohl sie statisch, d.h. nicht animiert sind).

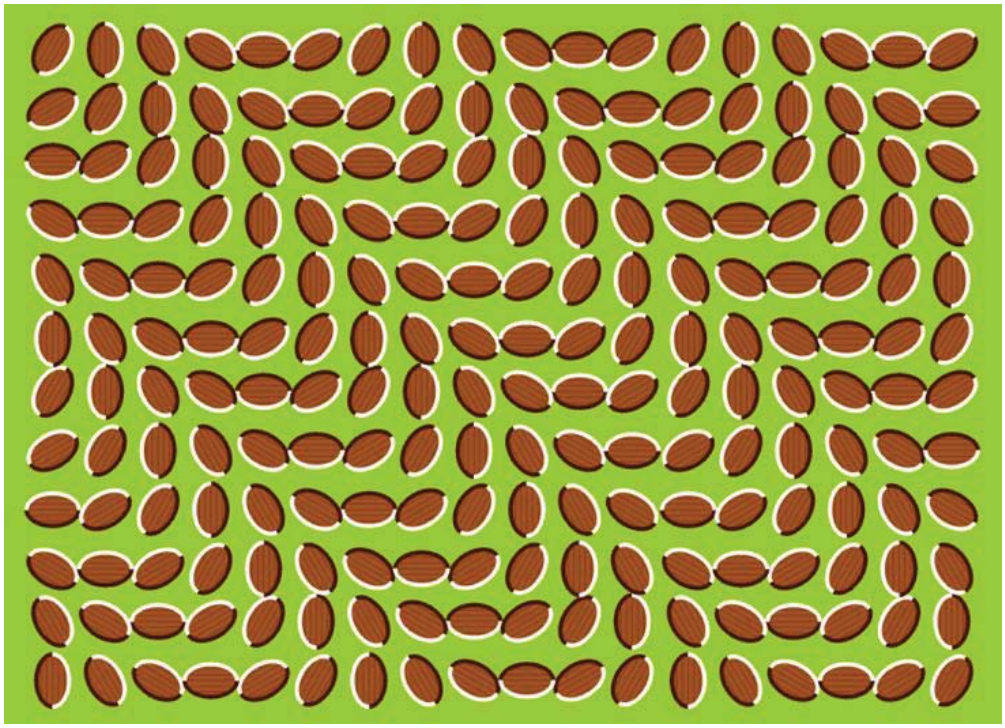
Fixiert man den Punkt im Zentrum und bewegt den Kopf vor und zurück, so entsteht die Illusion einer gegenläufigen Bewegung der beiden Kreise.



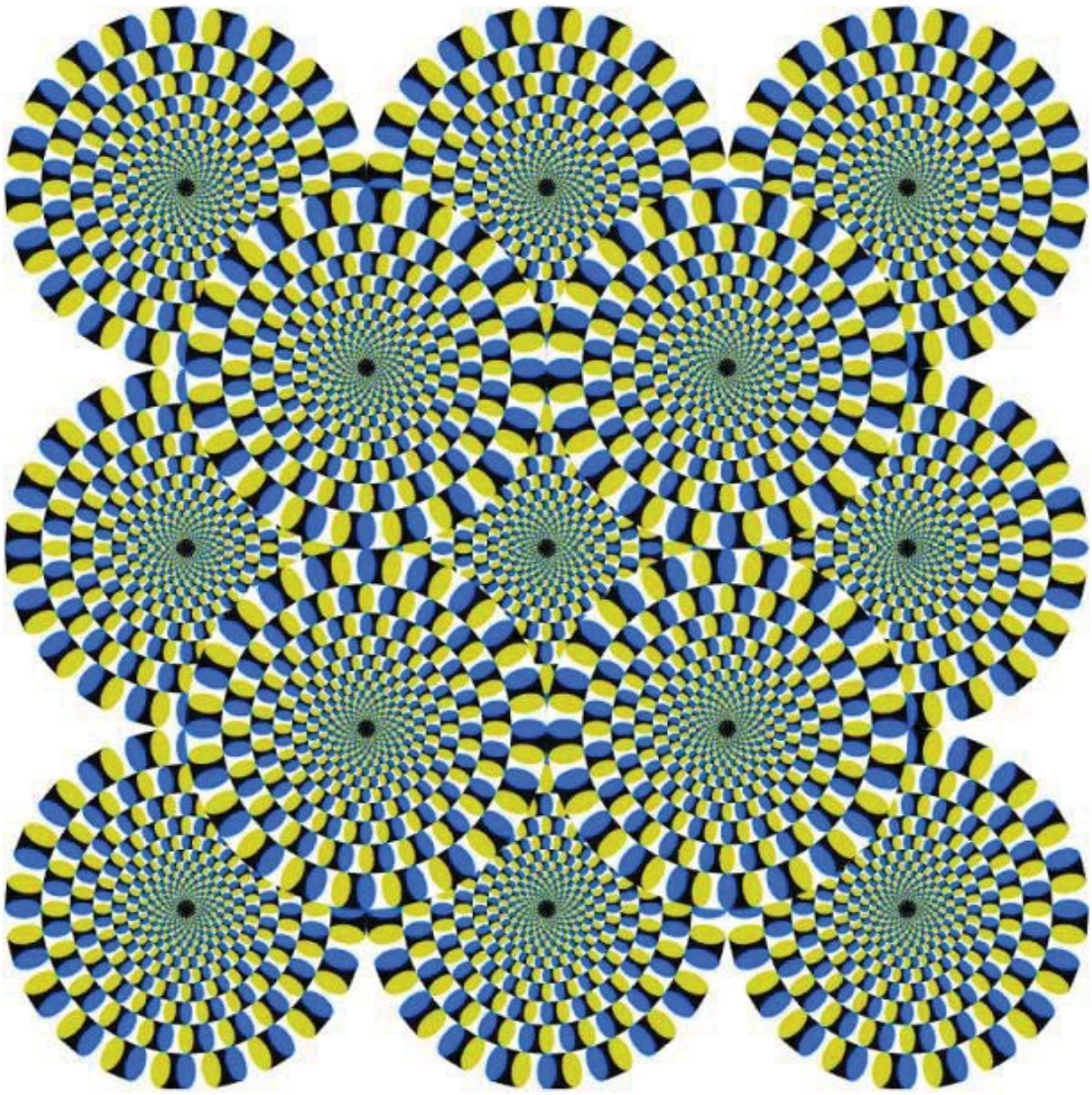
Bei den folgenden Bildern entsteht (bei hohem Kontrast) eine starke Bewegungsillusion auch ohne Kopfbewegung – allerdings nicht ohne Augenbewegung. Typisch ist, dass man die Bewegung stets lokal stoppen kann, indem man die jeweilige Stelle (z.B. einen ganzen Kreis) fokussiert.







Eine besonders starke Illusion erzeugen bei vielen Menschen die ‚***Rotating Snakes'*** des japanischen Psychologen und Grafikers **Akiyoshi Kitaoka.**



2 Axiome: Die Regeln unserer Anschauung

Sind die grundlegenden Begriffe einfach oder schwer?

1. Wie würden Sie beschreiben, was ein Punkt ist?
2. Was ist eine Gerade? Eine Ebene? Der Raum?



Solche Definitionen sind außerordentlich schwer.

Euklid (ca. 300 v.Chr.) definierte so:

1. Was keine Teile hat, ist ein Punkt.
2. Eine Länge ohne Breite ist eine Linie.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine Linie ist gerade, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist.
5. Was nur Länge und Breite hat, ist eine Fläche.

Brauchen wir überhaupt solche Definitionen?

Nehmen Sie dazu Stellung (finden Sie Pro- und Contra-Argumente)

Ein Abstecher in die Löffelkunde

Wie würden Sie einem Außerirdischen (der Ihre Sprache spricht) klarmachen, was ein Löffel ist?

1. Möglichkeit: Mit Worten erklären …
2. Möglichkeit: Ein Foto eines Löffels zeigen …
3. Möglichkeit: Einen Löffel zeigen …
4. Möglichkeit: Vormachen, was man mit einem Löffel macht …
5. Möglichkeit: Selbermachen (lassen) …

Bewertung dieser Möglichkeiten nach dem EIS-Prinzip

Mit Worten erklären …	symbolische Repräsentation
Ein Foto zeigen …	ikonische Repräsentation
Einen Löffel zeigen …	ikonische Repräs. mit schwachem enaktivem Appell
Vormachen …	ikonische Repräs. mit starkem enaktivem Appell
Selbermachen …	enaktive Repräsentation

Ich verstehe, was ein Löffel ist, wenn ich verstehe, wie ich ihn gebrauchen kann und wozu der Gebrauch gut ist. Ich muss wissen, wie er »funktioniert«.

Diese Funktion eines Werkzeugs hat aber immer etwas mit anderen Objekten zu tun (Suppe, Teller, Mund …).

Daher kann ich gar nicht sinnvoll beschreiben, was ein Löffel ist, ohne seine Beziehung zu den anderen Objekten zu beschreiben, die mit ihm zu tun haben (Suppe, Teller, Mund …).

Hilberts Idee (David Hilbert, 1862–1943)



Was Punkte, Geraden, Ebenen sind, verstehe ich, wenn ich verstehe, wie ich diese Begriffe gebrauchen kann und wozu der Gebrauch gut ist.

Wir definieren überhaupt nicht, was ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene, der Raum ist. **(Keine absoluten Definitionen)**

Sondern wir beschreiben nur genau, wie diese Begriffe funktionieren. Und das machen wir dadurch, dass wir beschreiben, wie sie sich zueinander verhalten. **(Statt dessen relative Beschreibungen)**

Wo kommen diese Beschreibungen her?

Aus unserem Kopf. Das Gehirn hat im Laufe der Evolution Fähigkeiten entwickelt, die wir brauchen können, um in der Welt zurecht zu kommen.

Beispiel: Orientierung im Raum. Wir können Richtungen erkennen, Entfernungen vergleichen, Wege finden, Wege vergleichen …

Kurz: Wir verfügen über eine räumliche Anschauung. Der Raum ist irgendwie in unserem Gehirn repräsentiert.

Wenn wir uns im Alltag im Raum bewegen,
betreibt unser Gehirn dann Geometrie?

Nein, wir nutzen dabei zwar ständig unsere Raumvorstellung, aber das geschieht weitgehend unbewusst.

Wenn wir Geometrie betreiben, tun wir etwas ganz Nicht-Alltägliches: Dann nutzen wir die Raumvorstellung bewusst. Sie ist dann nicht »Mittel zum Zweck«. Sondern der Zweck (Ziel, Thema, Gegenstand) selbst.

Wir betreiben Geometrie, um diese unsere Raumvorstellung möglichst vollständig kennen zu lernen und alles, was mit ihr zusammenhängt (mit ihr denkbar ist).

Spontane intuitive geometrische Evidenz

Vergleichen Sie die folgenden Aussagen: Bei welcher sind Sie unmittelbar sicher, dass sie zutrifft, wo sind Sie unsicher?

1. Jede Gerade enthält mehr als einen Punkt.
2. Durch zwei (verschiedene) Punkte geht genau eine Gerade.
3. Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, geht stets genau eine Ebene.
4. Liegen zwei Punkte in einer Ebene, dann liegt auch die Gerade durch die beiden Punkte in dieser Ebene.
5. Zwei Geraden, die einen Punkt gemeinsam haben, liegen immer in einer Ebene.

Den meisten wird es so gehen, dass sie den Aussagen 1 bis 4 zustimmen, und sich dabei völlig sicher sind, *ohne überhaupt nachdenken zu müssen*. Wir *sehen* sofort, dass sie stimmen. Mit anderen Worten: Die Aussagen 1 bis 4 entsprechen genau unserer Anschauung. Diese Anschauung steht uns sofort, ohne Nachdenken zur Verfügung.

Dieses Sehen ist etwas anderes als das Sehen mit den Augen: Es ist gewissermaßen ein direktes *‚Sehen mit dem* Gehirn', unsere Augen gebrauchen wir dabei nicht. Darum besteht auch nicht die Gefahr, dass wir bei diesem Sehen einer optischen Täuschung unterliegen. Die Strategien *Reduktion von Komplexität* und *Strukturierung* wendet das Gehirn ja nur auf den Input durch die Augen, also auf Bilder an, die von außen kommen, nicht auf die inneren Bilder, die unmittelbar aus dem Gehirn kommen.

Fassen wir zusammen: Die Aussagen 1 bis 4 sind für uns sofort *(spontan)* und ohne Nachdenken *(intuitiv)* einleuchtend *(evident)*.

Aussage 5 dagegen fällt den meisten von uns schwerer, manchen *etwas* schwerer, anderen *erheblich* schwerer. Jedenfalls können wir dieser Aussage nicht ebenso spontan zustimmen wie den vier übrigen. Wir sind eine Zeit lang unsicher, ob sie unserer Anschauung entspricht oder ob sie ihr widerspricht. Um ganz sicher zu sein, müssen wir bei Aussage 5 erst nachdenken, um Sicherheit zu gewinnen. Ganz ohne Denken wie bei den ersten vier Aussagen geht es einfach nicht.

Wenn wir uns nichts vormachen, müssen wir zugeben, dass dieses Nachdenken gar nicht so einfach ist. Bloßes ‚Herumgrübeln' bringt überhaupt nichts, das bringt uns nur vielleicht irgendwann zu dem Punkt, an dem wir einfach keine Lust mehr haben und uns resigniert sagen: „Es wird schon stimmen." Dies ist die Situation, in viele Menschen immer wieder geraten, wenn sie Mathe machen und eigentlich liebend gerne Durchblick hätten. Wer aber solche Resignationserlebnisse immer wieder hat, wird unweigerlich mit immer größerer Frustration reagieren. Und was uns frustriert, davon lassen wir in Zukunft lieber die Finger weg, das ist eine nicht nur nachvollziehbare, sondern eigentlich sogar vernünftige Haltung. Wenn wir

Menschen diese Frustration durch Mathematik (oder ein anderes Fach) ersparen wollen, müssen wir sie darin trainieren, Denkprozesse *erfolgreich* zu gestalten. Erfolgreich ist ein Denkprozess nur dann, wenn er wirklich *Durchblick* erzeugt. Und Durchblick bedeutet immer zweierlei: *Sicherheit* und *Klarheit* haben.

Zurück zu unseren Beispielen. Einen erfolgreichen Denkprozess, der uns auch bei Aussage 5 Sicherheit und Klarheit liefert, können wir aus einigen einfachen und klaren Denkschritten aufbauen:

1. Wir stellen uns zwei beliebige Geraden g_1 und g_2 mit einem gemeinsamen Punkt *P* vor. Auf jeder der Geraden muss es wegen Aussage 1 außer *P* noch weitere Punkte geben.
2. Wir wählen auf g_1 den weiteren Punkt *A*, auf g_2 den weiteren Punkt *B*; g_1 ist also die Gerade durch *P* und *A*, g_2 ist die durch *P* und *B*, beide Geraden sind eindeutig bestimmt, denn nach Aussage 2 geht durch zwei Punkte immer genau eine Gerade.
3. Nach Aussage 3 können wir sicher sein, dass die drei Punkte *A, B, P* alle in einer (eindeutig bestimmten) Ebene liegen.
4. Wenn aber *A, B, P* in einer Ebene liegen, dann müssen nach Aussage 4 auch die Gerade durch *A* und *P* sowie die Gerade durch *B* und *P* , also g_1 und g_2 in dieser Ebene liegen. Das ist es, was die Aussage 5 behauptet. Sie ist also zutreffend.

Die vier Schritte dieses Denkprozesses bilden also einen Argumentationsweg, der uns von der Richtigkeit von Aussage 5 überzeugt. Einen solchen Argumentationsweg nennen wir *Beweis* von Aussage 5.

Beweisen heißt:
Logische Wege vom unmittelbar Einsichtigen zum Unsicheren bauen

Beim Bau unseres Argumentationswegs haben wir zweierlei benutzt: Unsere *intuitive Anschauung* lieferte uns (in Form von Teilaussagen) die *Tatsachen*, unsere *intuitive Logik* lieferte uns (in Form von Folgerungen) die *Regeln*, mit denen wir aus den Tatsachen den Weg der Argumentation gebaut haben. Geometrische Beweise sind also mit logischen Werkzeugen gebaute Wege von unmittelbar einsichtigen Tatsachen zu einer noch unsicheren Aussage. Der fertige Weg macht uns überzeugend klar, dass unsere Anschauung uns geradezu *zwingt*, zu akzeptieren, dass auch die noch unsichere Aussage zutrifft, obwohl wir dies keineswegs sofort sehen konnten. Nachdem diese Überzeugungsarbeit einmal geleistet ist, können wir die gerade bewiesene Aussage 5 nun als ebenso gesicherte Tatsache wie die Aussagen 1 bis 4 in weiteren Beweisen verwenden. Mit Hilfe der Logik haben wir also den Vorrat der spontan intuitiv evidenten Tatsachen erweitert um eine neue Tatsache, die zwar nicht spontan intuitiv evident war, nun aber ebenfalls evident geworden ist.

Der Vorrat der für uns wirklich evidenten geometrischen Tatsachen besteht also aus zwei Aussagen-Typen:

- Zum ersten Typ gehören diejenigen Aussagen, die wir ohne Nachdenken sofort als richtig erkennen. Diese *Aussagen mit spontaner intuitiver Evidenz* nennen wir geometrische *Axiome*. Sie können wir in Beweisen verwenden, ohne sie selbst noch zu beweisen. (Axiome sind z.B. die Aussagen 1 bis 4.)
- Zum zweiten Typ gehören diejenigen Aussagen, die wir bereits bewiesen haben. Solche *bewiesenen Aussagen* nennen wir geometrische *Sätze*. (Ein Satz ist z.B. Aussage 5.)

Aussagen beider Typen, Axiome ebenso wie Sätze, können wir gleichberechtigt in weiteren Beweisen als Tatsachen verwenden, weil beide evident sind. Axiome sind unmittelbar evident, Sätze werden erst durch einen Beweisprozess evident.

Sowohl die Anschauung als auch die Logik, mit denen wir die Beweise der Geometrie bauen, haben wir – zumindest in ihren grundlegenden Bausteinen, die uns spontan intuitiv evident sind – bereits fertig in uns. Sie sind durch den langwierigen biologischen Entwicklungsprozess der *Evolution* in das menschliche Gehirn ‚hineinprogrammiert' worden.

Diese Überlegungen können uns übrigens auch helfen, zum Beweisen (nicht nur in der Geometrie) eine klügere und freiere, durch Verstehen und Selbstbewusstsein geprägte Einstellung zu gewinnen: Beweisen ist nicht etwa eine irgendwie von uns geforderte ‚mathematische Kulthandlung', die vielleicht für andere wichtig ist, nicht aber für uns selbst. Sondern *Beweisen ist eine außerordentlich produktive Methode, mit der wir unsere intuitive Anschauung erweitern können*. Das heißt aber auch: Solange jemand Beweisen nicht von sich aus als sinnvoll und gewinnbringend empfindet, sollte sie oder ihn niemand zum Beweisen zwingen wollen. Das würde auch überhaupt nichts bringen, weil das *individuelle Bedürfnis nach Evidenz* niemals durch Zwang geweckt werden kann – wie man ja auch niemanden dazu zwingen kann, Hunger zu haben oder etwas schön zu finden.

Beweise zeigen stets, *dass* etwas wahr ist und im Idealfall auch, *warum* es wahr ist

Beweise müssen immer zeigen, *dass* eine Aussage wahr ist. Das ist eine Binsenweisheit. Damit sie für uns aber ganz befriedigend sind, sollten Beweise im Idealfall noch mehr zeigen: Nämlich, *warum* eine Aussage wahr ist, also ‚woher ihre Wahrheit kommt'. Das ist eine einfache Folge unseres *Bedürfnisses nach Durchblick*. Zum Durchblick gehört ja beides: nicht nur *Sicherheit*, sondern auch *Klarheit*.

Darin liegt ein Problem der *indirekten Beweise*, die nicht nur bei Schülern oft unbeliebt sind, und das zu recht: Solche Beweise zeigen eben nicht direkt, dass eine Behauptung wahr ist; sondern sie tun dies nur indirekt, indem sie zeigen, *dass die Behauptung nicht falsch sein kann*. Denn indirekte Beweise beginnen immer mit dem Satz ‚Angenommen, die Behauptung wäre falsch' und zeigen, dass diese

Annahme zu einem Widerspruch führt (weswegen indirekte Beweise oft auch *Widerspruchsbeweise* genannt werden).

Das Warum der Wahrheit einer Behauptung können indirekte Beweise daher leider nicht zeigen. Sie vermitteln zwar Sicherheit, aber keine Klarheit. Für Fans des völligen Durchblicks, die auch das Warum gerne verstehen wollen, sind indirekte Beweise daher immer Beweise von etwas geringerer Qualität. Aber oft sind es leider die einzig möglichen Beweise oder doch die einzig möglichen *einfachen* Beweise. Denn häufig kann man einen indirekten Beweis durch einen direkten ersetzen, der aber leider weitaus mehr Mühe als der indirekte macht.

Axiome:
Die von der Evolution programmierten Bausteine unserer Anschauung

Stellen Sie sich vor, Sie wollten Ihre ganz individuelle Geometrie zusammenstellen, also die, die genau zu Ihrer eigenen individuellen Anschauung (genauer: Ihrer individuellen Raumvorstellung) passt. Was müssten Sie nach den bisherigen Überlegungen dazu tun? Nun, Sie müssten nur eine einfache Regel anwenden: *Nur diejenigen Aussagen, die mir selbst spontan intuitiv evident sind, wähle ich als Axiome für die Konstruktion meiner Privatgeometrie.*

Was würde wohl passieren, wenn wir dies von möglichst vielen Personen durchführen ließen? Welche Privataxiome würden wohl gewählt werden? Meine Prognose ist: Die Menschen nicht nur unserer Gesellschaft/Kultur werden weitgehend dieselben Axiome für ihre Privatgeometrie wählen. Oder wenn vielleicht nicht dieselben, dann doch Axiome, die alle in einem *allgemeinen Grundvorrat* an Axiomen enthalten sind oder aus diesem bewiesen werden können. Meine Vermutung bedeutet also: Es gibt eine (fast) allen Individuen *gemeinsame Raumvorstellung*, d.h. *die spontan intuitiv evidenten Grundaussagen aller Individuen bilden das Axiomensystem einer allgemeinen Geometrie*. Und dieses Experiment würde nicht wesentlich anders ausfallen, wenn wir in unser Experiment auch die Mathematiker der griechischen Antike einbeziehen könnten. D.h. *diese allgemeine Geometrie ist nichts anderes als die euklidische Geometrie.* Die Rechtfertigung für diese Vermutung liefert wieder die *Evolution*, die die Gehirne (fast) aller Menschen mit im wesentlichen derselben Raumvorstellung ausgestattet hat (und seit der griechischen Antike keinen Anlass und auch keine Gelegenheit hatte, an dieser Grundprogrammierung viel zu ändern).

Die Axiome der Geometrie sind also keine von Mathematikern erfundenen Regeln, keine irgendwie ‚erlassenen Gesetze'. Sondern *Axiome sind die unmittelbar einsichtigen, intuitiv sicheren Bausteine meiner eigenen Anschauung/Raumvorstellung, die zugleich die der (meisten) anderen Menschen ist*.

Euklidische und nichteuklidische Geometrie

Die Geometrie der ‚alten Griechen', die *euklidische Geometrie*, kann demnach aus biologischer Perspektive als eine Konsequenz des allgemeinen evolutionären

Prozesses der menschlichen Gehirnentwicklung verstanden werden. Aber natürlich haben auch die griechischen Mathematiker der Antike ihrerseits zahlreiche mathematische Ideen aus anderen, älteren Kulturen übernommen, vor allem aus der arabischen, indischen und chinesischen Kultur – aus geografischen und kulturellen Räumen also, mit denen aufgrund langer Handelsbeziehungen ein reger Austausch auch an Ideen stattfand.

Die euklidische Geometrie ist also einerseits aus biologischer Sicht so etwas wie die *evolutionäre Geometrie*, andererseits aus historischer Sicht die Verschmelzung bzw. Zusammenfassung der *Geometrie der antiken Welt*. Für uns heute ist die euklidische Geometrie schlicht *die* Geometrie überhaupt, die schon in unseren Schulen gelernt wird, eben die *Elementargeometrie*.

Das weckt bei kritischen Geistern (wie bei uns!) eine ketzerische Frage: *Ist die euklidische Geometrie wirklich die einzig denkbare Geometrie?* Oder könnte es vielleicht auch so etwas wie eine nichteuklidische Geometrie geben? – Die Antwort ist für uns Heutige gar nicht so schwer, wenn auch die Geschichte der Mathematik zeigt, dass die Antwort selbst für die größten Mathematiker der Vergangenheit lange völlig unvorstellbar war: Ja, es gibt nichteuklidische Geometrie, sogar viele unterschiedliche solcher Geometrien, und sie sind keineswegs abwegig, sondern durchaus sehr real. Im Universum gilt nämlich keineswegs die euklidische, sondern eine nichteuklidische Geometrie. Die euklidische Geometrie ist zwar eine gute Annäherung daran, die aber nur in der ‚Enge des unmittelbaren Lebensbereichs der Menschen' gut funktioniert, weshalb die Evolution auch keine Chance hatte, eine andere Geometrie als die euklidische in unsere Gehirne zu programmieren.

Wir haben eingangs gesehen, dass es optische Täuschungen gibt, die uns mit einer geradezu bestürzenden Zwangsläufigkeit jedes Mal in die Irre führen, immer wieder, sobald wir uns erneut damit beschäftigen. Wir haben keine Chance, diesen Täuschungen durch Lernen und Erfahrungen zu entgehen. Du es gibt auch ebenso verblüffende *logische Täuschungen*. Zwar funktionieren optische Täuschungen nur, wenn das Gehirn *Bilder von außen* interpretiert. Aber könnte es nicht vielleicht auch bei den inneren, vom Gehirn selbst produzierten Bildern ähnliche Täuschungen geben? Jedenfalls sollte die Erfahrung solcher Täuschungen uns warnen, unserer Raumanschauung (und unserer ‚logischen Anschauung') allzu unkritisch zu folgen. Es ist daher eine sehr vernünftige Idee, bei der Auswahl der geometrischen Axiome besonders vorsichtig und (selbst-)kritisch vorzugehen.

Weil sie dieser skeptischen Vorsicht gefolgt sind, haben sich Mathematiker insbesondere des 19. Jahrhunderts bei einigen Axiomen gefragt, ob sie wirklich *intuitiv sicher* sind. Ob es nicht vielleicht möglich wäre, das eigene Denken so zu trainieren, dass auch das Gegenteil dieser Axiome vorstellbar wird. Andere haben versucht, Axiome, die ihnen nicht so überzeugend wie die anderen erschienen sind, durch logisches Schließen aus den überzeugenderen Axiomen herzuleiten oder sie vielleicht im Gegenteil sogar zu widerlegen.

Ein in diesem kritischen Sinn besonders interessantes Axiom, das über Jahrhunderte immer wieder kritisch unter die Lupe genommen worden ist, ist das *Paralle-*

lenaxiom: Zu einer Geraden und einem nicht auf ihr liegenden Punkt gibt es immer eine und nur eine Parallele durch diesen Punkt.

Zwei Mathematiker, der Deutsche *Carl Friedrich Gauß (1777-1855)* und der Ungar *János Bolyai (1802-1860)*, haben unabhängig voneinander dabei schließlich wirklich eine Entdeckung gemacht, die zunächst von allen für ziemlich verrückt gehalten worden ist: Dass nämlich wirklich kein Widerspruch entsteht, wenn man das Parallelenaxiom durch seine Negation ersetzt. Es gibt tatsächlich eine *nichteuklidische Geometrie*, die genau so gut funktioniert wie die euklidische, bei der es aber *mehr* als eine solche Parallele gibt. Und es gibt auch eine andere nichteuklidische Geometrie, bei der es *gar keine* Parallele gibt.

Nach der bahnbrechenden Relativitätstheorie von *Albert Einstein (1879-1955)* hat man zunächst herumgerätselt, wie ihre theoretischen Resultate, ihre Hauptformeln, in der ‚Wirklichkeit des Kosmos' zu interpretieren sind. Bis der deutsche Mathematiker und Physiker *Hermann Minkowski (1864-1909)* erkannte, dass sich die Relativitätstheorie am besten verstehen lässt, wenn man annimmt, dass im Kosmos eine nichteuklidische Geometrie gilt. Nur so konnte man erklären, warum sich das Licht, das sich doch stets auf kürzesten Bahnen (in der euklidischen Geometrie also auf Geraden) ausbreiten sollte, in der Nähe von großen Massen (wie Sterne und Sternhaufen) auf gekrümmten Bahnen bewegte. Wenn große Massen den Raum selbst krümmen, dann waren die Bahnen des Lichts gar nicht selbst gekrümmt, sondern gewissermaßen die Geraden in einem nichteuklidischen, weil gekrümmten Raum.

Nichteuklidische Geometrien sind also nicht nur ‚nicht verrückt', sie können im Universum sogar schlicht die Wirklichkeit sein! Unsere Raumvorstellung stimmt mit der realen Welt zwar nicht mehr überein, wenn wir kosmische Entfernungen betrachten. Doch für unseren Lebensbereich ist die euklidische Geometrie allemal exakt genug.

4 Geometrie lernen: Wie und wozu?

Wie in der Vorlesung?

In einer Staatsexamensklausur lautete eine Aufgabe: »Entwerfen Sie eine Unterrichtsstunde zur Einführung der Drehsymmetrie.« Eine Studentin schrieb in ihrem Stundenentwurf: »1. Phase (5 Minuten): Definition des Begriffs Drehsymmetrie«.

Nehmen Sie dazu Stellung.

Die »Welt der Geometrie« besteht aus …

1. geometrischen **Objekten**
   - ebene Objekte (Dreieck, Kreis, Strecke, Gerade ...)
   - räumliche Objekte (Würfel, Kugel, Quader ...)
2. diese haben **Eigenschaften**
   - qualitative Eigenschaften (regelmäßig, viereckig, quadratisch, symmetrisch...)
   - quantitative Eigenschaften (Längen-, Inhaltsmaße)
3. und **Beziehungen** untereinander (parallel, deckungsgleich, symmetrisch...),
4. und man kann auf sie **Operationen** anwenden (Verschieben, Spiegeln, Zerlegen, Zusammensetzen ...)

Entsprechend diesem Aufbau der »Welt der Geometrie« gibt es 4 verschiedene Typen geometrischer Begriffe:

1. Objektbegriffe
2. Eigenschaftsbegriffe
3. Beziehungsbegriffe (Relationsbegriffe)
4. Operationsbegriffe

Immer von den Phänomenen zu den Begriffen!

Man kann zwar sagen: »Geometrie-Lernen« ist »Geometrische Begriffsbildung«, also das Konstruieren eines Verständnisses für die geometrischen Begriffe. **Begriffe stehen aber niemals am Anfang des Lernens, sondern am Ende**. Lernen beginnt nicht mit der Klärung von Begriffen (»Drehsymmetrie ist …«), sondern erfolgreiches Lernen wird erst durch die Klärung von Begriffen abgeschlossen, gewissermaßen ‚gekrönt', die man allmählich in seinem Kopf aufgebaut hat (»Aha, das alles hat mit Drehsymmetrie zu tun!«).

Niemand kann zuerst die geometrischen Begriffe lernen und sie dann anwenden, um geometrische Fakten zu verstehen. Lernen funktioniert immer ge-

rade umgekehrt. **Der Weg des Lernens führt stets von den Phänomenen zu den Begriffen – vom Handeln zum Denken.** (Piaget: »Denken ist vorgestelltes Handeln.«)

Begriffsbildung ist ein langfristiger Lernprozess; er geht stets von (vorsprachlichen) Erfahrungen aus, die im Kontext von **Handlungen** gemacht werden. Solche erlebten und trainierten Handlungen können wir dann in **Bildern** verdichten (Bilder sind immer Schnappschüsse/Erinnerungsfotos, die uns an eigene Handlungen erinnern; sonst funktionieren Bilder für uns nicht). Wenn wir mit solchen Bildern umzugehen gelernt haben, können wir noch einen Schritt weiter gehen: Wir verdichten Bilder zu **Symbolen**. Mit solchen Symbolen hantieren wir, als wenn wir wirklich handeln würden. Nicht nur, wenn wir mathematische Formeln schreiben und manipulieren, auch wenn wir nur über Mathematik sprechen, sind wir ganz auf der symbolischen Ebene der Mathematik.

Sprache entwickelt sich im Tun. Begriffsentwicklung ist aktives und konstruktives Tun. Lernen ist niemals ‚Aufnahme von Information', sondern stets ‚Konstruktives Handeln'. Auf der ersten Stufe: Handeln mit konkreten Objekten. Auf der zweiten Stufe Operieren mit Bildern. Auf der dritten Stufe: Handeln mit Symbolen. (Hierauf gehen wir noch einmal ausführlicher ein; siehe *Kapitel 4 Das EIS-Prinzip*.)

Übrigens: Beim geometrischen Begriffserwerb lernt man stets Objekt-, Eigenschafts-, Beziehungs- und Operationsbegriffe gleichzeitig und vernetzt (und selektiv). Man kann also nicht ‚zuerst Objektbegriffe' lernen und dann Eigenschaftsbegriffe usw.

Schüleraktivitäten im Geometrieunterricht

Die folgende Zusammenstellung ist ungeordnet und nicht vollständig. Sie soll nur zeigen, dass es um mehr geht als um Zeichnen, Messen, Beweisen. Ergänzen Sie die Liste. Und nennen Sie zu jedem Punkt »starke Beispiele« von Handlungen!

- etwas zeichnen
- etwas messen
- etwas berechnen
- etwas konstruieren (zusammenbauen)
- etwas dekonstruieren (zerlegen)
- etwas herstellen (basteln)
- eine Vorstellung bilden
- Dinge ordnen, klassifizieren
- einen Begriff bilden
- etwas erforschen
- einen Handlungsablauf erarbeiten
- etwas beschreiben



- eine Vermutung entwickeln
- eine Behauptung aufstellen
- eine Frage / einen Zweifel formulieren
- einen Satz allgemeiner formulieren
- einen Satz spezieller formulieren
- eine Begründung formulieren
- etwas aus anderer Sicht darstellen
- ein Problem lösen
- usw.

Warum überhaupt Geometrieunterricht?

In der Geometrie lernen wir (und die MathematikerInnen in unseren Klassen) etwas, das wir »figuratives Denken« nennen wollen. Die »eigentliche Geometrie« ist nicht jene, in der Figuren in Zahlen übersetzt werden (Strahlensätze, Pythagoras usw.), sondern jene, in der eine besondere »Form des Sehens« gelernt und angewandt wird – die natürlich eine besondere Form des Denkens ist, und nicht nur des mathematischen Denkens. Diese Form des Denkens nennen wir **»figuratives Denken«**. Dabei handelt es sich um ein vielfältiges Geflecht von mentalen Kompetenzen, die vielleicht den wichtigsten Aspekt dessen bilden, was man gewöhnlich als »mathematische Intelligenz« bezeichnet. Beim gegenwärtigen Stand der Mathematikdidaktik und besonders einer ihrer wichtigsten Bezugswissenschaften, der Neurowissenschaft, ist es nicht ausgeschlossen, dass wir bald davon sprechen werden, dass diese **figurative Intelligenz (zu der auch die räumliche Intelligenz gehört) die eigentliche Basis des mathematischen Denkens** ist.

Figurative Intelligenz als mathematische »Basisintelligenz«

Wer glaubt, dass Mathematik nur etwas mit Zahlen zu tun hat, hat von Mathematik recht wenig Ahnung. Dort, wo die moderne Mathematik gegenwärtig am erfolgreichsten ist und wo ihre Entdeckungen die spannendsten und wertvollsten Anwendungen finden, sind weniger Zahlen im Spiel - als vielmehr **Muster und Figuren**.

Unsere Zahlenintelligenz ist natürlich wichtig. Es wird für sie ja auch – von der Grundschule an – eine Menge getan. Mindestens ebenso wichtig ist aber unsere figurative Intelligenz. Sie wissen nicht, was ich meine? Da liegt das **Problem: Wir kennen die figurative Intelligenz nicht richtig, wir schätzen sie nicht, und daher pflegen wir sie auch nicht.**

In der Realität des heutigen Mathematikunterrichts wird das Training dieser besonderen und besonders wichtigen Intelligenz aber durchweg vernachlässigt. **Die**

Förderung der figurativen Intelligenz muss eines der zentralen Ziele des Mathematikunterrichts an allen Schulformen werden!

Figurative Intelligenz hat viel mit unserem räumlichen Vorstellungsvermögen zu tun, sie umfasst aber weit mehr. Daher erscheinen Bezeichnungen wie »räumliches Vorstellungsvermögen« oder »räumliche Intelligenz« zu eng. Aus diesem Grund wollen wir eben von »figurativer Intelligenz« sprechen.

Das Hauptziel des Mathematikunterrichts ist die **Förderung der drei mathematischen Intelligenzen**:

- figurative Intelligenz
- numerische Intelligenz
- logische Intelligenz

Man kann sogar sagen, dass der figurativen Intelligenz eine besondere Bedeutung beim Mathematiklernen zukommt. Sie scheint so etwas wie eine **»mathematische Basisintelligenz«** zu sein: Denn auch die **Entwicklung der numerischen Intelligenz scheint nur auf der Basis des Denkens in Figuren erfolgreich** ablaufen zu können. Figuratives Denken hilft dabei, numerische Zusammenhänge »in den Kopf zu bekommen«. Und zwar auf einem einfachen Wege: Numerische Strukturen werden durch Figuren mental repräsentiert (im Gehirn dargestellt). Letztlich hilft also das geometrische Denken dem numerischen Denken auf die Sprünge.

Die figurative Intelligenz ist von verschiedenen Autoren als »Faktor« bzw. sogar als eigenständige Form der Intelligenz definiert worden:

Thurstone (1937) definiert 7 Primärfaktoren der Intelligenz:

- Sprachverständnis
- Wortflüssigkeit
- Rechenfähigkeiten
- Wahrnehmungstempo
- Räumliches Vorstellungsvermögen
- Merkfähigkeit
- logisches (schlussfolgerndes) Denken

Gardner (1991) vertritt eine Theorie der ‚multiplen Intelligenzen':

- Linguistische Intelligenz
- Musikalische Intelligenz
- Logisch-mathematische Intelligenz
- Räumliche Intelligenz
- Körperlich-kinästhetische Intelligenz
- Intra- und Interpersonale Intelligenz

5 Das EIS-Prinzip: Hand–Auge–Kopf

Die Mathematik wird zumeist als eine formale Wissenschaft angesehen, die ihre Erkenntnisse symbolisch ausdrückt. Doch auch jede andere Disziplin bewegt sich auf der symbolischen Ebene, denn alle drücken ihre Ergebnisse irgendwie sprachlich aus. Und Sprache ist nun einmal immer ein ‚symbolisches Spiel'. Wir können uns Menschen sogar dadurch definieren: Der Mensch ist eine ‚symbolische Spezies'.

Auch in unseren Köpfen wird Wissen symbolisch ‚gespeichert' (Fachbegriff: ‚repräsentiert'), zum Beispiel mit Worten oder Formeln. Aber die symbolische Form ist nicht die einzige Form der Wissensrepräsentation in unserem Gehirn. Ja, es ist nicht einmal die wichtigste. Die Sprache der Symbole verstehen wir nämlich erst, nachdem wir eine andere Sprache gelernt haben: die Sprache der Bilder. Niemand kann irgendeinen Tatbestand symbolisch erfassen und ‚abspeichern', wenn sie/er nicht zuvor gelernt hat, etwas ‚durch Bilder' zu erfassen und abzuspeichern. Aber auch die Sprache der Bilder verstehen wir nicht sofort.

Lernpsychologisch betrachtet sind Bilder immer ‚Memos für etwas anderes'. Und zwar nicht für einen Gegenstand, obwohl man das zumeist glaubt, sondern für eine Handlung (genauer: einen Komplex von Handlungen). So ist ein Foto eines Menschen nur scheinbar ein Memo für dessen Aussehen. In Wirklichkeit verbinde ich mit einem solchen Bild viel mehr: Es kann zum Beispiel in mir einen ganzen ‚Film von Erinnerungen' wachrufen; ich sehe diesen Menschen vielleicht in konkreten Situationen, ich sehe ihn also handeln, und ich sehe mich handeln. Das Bild speichert mein Handlungswissen im Zusammenhang mit diesem Menschen.

Der amerikanische Lernpsychologe **Jerome S. Bruner** (*1915) hat zum ersten Mal auf diesen Zusammenhang zwischen symbolischen, ikonischen und enaktiven Formen der Wissensgewinnung, -verarbeitung und -speicherung aufmerksam gemacht. Während Bruner darin – weil er den entwicklungspsychologischen Aspekt im Vordergrund sah – vor allem den Aspekt von Stufen (Niveaus) betonte, die in einem zeitlichen Nacheinander stehen (und damit eine Entwicklungshierarchie bilden), steht für uns heute eher die Tatsache im Vordergrund, dass die drei Formen untereinander immer in Verbindung bleiben: ich kann zum Beispiel von der symbolischen Form immer wieder nach Bedarf auf die Ebene der Bilder oder auf die der Handlungen hinüberwechseln.

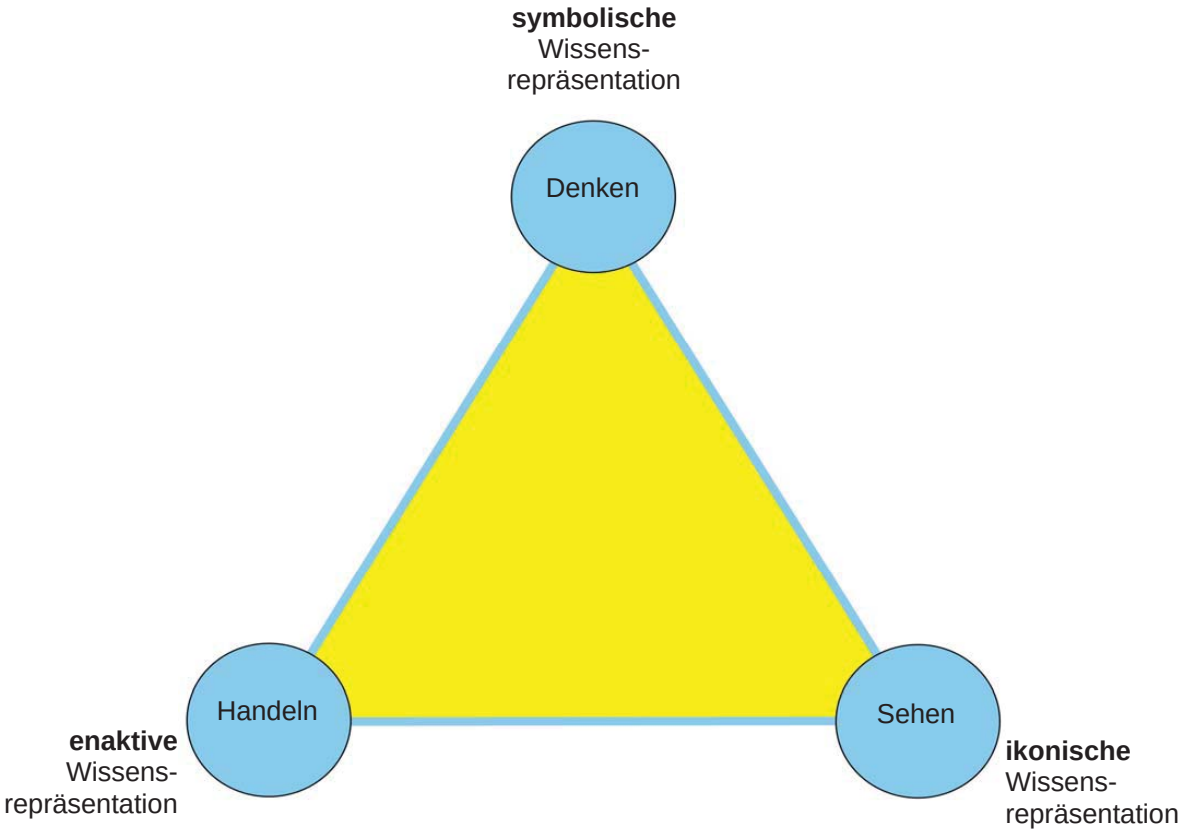
Zwar gibt es in der Entwicklung des Individuums wirklich eine Reihenfolge zunehmender Abstraktion (Entwicklungshierarchie), nämlich:

zuerst: **enaktiv – Handeln – ‚Hand'**

dann: **ikonisch – Sehen – ‚Auge'**

schließlich: **symbolisch – Denken – ‚Kopf'**

Doch es handelt sich nicht um Niveaus, welche die jeweils vorangehenden ablösen/ersetzen/verdrängen. Vielmehr um fortschreitende Abstraktionen der ursprünglichen Niveaus, die weiterhin aktiv und wichtig bleiben. Die ‚abstrakteren' Niveaus werden vom Individuum nur dann sicher beherrscht, wenn es sie durch Rückgriff auf elementare Niveaus re-konkretisieren kann, und zwar jederzeit.



Piaget: »Denken ist vorgestelltes Handeln.«

Ohne in einem bestimmten Problembereich zuvor intensive Erfahrungen mit konkretem problemlösenden Handeln (enaktive Wissensrepräsentation) gesammelt zu haben, kann ich mit noch so schönen und anschaulichen Bildern (ikonische Wissensrepräsentation) nicht wirklich etwas anfangen. Ich muss erst ausführlich, genügend lange und genügend vielfältig (über den Weg des Handelns) lernen, solche Bilder als bildlich komprimierte und suggestive Handlungsanweisungen zu verstehen, gewissermaßen als ‚Schnappschüsse von Handlungen'.

Erst wenn ich mit Bildern so umgehen kann, dass sie für mich fast automatisch (beim bloßen Betrachten) die gedankliche Rekonstruktion von imaginären (manchmal aber auch realen) Handlungsabläufen auslösen (die in ihnen codiert sind), kann ich die nächste Abstraktionsstufe betreten: den konstruktiven Umgang mit noch abstrakteren Darstellungsformen wie sprachlichen Beschreibungen und

Begründungen oder mit mathematischen Formeln (beides sind symbolische Wissensrepräsentationen).

Beim Umgang mit Bildern, Diagrammen, Modellen (ikonische Ebene) wie auch im Umgang mit formalen, formelhaften Ausdrucksformen (symbolische Ebene: Sprache, mathematische Formeln etc.) werde ich immer wieder – manchmal als ‚Rettungsanker', manchmal einfach nur aus ‚Lust am konkreten Tun' – mit Erfolg auf die Ebene des wirklichen Handelns (enaktive Ebene) zurückkehren.

Die Abstraktionsstufen ***enaktiv – ikonisch – symbolisch*** erreiche ich in meiner Denkentwicklung zwar nacheinander, in der Entwicklung bauen sie ja aufeinander auf. Doch ich verlasse in meiner Entwicklung keine dieser drei Ebenen jemals ganz, nicht endgültig. Immer wieder kehre ich von einer abstrakteren Ebene auf eine konkretere zurück (und von einer konkreteren wieder zu einer abstrakteren). Bildlich: Sie bilden keine ‚Treppe', die ich nur hinaufsteige, sondern es sind drei benachbarte ‚Räume' meiner Wohnung, in jedem halte ich mich immer wieder einmal gern auf.

Übrigens kann mir niemand vorschreiben, wann ich mich in welchem Raum aufzuhalten habe. Ob ich ein Problem diesmal enaktiv, ikonisch oder symbolisch darstelle und zu lösen versuche (oder in irgendeiner Kombination davon), ist allein meine Sache. Wer mich da gängeln will, muss einfach einsehen, dass das nicht funktioniert. Wer mir den Lösungsweg vorschreiben will, soll ihn lieber gleich selbst gehen. Vielleicht hat er (oder sie) das ja auch getan und meint nun, dies sei der einzige oder der beste. Für mich ist aber immer der Weg der beste, auf dem ich gerade bin. Und wenn es ein Holzweg sein sollte, dann muss ich selbst das für mich herausfinden. Manche(r) hat auf den verlassenen Holzwegen anderer Leute schon die tollsten Entdeckungen gemacht …

6 Leitidee der Geometrie: Raum und Form

Leitideen der Mathematik

Im Bildungsplan 2004 des Landes Baden-Württemberg werden für Hauptschule und Realschule sechs »Leitideen der Mathematik« angegeben:

1. **Modellieren**
   Lösen anwendungsbezogener Probleme u. Aufgaben
2. **Zahl**
   Arithmetik / Algebra
3. **Messen**
   Handlungsorientierung, Systematik, Zahlgenauigkeit, Schätzen, Größen
4. **Raum und Form**
   Entwicklung und Förderung der figurativen Intelligenz
5. **Funktionaler Zusammenhang**
   Untersuchung der Abhängigkeit einer Größe von einer anderen: Datenvariation, Gesetzmäßigkeiten
6. **Daten und Zufall**
   Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

für das Gymnasium zusätzlich:

7. **Algorithmus**
8. **Variable**
9. **Vernetzung**

Kritik

7 der 9 insgesamt angegebenen Leitideen sind ausschließlich bzw. vorwiegend **zahlorientiert**; nur 1 Leitidee ist **figurorientiert**. Das bildet weder die tatsächliche Orientierung der modernen Mathematik ab, noch entspricht es den Erfordernissen einer adäquaten Förderung der mathematischen Intelligenz.

Die Leitidee »Raum und Form« in der Realschule

Klasse 6

- geometrische Strukturen in der Umwelt erkennen und sie beschreiben
- Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte anhand definierender Merkmale beschreiben und begründen
- geometrische Figuren auch im Koordinatensystem zeichnen unter Verwendung angemessener Hilfsmittel
    - o Symmetrie
    - o Flächen- und Körperbetrachtungen
    - o zeichnerische Darstellungen

Klasse 8

- geometrische Zusammenhänge mit Hilfe von bekannten Strukturen erschließen und sie algebraisch veranschaulichen und darstellen ***(zahlorientiert!)****
- rechnerische Beziehungen zwischen Seitenlängen, Flächeninhalten, Volumina ***(zahlorientiert!)****
- Körper darstellen und aus ebenen Darstellungen erkennen
- Lagebeziehungen geometrischer Objekte erkennen, beschreiben und begründen und beim Problemlösen nutzen
- bei Konstruktionen, Berechnungen und einfachen Beweisen Sätze der Geometrie benutzen

Klasse 10

- geometrische Zusammenhänge mit algebraischen Methoden untersuchen
- algebraische Probleme geometrisch umsetzen, interpretieren und anschaulich lösen
- rechnerische Beziehungen zwischen Seitenlängen und Winkelmaßen im rechtwinkligen Dreieck herstellen ***(zahlorientiert!)****
- Eigenschaften geometrischer Objekte und ihrer Beziehungen untereinander erkennen, begründen und zur Analyse von Sachzusammenhängen beim Problemlösen nutzen
- Materialmodelle und ein dynamisches Geometriesystem beim explorativen Arbeiten einsetzen

***** Zwar wichtig, aber in der Schulwirklichkeit nicht Geometrie, sondern Algebra

Pythagoras, Strahlensätze – im Matheunterricht wirklich Geometrie?!

1. Sarah macht im Matheunterricht im Augenblick Geometrie. Thema »Pythagoras und Anwendungen«. Sarah zeigt Ihnen ihr Matheheft. Was werden Sie darin finden?
2. Sven macht im Matheunterricht im Augenblick ebenfalls Geometrie. Thema »Strahlensätze«. Was wird Sven in der nächsten Klassenarbeit vor allem können müssen?

zu 1.
Sie werden in Sarahs Heft vorwiegend Wurzelrechnungen und Wurzelgleichungen sehen. Geometrische Zeichnungen auch, aber nur als kleine Hilfsskizzen. Die entscheidende Frage wird für Sarah nicht sein, ob sie geometrische Sachverhalte durchschauen kann, sondern ob sie Wurzelterme berechnen kann.

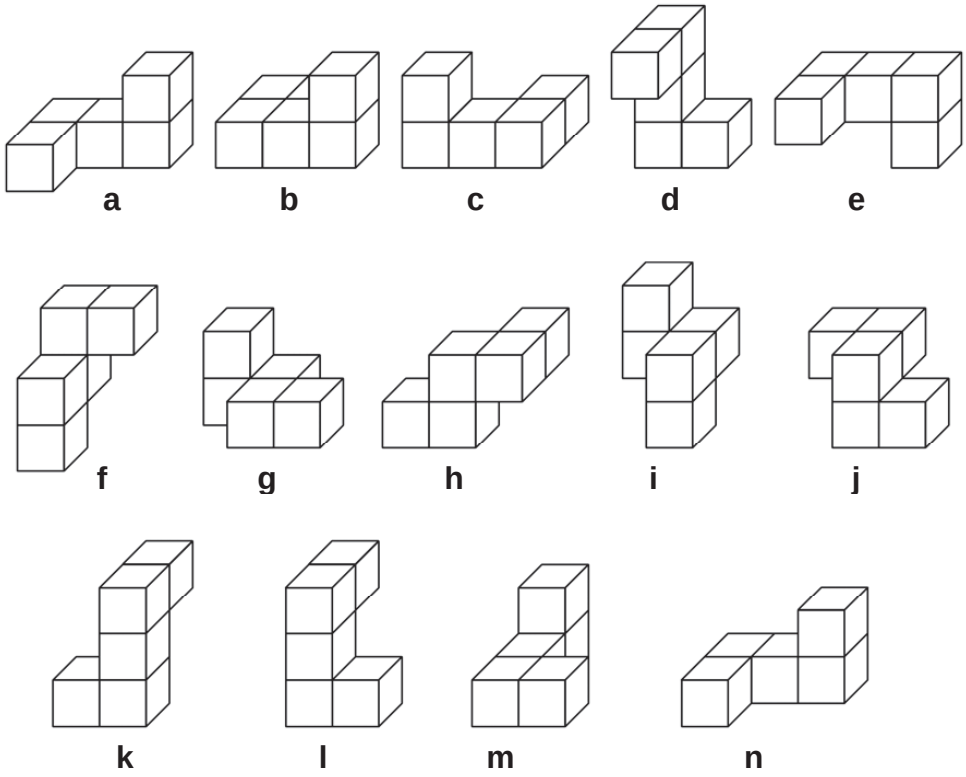
zu. 2
Sven muss in der Klassenarbeit vor allem Proportionen lösen können; die zugrunde liegende Geometrie ist im allgemeinen so einfach, dass Sven sich beim Üben ganz auf das Training seiner algebraischen Fertigkeiten konzentrieren muss.

Wie holen Sie als Lehrer(in) die Geometrie zurück?

- Was sind die Ursachen für diese eigentlich ganz geometrie-ferne Behandlung von Pythagoras und Strahlensätzen? (Welches Lehrer-Bild von den beiden Themen könnte vielleicht dahinter stecken? Welches Bild von der Geometrie? Welches Bild von der Mathematik überhaupt?)
- Was spricht für einen solchen Unterricht, was spricht dagegen?
- Wie würden Sie das als Lehrer(in) machen? Worin liegt für Sie **der eigentliche Sinn** von Unterrichtsstunden zu Pythagoras und Strahlensätzen? (Hat das etwas mit dem EIS-Prinzip zu tun?)

7 Puzzles: Kombinatorische Geometrie
Polyominos, Polykuben, Puzzles

Wie viele verschiedene Pentakuben sehen Sie hier?

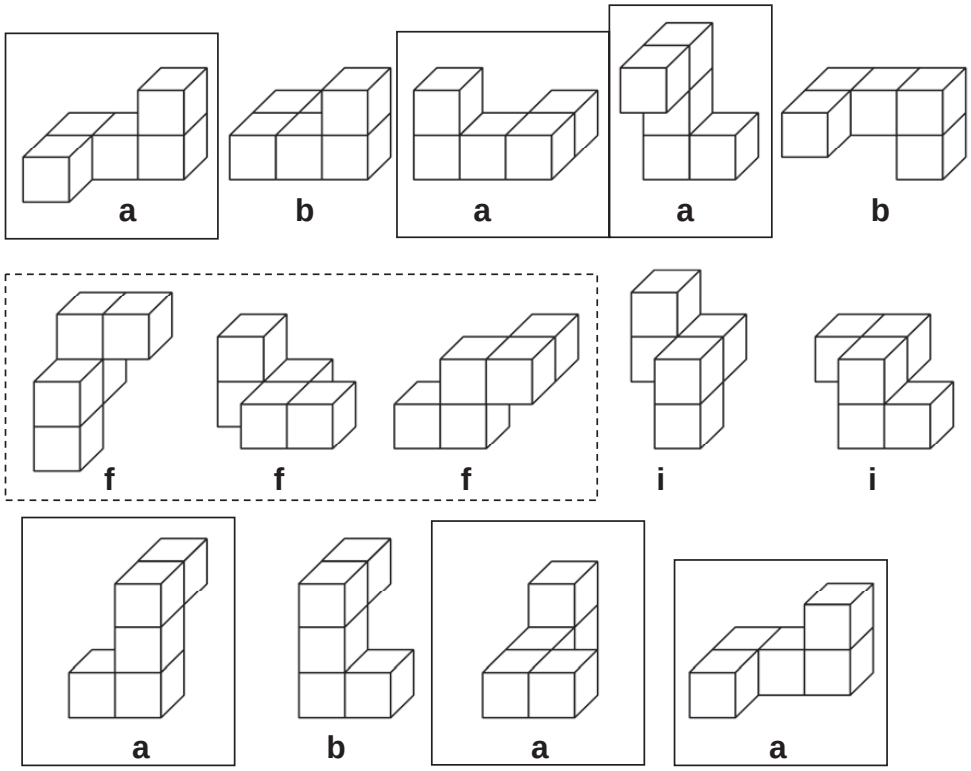


– Wie gut ist Ihre räumliche Vorstellungskraft – Ihre figurative Intelligenz? Wie bewerten Sie sich hier selbst?

– Was funktioniert bei Ihnen besser:
  – bloßes Hinschauen, oder
  – Hinschauen und »mit den Händen in der Luft herumgreifen«?

– »Denken ist probeweises Handeln.« Können Sie hier nachvollziehen, was Piaget mit diesem Satz gemeint haben könnte? Was hat das mit dem EIS-Prinzip zu tun?

Es sind nur vier verschiedene Pentakuben.



Die meisten Menschen stellen fest, dass ihre figurative Intelligenz schon durch wenige Minuten Training mit dieser Pentakuben-Aufgabe verbessert wird. Vielleicht geht Ihnen das auch so?

Zwei Begriffe

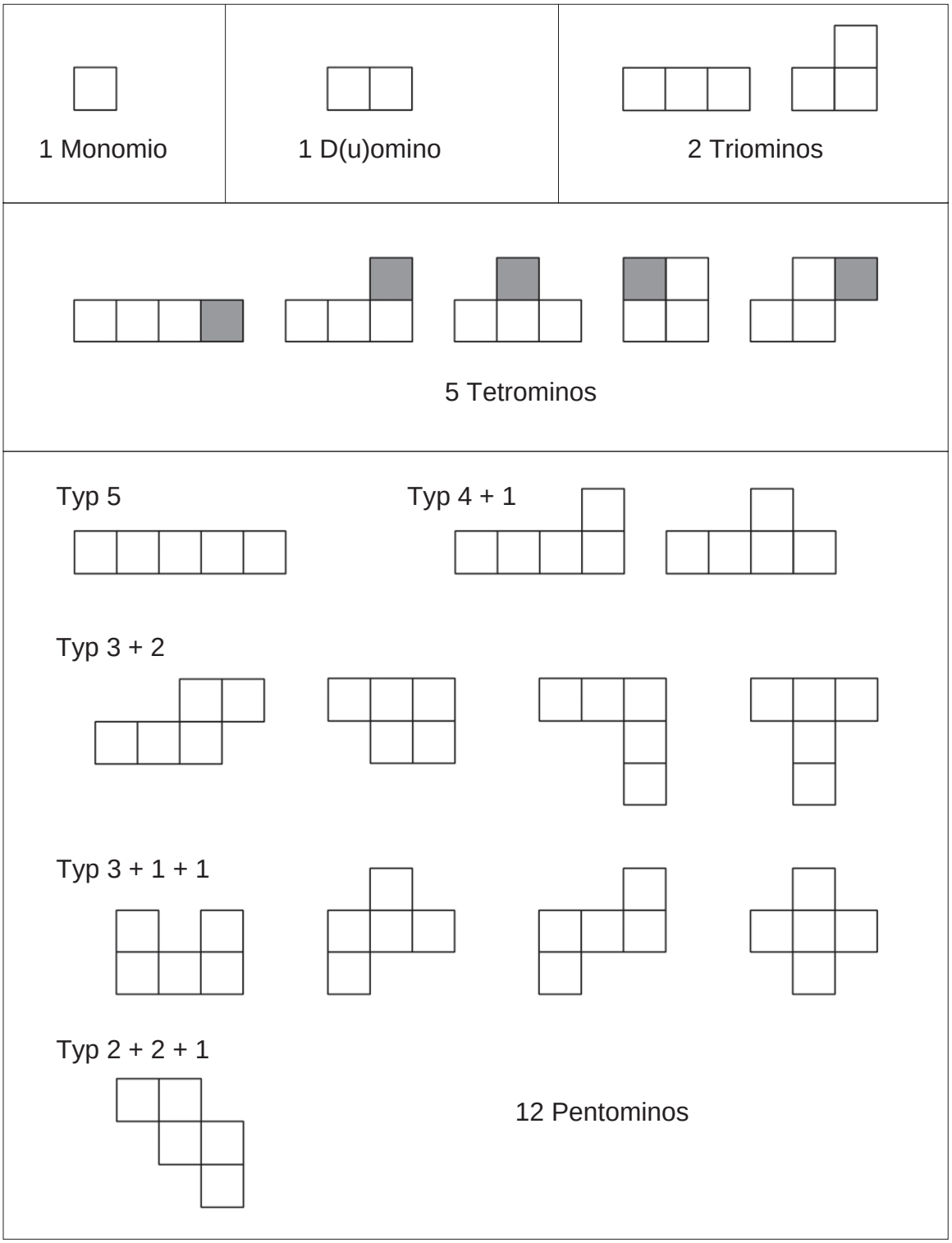
Polyomino (das; *Plural:* die Polyominos): Figur, die aus kongruenten Quadraten aufgebaut ist, die Seite an Seite passgenau zusammenhängen.

Polykubus (der; *Plural:* die Polykuben): Körper, der aus kongruenten Würfeln aufgebaut ist, die Fläche an Fläche passgenau zusammenhängen.

Trainingsaufgabe (Reihenfolge beliebig)

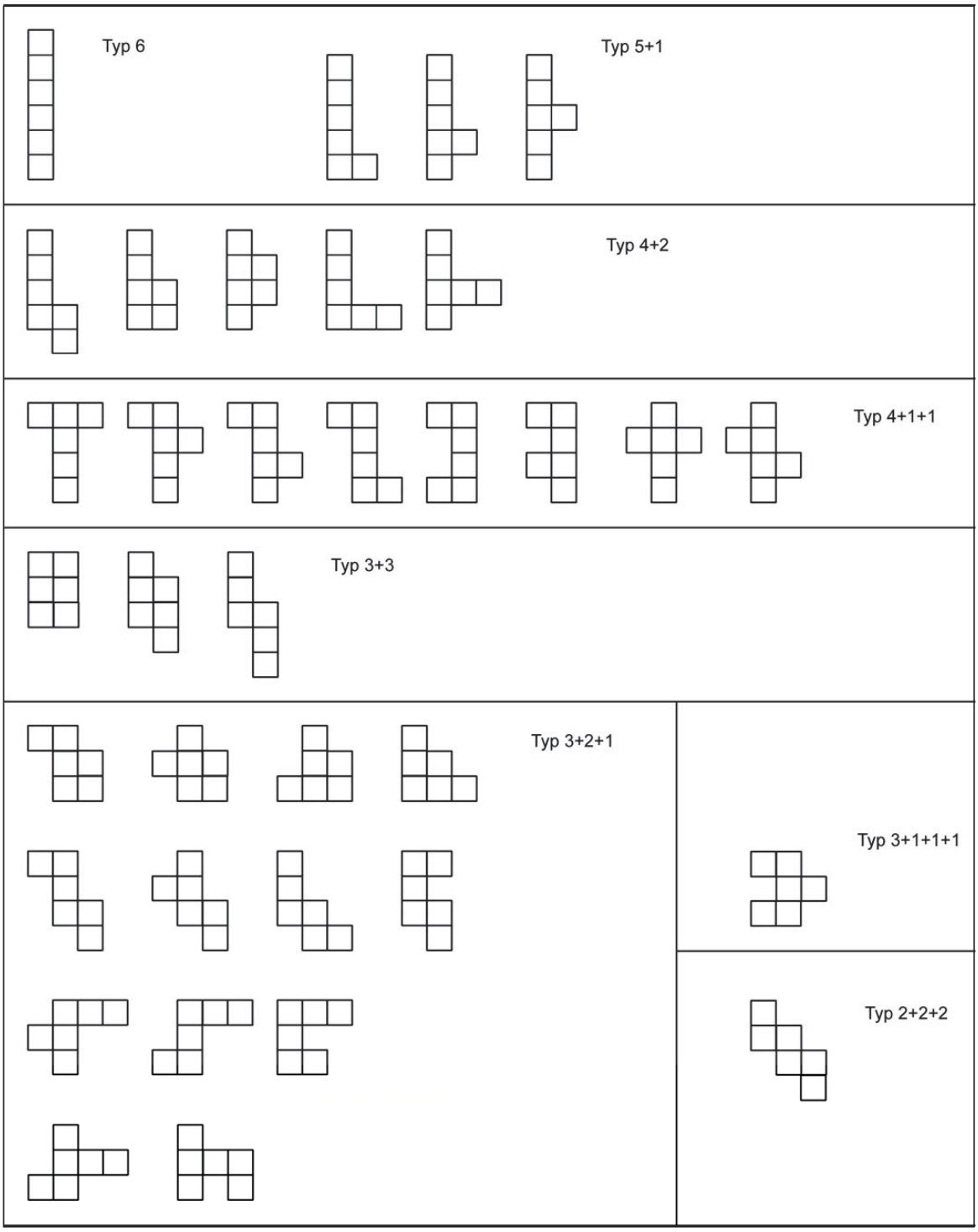
- Zeichnen Sie alle Tetrakuben (Vierwürfler).
- Zeichnen Sie alle Pentakuben (Fünfwürfler).
- Zeichnen Sie alle Tetrominos (Vierquadratler).
- Zeichnen Sie alle Pentominos (Fünfquadratler).
- Zeichnen Sie alle Hexominos (Sechsquadratler).
  (Übrigens: Alle Würfelnetze sind Hexominos; gilt das auch umgekehrt?)

Polyominos



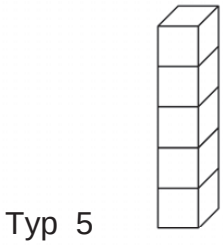
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Anzahl *n*-Ominos	1	1	2	5	12	35	107	369	1.285	4.655	17.073	63.600	238.591	901.971	3.426.576

35 Hexominos

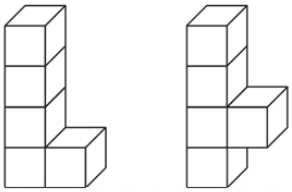


Können Sie unter den Hexominos die Würfelnetze identifizieren?

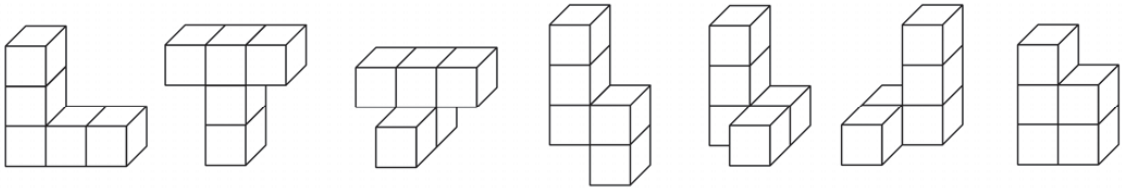
Polykuben



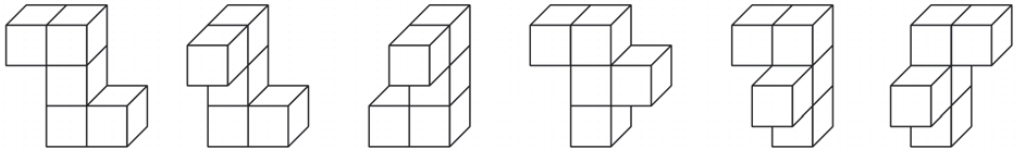
Typ 5



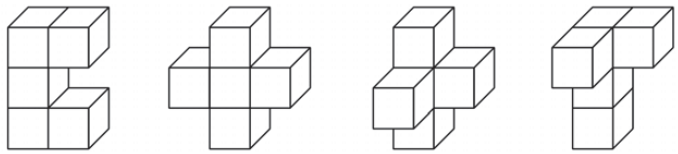
Typ 4 + 1

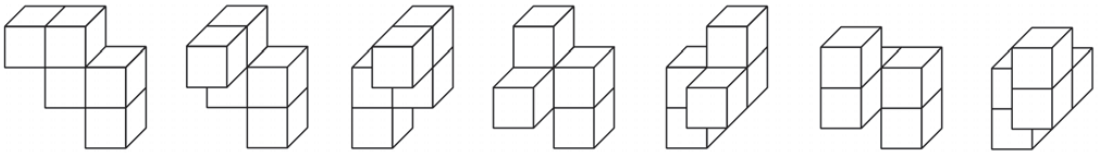


Typ 3 + 2

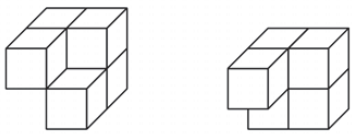


Typ 3 + 1 + 1

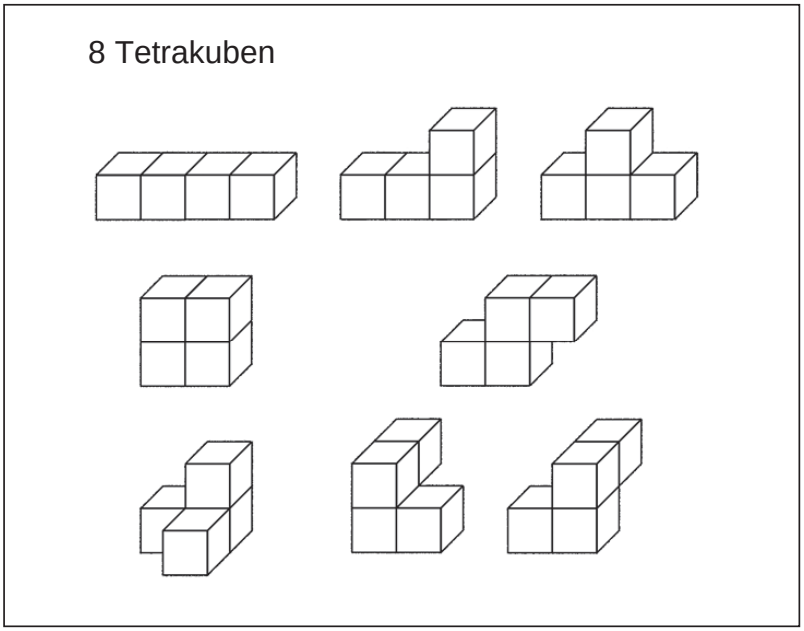




Typ 2 + 2 + 1



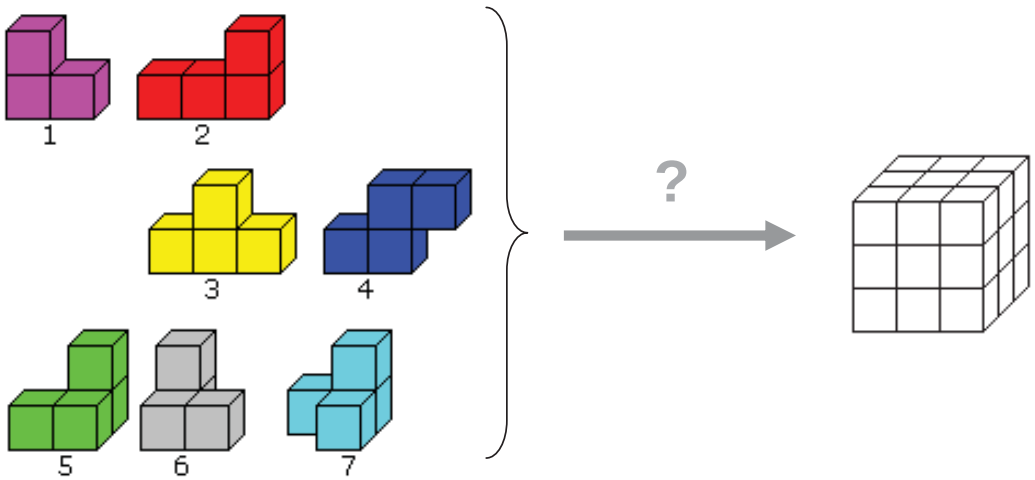
29 Pentakuben



Der SOMA-Würfel

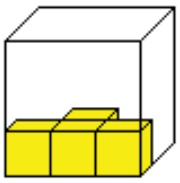
Dies ist ein Puzzle, das von dem dänischen Mathematiker und Erfinder Piet Hein (1905–1996) erfunden wurde; wie er selbst sagte, während er in einer Quantenmechanik-Vorlesung des großen Physikers Werner Heisenberg gesessen hat.

Aus einem Trikubus und sechs Tetrakuben soll ein 3x3x3-Würfel gebaut werden:



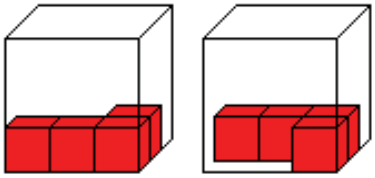
Das ist auf 240 verschiedene Weisen möglich.

Entdeckung: Es kommt auf die Lage der beiden Dreiersteine an!
(Dreiersteine: Steine, die eine Dreiersäule enthalten; also Stein 2 und Stein 3)



Stein 3 bildet immer entweder 0 oder 2 Ecken.
Hier (links) bildet er 2 Ecken.

Stein 2 kann 0, 1 oder 2 Ecken bilden.
Hier (rechts) bildet er 2 Ecken bzw. 1 Ecke:

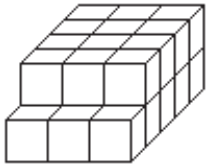


1. Fall: Stein 3 bildet keine Ecke. Die übrigen 6 Steine liefern höchstens 7 Ecken (Stein 2 maximal 2 Ecken, die übrigen jeweils maximal 1 Ecke). Das liefert keine Lösung, weil dann nicht 8 Ecken, sondern nur 7 gebildet werden!

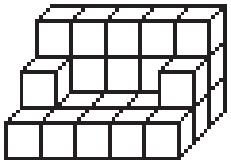
2. Fall: Stein 3 bildet 2 Ecken. Die übrigen 6 Steine liefern die restlichen 6 Ecken. Das ist möglich. Dann muss aber Stein 2 mindestens eine Ecke bilden. Er darf also nicht in der Mitte liegen.

Was man daraus noch bauen kann

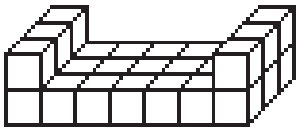
Aus den 7 Somasteinen können auch die folgenden Körper gebaut werden:



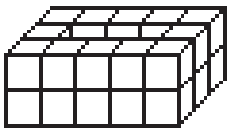
Auto



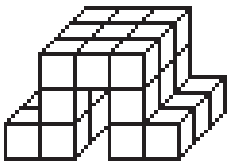
Sofa



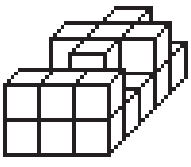
Bett



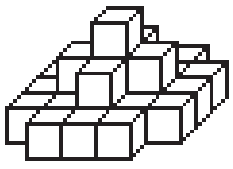
Wanne



Tor

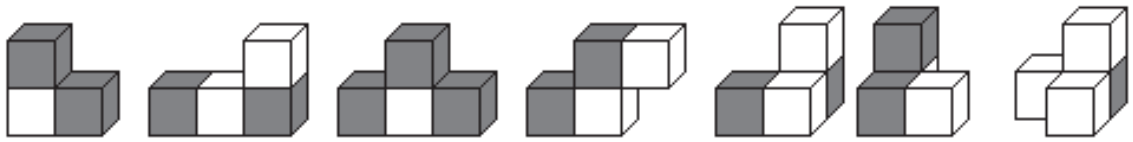


Grab

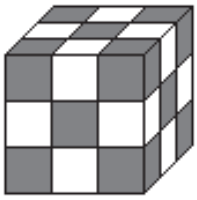


Denkmal

Der Schachbrett-SOMA-Würfel



Die Puzzelsteine müssen nun so zusammengesetzt werden, dass im 3x3x3-Würfel benachbarte Würfelchen stets verschiedenfarbig sind:



Macht das die Sache schwieriger? Oder hilft es im Gegenteil, weil man nun in jedem Schritt nur die wenigen Kombinationen probieren muss, die auch farblich passen?

8 Handelnd entdecken: Der n-Eck-Baukasten

Die Bausteine des n-Eck-Baukastens sind Kunststoffplättchen in der Form **regelmäßiger n-Ecke**. Sie haben alle die **gleiche Kantenlänge**, damit man jedes Plättchen mit jedem anderen passgenau Kante an Kante zusammenfügen (klippen) kann.

Durch Aussparungen an den Kanten ist die Verbindung der Plättchen fest, aber so beweglich, dass die **Kanten** der verbundenen Plättchen **wie Scharniere** wirken.

Allein mit der einen immer gleichen **Basis-Operation »Klippen«** kann man die n-Eck-Plättchen auf sehr vielfältige Weise zu größeren geschlossenen Formen zusammensetzen.

Der n-Eck-Baukasten entfaltet nur dann seine besonders suggestive **»didaktische Kraft«**, wenn er im Unterricht so verwendet wird, wie es generell **dem kognitiven Stil des kindlichen Bauens** entspricht, der charakterisiert ist durch die Stilmerkmale

- offener Zugang
- Explorativität
- Kreativität
- Individualität
- Selbstorganisation



Dies führt zu der folgenden Leitlinie des Lehrerhandelns:

Didaktische Maxime

Der Sinn des Bauens ist das Bauen.
Beim konstruktiven Handeln entdeckt sich die Mathematik von selbst.

Daher hängt der Lernerfolg im allgemeinen nicht davon ab, welche Objekte gebaut werden:

- abbildende Figuren (Hund, Auto etc.)
- abstrakte Figuren (»Kugel«, Dodekaeder etc.)







Eine »minimal invasive« Lenkung der S-Aktivitäten beim Bauen verspricht auch im Unterricht den besten Erfolg. Nach einer **ersten Phase des sehr freien Bauens** kann in einer **zweiten Phase der Spielregeln** eine solche Lenkung erfolgen.

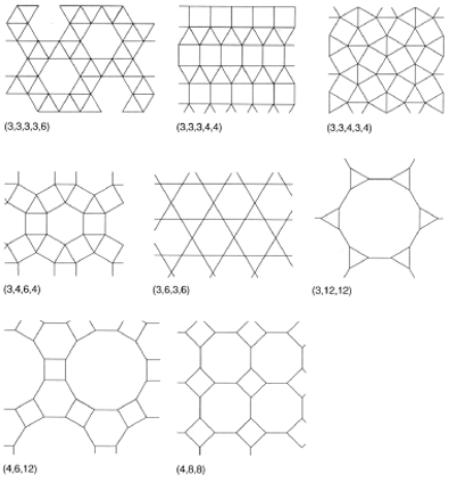
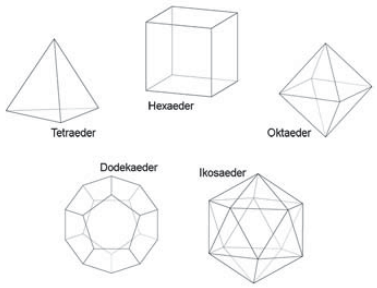
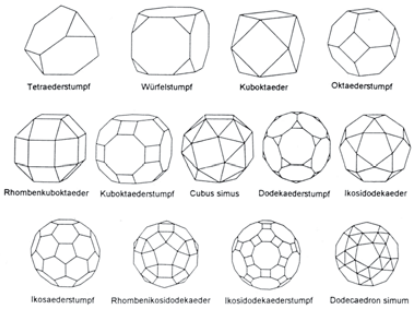
Mögliche Spielregeln

bzgl. der Art des Spiel-Materials

– Nimm lauter kongruente n-Ecke (zum Beispiel nur Dreiecke)
– Nimm unterschiedliche n-Ecke (zum Beispiel Dreiecke und Vierecke)

bzgl. der Art des Spiel-Raums

– Die Konstruktion muss flach auf dem Tisch bleiben (zweidimensionaler Spiel-Raum; *Ebene*)
– Die Konstruktion kann vom Tisch emporwachsen (dreidimensionaler Spiel-Raum; *Raum*)

	lauter kongruente n-Ecke	**unterschiedliche n-Ecke**
in der Ebene bleiben: **zweidimensionaler Spiel-Raum** Fundamentale Entdeckung: Wenn es im Kleinen passt, dann passt es überall !	Elementare reguläre Parkette und Ornamente: nur möglich aus – regelmäßigen Dreiecken – Quadraten – regelmäßigen Sechsecken	Allgemeine reguläre Parkette und Ornamente; z.B. die archimedischen Parkette: 
aus der Ebene hinaus: **dreidimensionaler Spiel-Raum** Fundamentale Entdeckung: Lückenschließen zwingt aus der Ebene in den Raum !	Platonische Körper 	allgemeine Körper aus regulären Vielecken; z.B. die archimedischen Körper: 

Bauen Sie selbst

1. Bauen Sie alle **platonischen Körper** (regulären Polyeder)
   – konvexes Polyeder
   – jede Fläche ist ein reguläres Vieleck.
   – jede Ecke sieht gleich aus.
   – alle Flächen sind kongruent.

2. Bauen Sie einen **archimedischen Körper** (halbreguläres Polyeder)
   – konvexes Polyeder
   – jede Fläche ist ein reguläres Vieleck.
   – jede Ecke sieht gleich aus.
   – nicht alle Flächen sind kongruent.

3. Bauen Sie möglichst viele **Deltaeder** (vielleicht sogar alle; wie viele gibt es?)
   – konvexes Polyeder
   – jede Fläche ist ein regelmäßiges Dreieck
   – alle Flächen sind kongruent
   – die Ecken müssen nicht alle gleich aussehen.

Aus dem Forschungsheft von Lara

Beim explorativen Hantieren mit dem n-Eck-Baukasten machen SchülerInnen eine Reihe wichtiger Entdeckungen. Auszüge aus dem Forschungsheft von Lara, 7. Klasse (hier leicht bearbeitet; Lehrerergänzungen in Klammern):

1. Eine (Raum-)Ecke kann nur entstehen, wenn ich mindestens 3 Flächen aneinander klippe. Zwei Flächen reichen nicht für eine Ecke.

2. Wenn ich 3 (regelmäßige) Sechsecke zusammenklippe, dann bilden die aber keine (Raum-)Ecke. Sie liegen nämlich flach auf dem Tisch – wie Fliesen flach auf dem Boden liegen. Das liegt daran, dass 3 (regelmäßige) Sechsecke genau zusammenpassen – wie Bienenwaben.

3. Ich brauche für eine (Raum-)Ecke zwar immer 3 Flächen oder mehr, aber die müssen alle zusammen, wenn ich sie flach auf den Tisch lege, immer noch eine Lücke lassen (Winkeldefizit: Die Winkelsumme ist kleiner als ein voller Winkel).

4. Wenn 3 Sechsecke schon keine Raumecke bilden können, dann mehr als 3 sowieso nicht. Und auch nicht 3 oder mehr Siebenecke, Achtecke usw. Denn die Winkel (Innenwinkel) sind bei denen ja noch größer. Daher kann

dabei auch nichts (keine Lücke) übrig bleiben. (Im Gegenteil, 3 Siebenecke, Achtecke usw. überlappen sogar immer.)

5. Jetzt ist klar: Wenn ich aus lauter (regelmäßigen) n-Ecken einen Körper bauen will, dann kann das nur mit Dreiecken, Vierecken (Quadraten) und Fünfecken klappen. Ob das auch wirklich damit klappt? Weiß ich nicht. Aber mit Sechsecken und so klappt es sicher nicht. Das ist schon mal klar.

6. Ich hab das jetzt mal der Reihe nach ausprobiert. Also mit Fünfecken geht das schon mal nicht, wenn man mehr als 3 nimmt. Dann ist wieder keine Lücke da. Aber mit 3 (an jeder Ecke) klappt es. Ich kann eine Schale aus Fünfecken bauen. Wenn ich ein Fünfeck als Boden hinlege und drum herum (aus 5 Fünfecken) einen Rand baue. Und wenn ich noch so eine Schale zusammenbaue, dann kann ich die beide zu einer Kugel zusammensetzen. Die passen genau zusammen. Also, eine Kugel ist das ja nicht. Aber es sieht halt so ähnlich aus wie eine Kugel. Eine Kugel aus lauter Fünfecken. Moment mal, aus genau 12 Fünfecken, klar, jede Schale hat ja 6.

7. Mit Vierecken (Quadraten) klappt es auch nur, wenn ich 3 nehme. Immer 3 zusammen machen eine Raumecke. 4 Vierecke würden auch wieder nur flach auf den Tisch passen, ohne Lücke. Wie die 3 Sechsecke, wie Fliesen. Klar, wenn ich Vierecke zusammenklippe, kriege ich natürlich einen Würfel. Das sieht man sofort, man braucht den gar nicht fertig zu bauen. Das hätte ich eigentlich auch vorher wissen können.

8. Und jetzt mit Dreiecken. Also es klappt nicht nur mit 3 Dreiecken, sondern auch mit 4 oder mit 5. Wenn man überall 3 Dreiecke zusammenklippt, also an jeder Ecke, dann kommt ein Tetraeder raus. Wenn man immer 4 Dreiecke (an jeder Ecke) nimmt, dann kommt so ein Körper mit 8 Dreiecken raus (Oktaeder). Am schönsten sieht es aus, wenn man immer 5 Dreiecke nimmt. Dann sind die Ecken nicht so spitz. Am spitzesten sind die Ecken beim Tetraeder. (Je mehr Dreiecke an einer Ecke zusammenkommen, desto weniger spitz ist die Ecke.) Also hier mit immer 5 Dreiecken kriege ich einen (Körper), der irgendwie besonders interessant aussieht. Ist gar nicht so leicht zu zählen, wie viele Dreiecke ich jetzt dafür gebraucht habe. Es sind glaube ich 20 (Ikosaeder = Zwanzigflächner).

9. Ja das war's. Wenn man (mit dem n-Eck-Baukasten, der nur regelmäßige n-Ecke hat) so Kugeln bauen will (d.h. konvexe Polyeder), aber immer nur mit einer Sorte von Bausteinen (d.h. mit lauter kongruenten n-Ecken), dann geht das nur mit lauter Fünfecken oder lauter Vierecken (Quadraten) oder lauter Dreiecken. Aber bei Dreiecken gibt es drei. Immer 3 (Dreiecke pro Ecke), immer 4 (Dreiecke pro Ecke) oder immer 5 (Dreiecke pro Ecke).

Reflexion

Lara hat hier explorativ entdeckt und bewiesen, dass es genau 5 platonische Körper gibt.

1. Welche suggestive Metapher hat Lara für den Begriff »konvexes Polyeder« gefunden?
2. Wie repräsentiert Lara das Konzept »Winkeldefizit« (Vorlesung)? Handelt es sich um eine enaktive, eine ikonische oder eine symbolische Repräsentation?
3. Lara hat bewiesen, dass es nicht mehr als 5 platonische Körper gibt. Wie hat sie das gemacht?
4. Lara hat alle 5 platonischen Körper tatsächlich gebaut und damit empirisch bewiesen, dass deren Konstruktion möglich ist. Hat Lara darüber hinaus für ein oder mehrere Polyeder die Konstruierbarkeit auch theoretisch begründet (also nicht durch Bauen, sondern durch Argumente gerechtfertigt)?

9 Polyeder: Figurative Vielfalt

Konvexe Polyeder aus regulären Vielecken

Beim freien Bauen mit dem n-Eck-Baukasten können auch konvexe Körper entstehen. Welche konvexen Körper gibt es denn überhaupt, deren Flächen ausschließlich regelmäßige n-Ecke sind?

1. **Platonische Körper** (reguläre Polyeder; 5)
2. **Archimedische Körper** (halbreguläre Polyeder; 13)
3. **regelmäßige Prismen** (unendlich viele)
4. **regelmäßige Antiprismen** (unendlich viele)
5. **Johnson-Körper** (92)

Einige der konvexen Körper aus regelmäßigen Vielecken lassen sich durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegen, die wiederum solche Körper sind. D.h. die Schnittfläche ist ebenfalls ein regelmäßiges Vieleck. Solche Körper heißen **zerlegbar**; die übrigen heißen unzerlegbar oder **einfach**. **Es gibt genau 28 einfache konvexe Körper aus regelmäßigen Vielecken.** (Welche sind das?)

Geometrie – alles längst bekannt?

Dass es außer den platonischen und den archimedischen Körpern sowie den regelmäßigen Prismen und Antiprismen noch weitere konvexe Körper aus lauter regelmäßigen Vielecken gibt – haben die Griechen das wohl schon gewusst, was meinen Sie?

Nein, man kann es zwar kaum glauben, aber es ist so: Es ist gerade einmal 40 Jahre her, dass ein Mathematiker sich diese doch wirklich naheliegende Frage stellte und auch gleich eine Vermutung darüber publizierte, wie viele und welche Körper das wohl seien. Drei Jahre später hat der Leningrader Mathematiker Viktor Zalgaller die Vermutung von Norman Johnson durch einen (übrigens ziemlich langen) Beweis (mit vielen Fallunterscheidungen) bestätigt:

Es gibt genau 92 Johnson-Körper, also konvexe Körper aus regulären Vielecken, die weder platonische noch archimedische Körper noch reguläre Prismen oder Antiprismen sind. (Vermutung: Johnson 1966; Beweis: Zalgaller 1969).

Literatur zu Polyedern

Cromwell, P. R. (1997). Polyhedra. New York: Cambridge University Press.

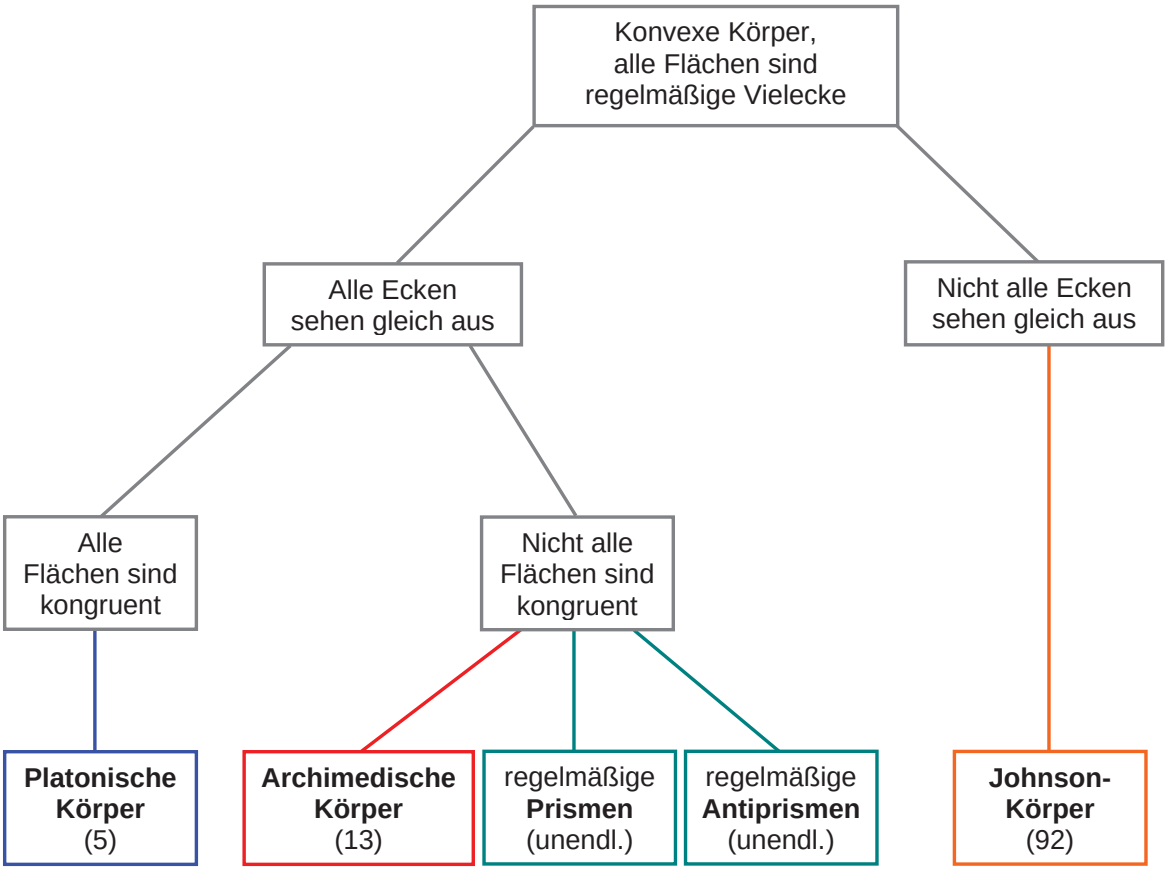
Holden, A. (1991). Shapes, Space, and Symmetry. New York: Dover.

Hume, A. (1986). Exact Descriptions of Regular and Semi-Regular Polyhedra and Their Duals. Computer Science Technical Report 130. Murray Hill, NJ: AT&T.

Johnson, N. W. (1966). Convex Polyhedra with Regular Faces. Canad. J. Math. 18, S. 169–200.

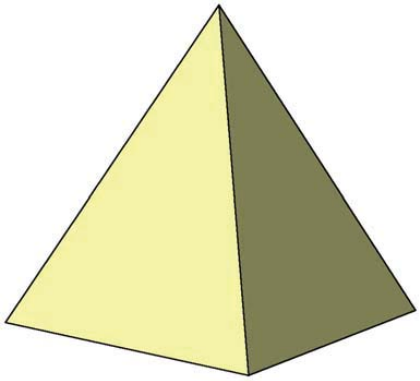
Zalgaller, V. (1969). Convex Polyhedra with Regular Faces. New York: Consultants Bureau.

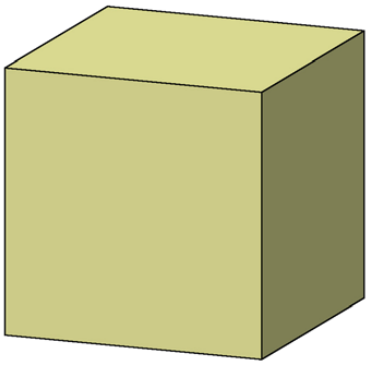
Überblick über die konvexen Körper aus regelmäßigen n-Ecken



Präzisierung:

Zwei Ecken **sehen gleich aus** (sind **kongruent**), wenn die eine Ecke durch Symmetrieabbildungen des Körpers in die andere überführt werden kann.

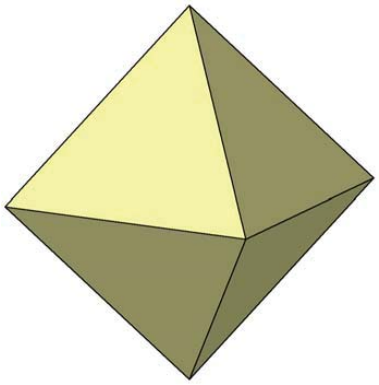


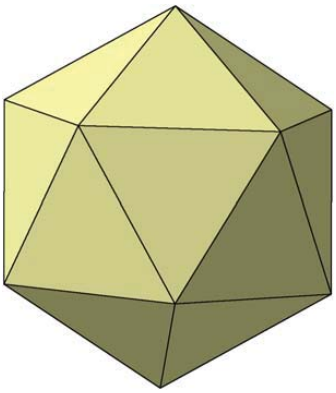


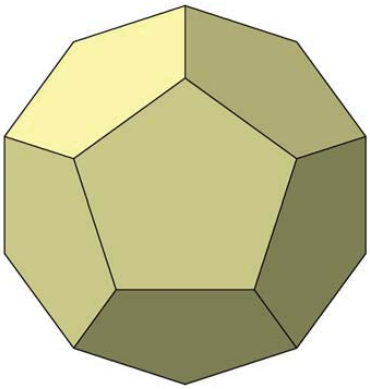
1. Die Platonischen Körper
(Die regulären Polyeder)

- Jede Fläche ist ein reguläres Vieleck.
- Alle Flächen sind kongruent.
- Alle Ecken sind kongruent.

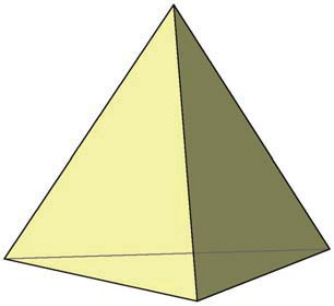
Körper	Flächenform	Ecken-zahl	Flächen-zahl	Kanten-zahl
Tetraeder	Dreiecke	4	4	6
Hexaeder	Quadrate	8	6	12
Oktaeder	Dreiecke	6	8	12
Dodekaeder	Fünfecke	20	12	30
Ikosaeder	Dreiecke	12	20	30

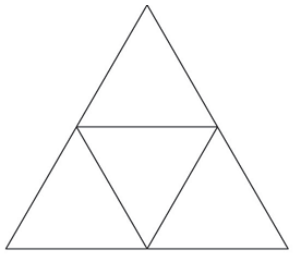




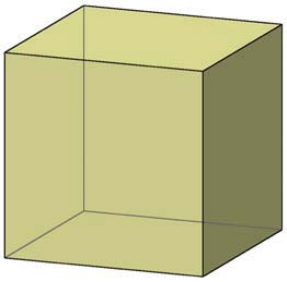


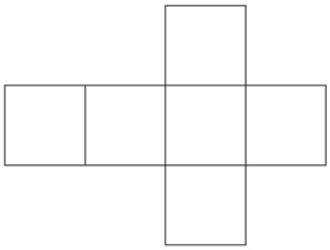
das **Tetraeder**
(»Vierflächner«)



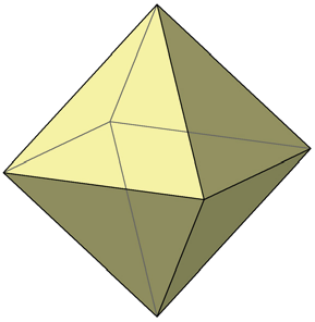


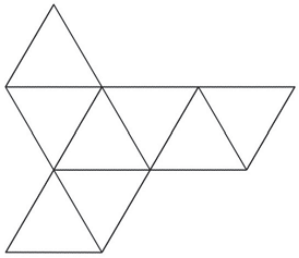
das **Hexaeder**
(»Sechsflächner«)
der Würfel



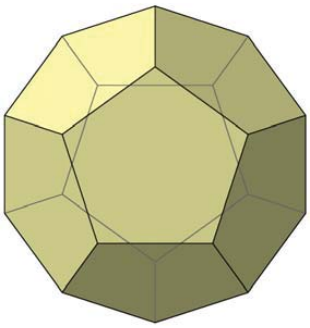


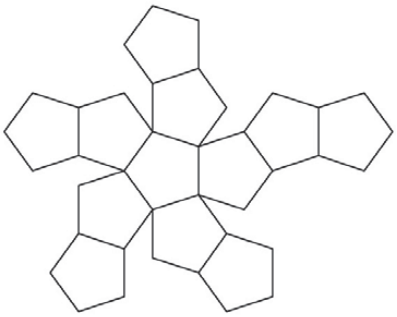
das **Oktaeder**
(»Achtflächner«)



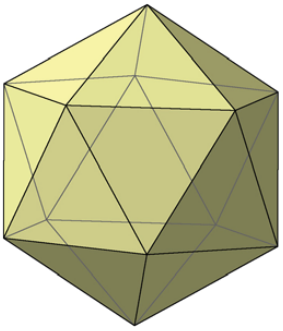


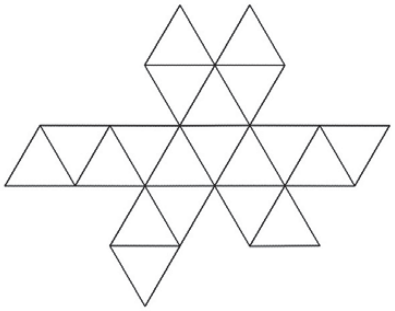
das **Dodekaeder**
(»Zwölfflächner«)





das **Ikosaeder**
(»Zwanzigflächner«)

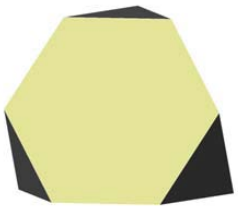




2. Die archimedischen Körper
(Die halbregulären Polyeder)

hier geordnet nach zunehmender Rundheit (Kugelähnlichkeit, »Sphärizi-

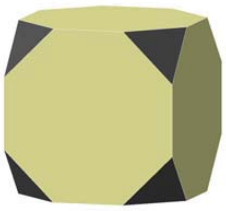
- Jede Fläche ist ein reguläres Vieleck.
- Nicht alle Flächen sind kongruent.
- Alle Ecken sind kongruent.



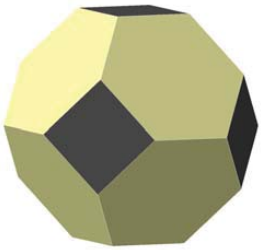
Tetraeder-Stumpf



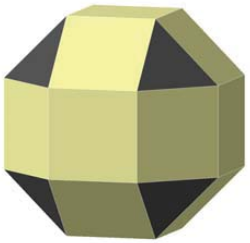
Kuboktaeder



Würfel-Stumpf



Oktaeder-Stumpf



Rhombenkuboktaeder



abgeschrägter Würfel
(Cubus simus)



Ikosidodekaeder



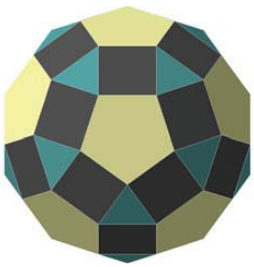
Dodekaeder-Stumpf



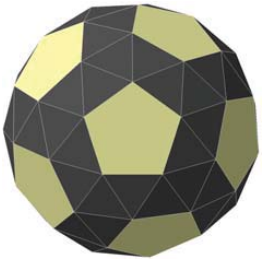
Kuboktaeder-Stumpf



Ikosaeder-Stumpf
(Fußball-Polyeder)



Rhombenikosidodekaeder

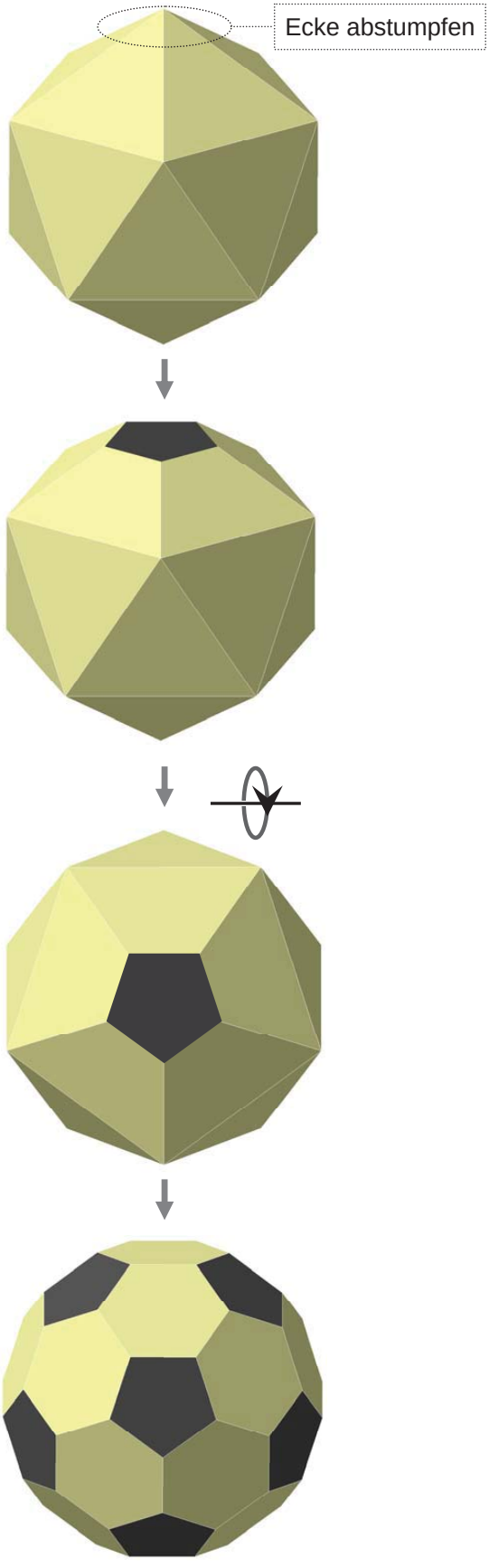


abgeschrägtes Dodekaeder
(Dodecaedron simum)



Ikosidodekaeder-Stumpf

Johannes Kepler hat entdeckt, dass man alle archimedischen Körper ganz einfach aus platonischen Körpern herstellen kann. Und zwar, indem man die Ecken (manchmal auch Kanten) geschickt abschneidet.



Abstumpfen eines Polyeders:

alle Ecken so abschneiden, dass

- die Schnittfiguren regelmäßige Vielecke sind,
- deren Kanten genauso lang sind wie die Reste der alten Kanten (d.h. sämtliche Kanten des neuen Polyeders werden gleich lang).

Aus jeder Ecke vom Grad n entsteht so ein regelmäßiges n-Eck.

Ist eine alte Fläche ein k-Eck, so entsteht daraus aus jeder seiner k Ecken eine neue Kante; aus dem k-Eck entsteht also ein $2k$-Eck.

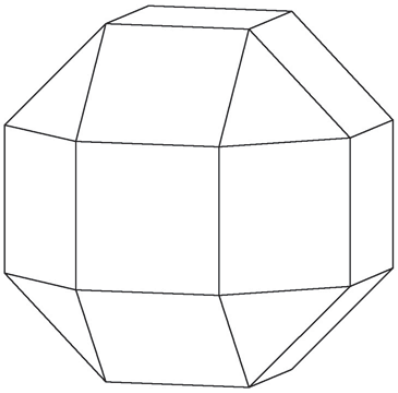
Sind alle Flächen des Ausgangspolyeders regelmäßige Vielecke, dann auch alle Flächen des abgestumpften Polyeders.

Rechts sehen Sie, wie aus dem Ikosaeder der Ikosaeder-Stumpf (das Fußball-Polyeder) hergestellt wird.

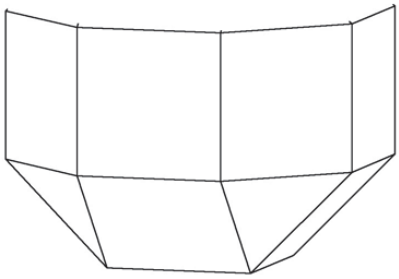
Die entsprechende Darstellung für alle archimedischen Körper finden Sie ab Seite 61.

Der 14. archimedische Körper?

Aus dem Rhombenkuboktaeder kann man durch eine einfache Operation ein Polyeder herstellen, das ebenfalls konvex ist und aus lauter regelmäßigen *n*-Ecken gebildet wird. Wegen der Ähnlichkeit nennt man es **Pseudo-Rhombenkuboktaeder.** Wie sieht es aus? Zeichnen Sie.



Rhombenkuboktaeder



Pseudo-Rhombenkuboktaeder

Das Pseudo-Rhombenkuboktaeder wird auch »Miller's Solid« (Millers Körper) genannt. J.C.P. Miller war wohl der erste, der über die Herstellung dieses Polyeders etwas veröffentlicht hat (1930). Aber ob das Phänomen wirklich niemand vor ihm entdeckt hat? – Der Körper ist übrigens in diesem Skriptum abgebildet, wo?

Problem

Handelt es sich hierbei um einen »übersehenen« archimedischen Körper? Die Antwort hängt davon ab, wie wir die Kongruenz von Ecken definiert haben (S. 56). Unterscheiden Sie globale und lokale Kongruenz:

- Der ganze Körper sieht von jeder Ecke aus gleich aus (alle Ecken sind **global kongruent**; dies ist unsere Definition).
- Die Ecken sehen nur in ihrer näheren Umgebung alle gleich aus (alle Ecken sind **lokal kongruent**).

Lokale Kongruenz können wir uns anschaulich so vorstellen: Wenn mal eine Ecke abbricht, dann können wir eine beliebige andere dafür an dieser Stelle ersatzweise einkleben, ohne dass man die Reparatur anschließend erkennen kann. Wer das unter Eckenkongruenz versteht, sieht das Pseudo-Rhombenkuboktaeder tatsächlich als 14. archimedische Körper. Wir aber nicht: Das Pseudo-Rhombenkuboktaeder entsteht ja aus dem Rhombenkuboktaeder durch eine Drehung der oberen »Kappe«. Danach gibt es, was es vorher nicht gab, nämlich zwei Sorten von Ecken. Die einen liegen an einem »Gürtel« aus 8 Quadraten, die anderen nicht. Es ist unmöglich, den Körper so auf sich selbst abzubilden, dass eine Nicht-Gürtel-Ecke nach der Bewegung plötzlich doch an dem Gürtel liegt. Beide Eckentypen sind zwar lokal kongruent, nicht jedoch global kongruent. Fazit: Kein archimedischer, sondern ein Johnson- Körper! (Finden Sie ihn dort?)

Die Kepler-Konstruktion der archimedischen Körper

Wie Sie beim Fußball-Polyeder bereits gesehen haben, kann man jeden archimedischen Körper aus einem platonischen Körper durch **Abstumpfen** (Abschneiden von Ecken oder Kanten) herstellen. Diese Methode wird nach ihrem Entdecker **Johannes Kepler (1571–1630)** als Kepler-Konstruktion bezeichnet.

Trainieren Sie die »Marzipan-Vorstellung«

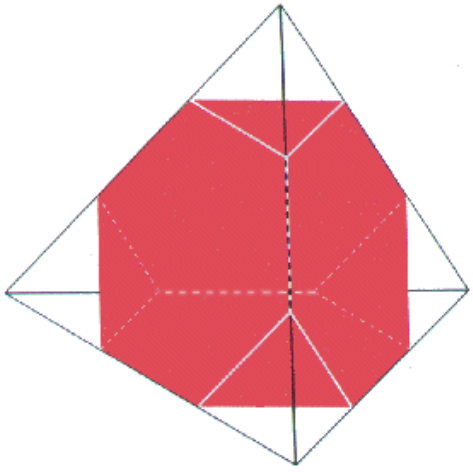
Vollziehen Sie durch **vorgestelltes Handeln** für jeden archimedischen Körper die Kepler-Konstruktion **Schritt für Schritt** nach: Schneiden Sie von einem platonischen **Marzipan-Körper** Ecken (ggf. auch Kanten) ab, bis Sie den archimedischen Körper **vor sich sehen**. Bei einigen fällt das leicht, bei einigen schwer.

Vorgestelltes Handeln – Wie und warum?

Sie sollten dabei unbedingt **die tatsächlichen Bewegungsabläufe vorspielen**. Nehmen Sie einen vorgestellten Körper in die Hand und führen Sie an ihm die Schneidbewegungen wirklich aus.

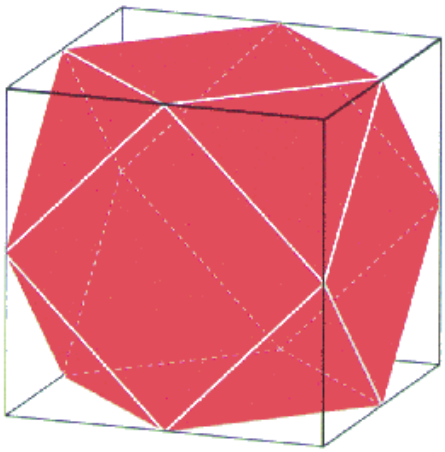
Sie werden erleben, dass Sie auf diese Weise einen deutlichen **Erkenntnisgewinn** erzielen. Durch **konkrete Handlungssimulation** (enaktive Repräsentation) können Sie mathematische Zusammenhänge weitaus besser verstehen als durch bloßes Verbalisieren (symbolische Repräsentation), die Abbildungen auf diesen Seiten dienen Ihnen dabei als Handlungsvorlage (ikonische Repräsentation). Generell gilt: **Prozessualisieren macht aus statischem Wissen (Gedächtniswissen) dynamisches Wissen (Handlungswissen).**

abgestumpftes Tetraeder:
Tetrader-Stumpf



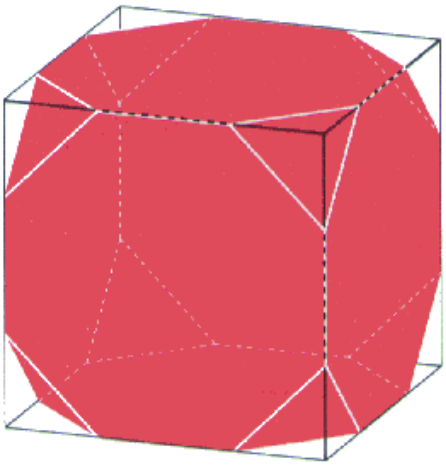
4 Dreiecke / 4 Sechsecke
8 Flächen
12 Ecken
18 Kanten

abgestumpfter Würfel 1:
Kuboktaeder



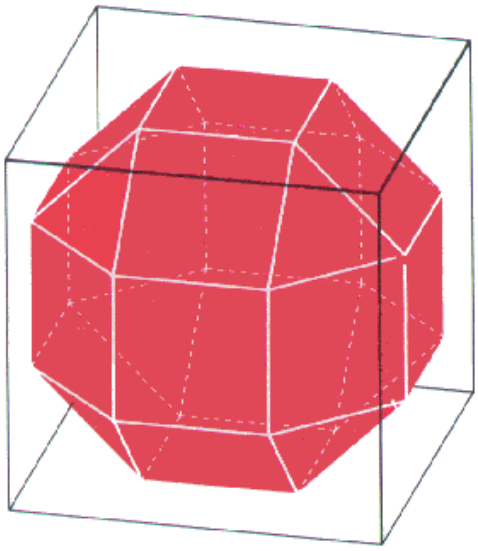
8 Dreiecke / 6 Quadrate
14 Flächen
12 Ecken
24 Kanten

abgestumpfter Würfel 2:
Würfel-Stumpf



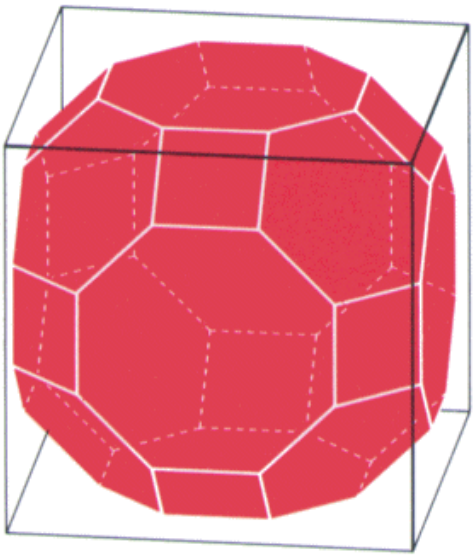
8 Dreiecke / 6 Achtecke
14 Flächen
24 Ecken
36 Kanten

abgestumpfter Würfel 3:
Rhombenkuboktaeder



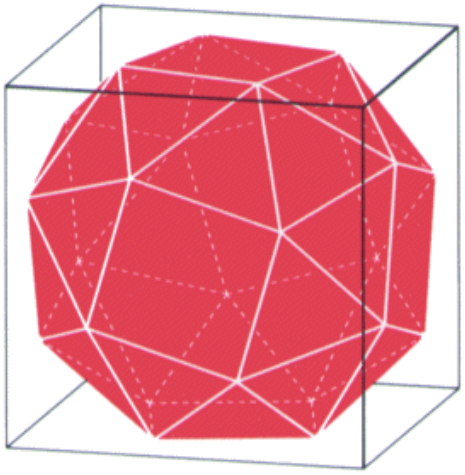
8 Dreiecke / 18 Quadrate
26 Flächen
24 Ecken
48 Kanten

abgestumpfter Würfel 4:
Kuboktaeder-Stumpf



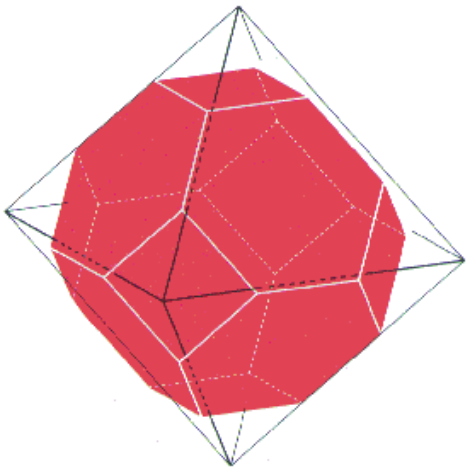
12 Quadrate / 8 Sechsecke / 6 Achtecke
26 Flächen
48 Ecken
72 Kanten

abgestumpfter Würfel 5:
abgeschrägter Würfel
(Cubus simus)



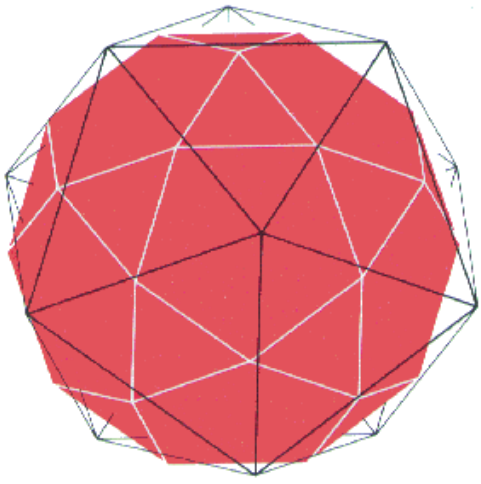
32 Dreiecke / 6 Quadrate
38 Flächen
24 Ecken
60 Kanten

abgestumpftes Oktaeder:
Oktaeder-Stumpf



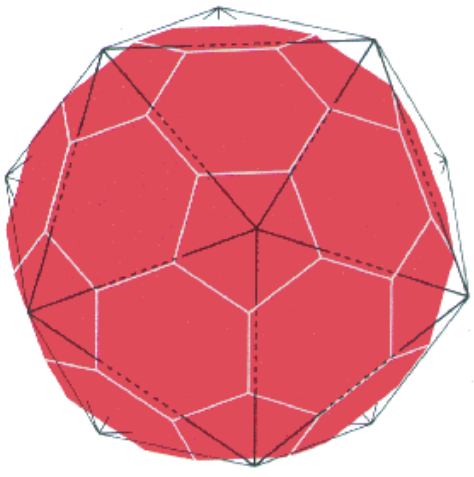
6 Quadrate / 8 Sechsecke
14 Flächen
24 Ecken
36 Kanten

abgestumpftes Ikosaeder 1:
Ikosidodekaeder



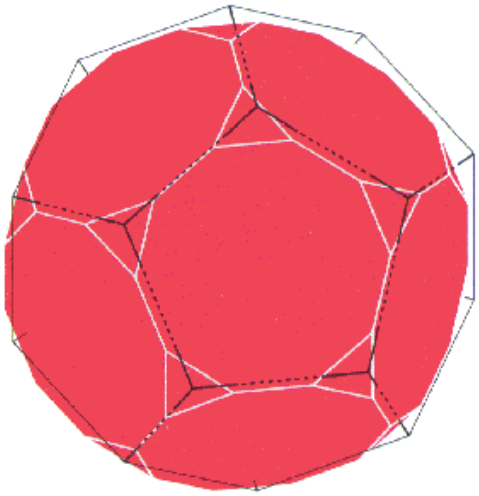
20 Dreiecke / 12 Fünfecke
32 Flächen
30 Ecken
60 Kanten

abgestumpftes Ikosaeder 2:
Ikosaeder-Stumpf
(Fußball-Polyeder)



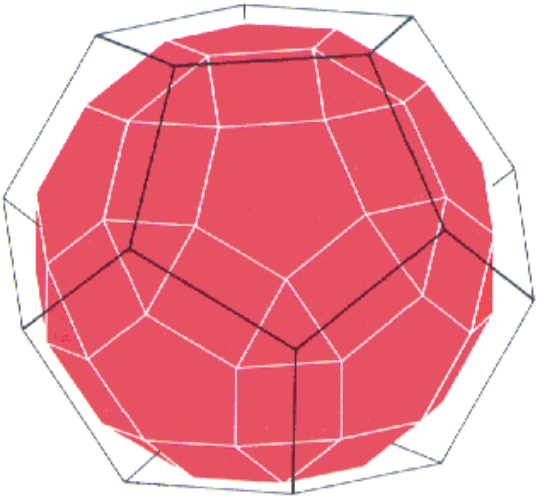
12 Fünfecke / 20 Sechsecke
32 Flächen
60 Ecken
90 Kanten

abgestumpftes Dodekaeder 1:
Dodekaeder-Stumpf



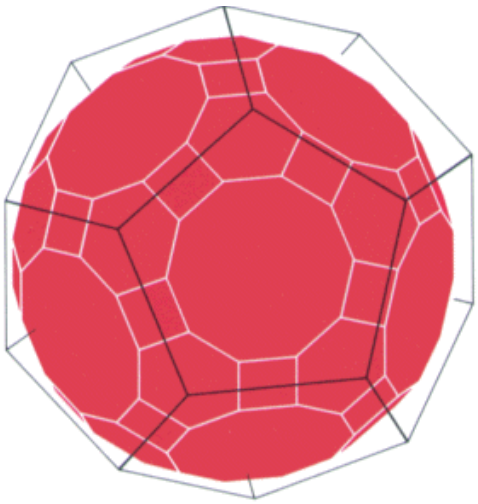
20 Dreiecke / 12 Zehnecke
32 Flächen
60 Ecken
90 Kanten

abgestumpftes Dodekaeder 2:
Rhombenikosidodekaeder



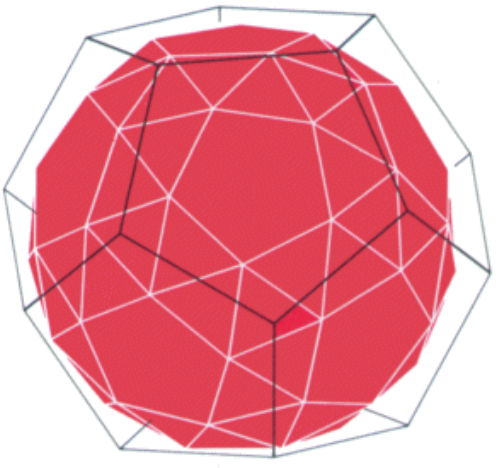
20 Dreiecke / 30 Quadrate / 12 Fünfecke
62 Flächen
60 Ecken
120 Kanten

abgestumpftes Dodekaeder 3:
Ikosidodekaeder-Stumpf



30 Quadrate / 20 Sechsecke / 12 Zehnecke
62 Flächen
120 Ecken
180 Kanten

abgestumpftes Dodekaeder 4:
abgeschrägtes Dodekaeder
(Dodecaedron simum)

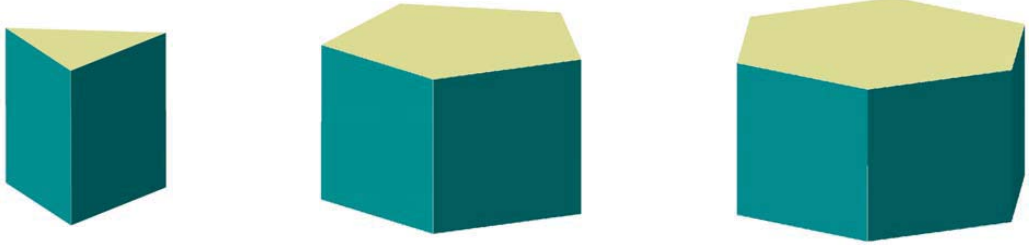


80 Dreiecke / 12 Fünfecke
92 Flächen
60 Ecken
150 Kanten

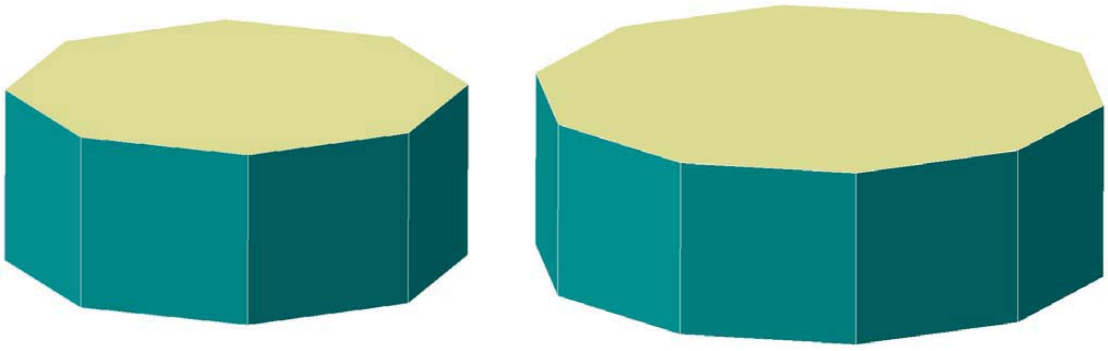
3. Die regelmäßigen Prismen und Antiprismen

Ein Prisma oder Antiprisma heißt **regelmäßig**, wenn es von lauter regelmäßigen Vielecken gebildet wird. **Regelmäßige Prismen** bestehen also aus zwei parallelen kongruenten regelmäßigen n-Ecken (Grund- und Deckfläche), die durch n Quadrate miteinander verbunden sind. Alle Kantenlängen sind gleich. Es gibt unendlich viele regelmäßige Prismen.

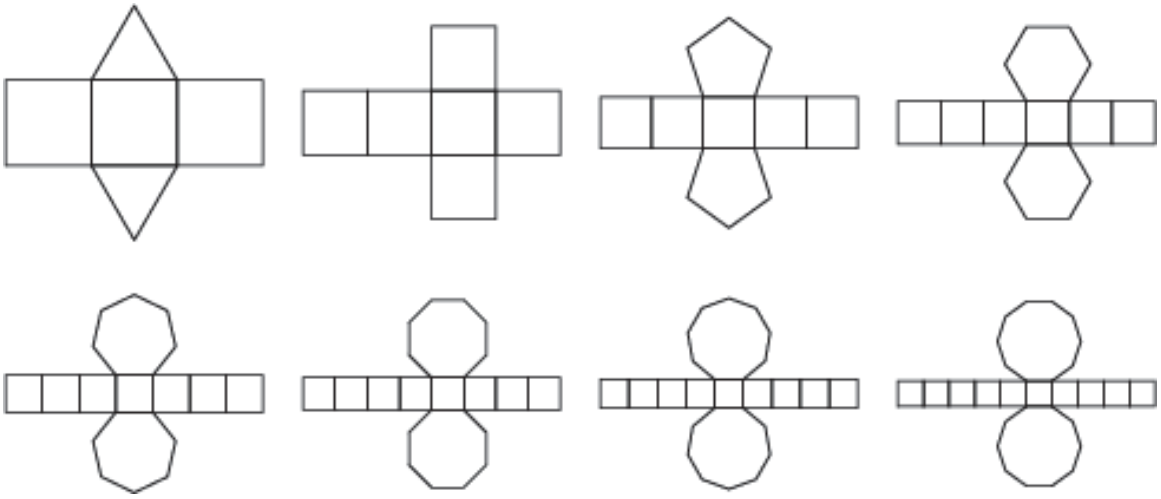
n = 3 n = 5 n = 6



n = 8 n = 10



Netze der regelmäßigen **Prismen** für n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

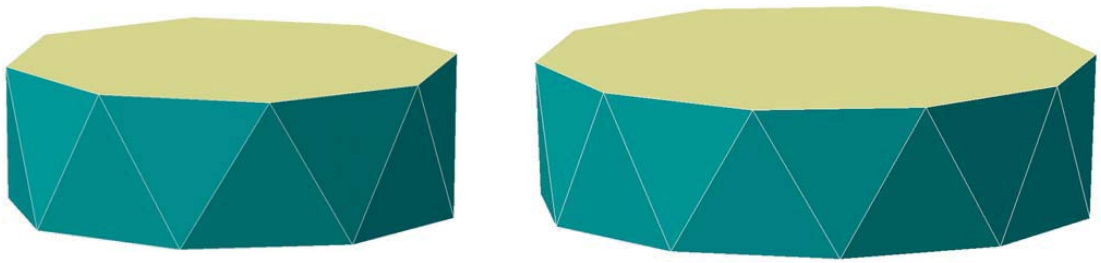


Regelmäßige Antiprismen bestehen aus zwei parallelen kongruenten regelmäßigen n-Ecken (als Grund- und Deckfläche), die um 180° / n gegeneinander verdreht sind und durch n regelmäßige Dreiecke »von oben« und ebenso viele Dreiecke »von unten« miteinander verbunden sind. Alle Kantenlängen sind gleich. Es gibt unendlich viele regelmäßige Antiprismen.

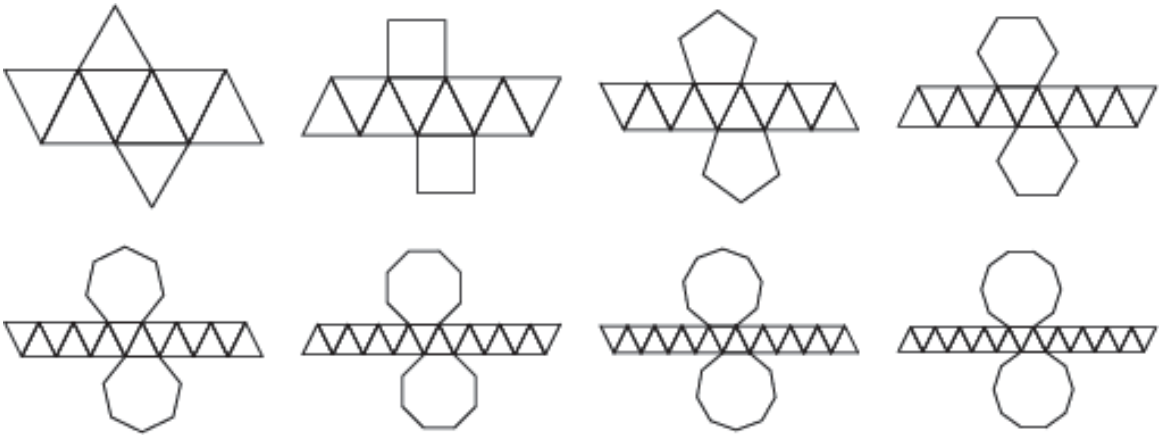
n = 4 n = 5 n = 6



n = 8 n = 10



Netze der regelmäßigen **Antiprismen** für n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10



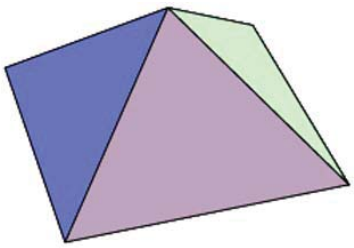
Problem

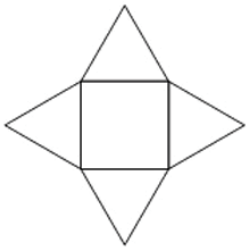
Gibt es Prismen oder Antiprismen, die zugleich platonische oder archimedische Körper sind?

ja. Das Prisma der Ordnung 4 ist ein Würfel,
das Antiprisma der Ordnung 3 ist ein Oktaeder.

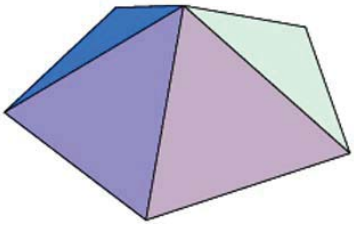
4. Die 92 Johnson-Körper

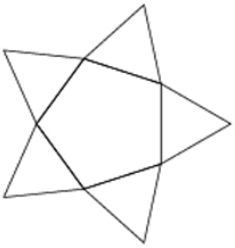
J1. Quadratische Pyramide



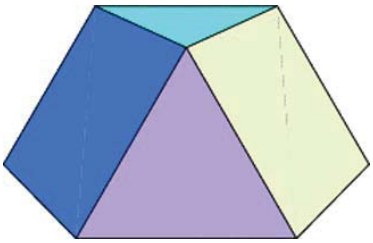


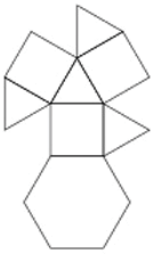
J2. Fünfeckige Pyramide



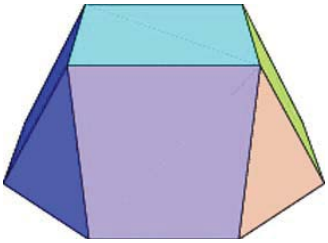


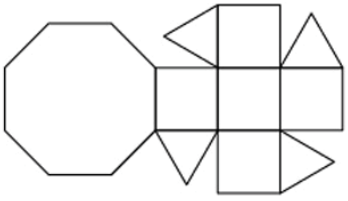
J3. Dreieckige Kuppel



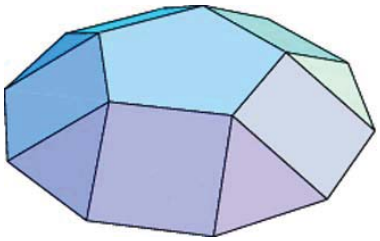


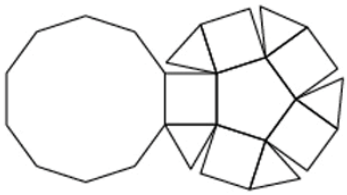
J4. Quadratische Kuppel



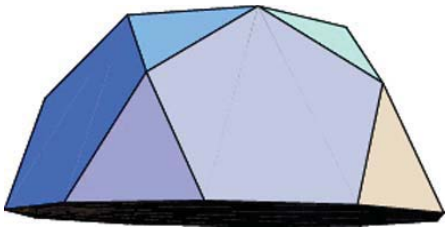


J5. Fünfeckige Kuppel



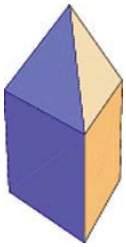


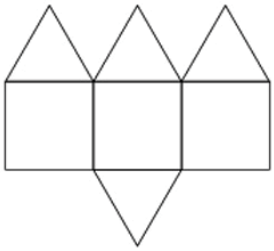
J6. Fünfeckige Rotunde



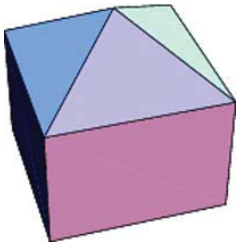


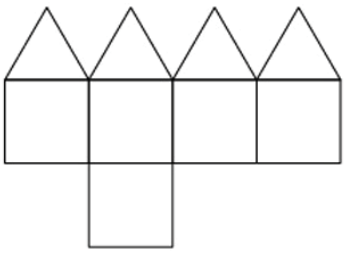
J7. Verlängerte dreieckige Pyramide



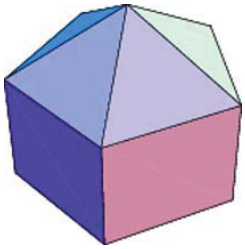


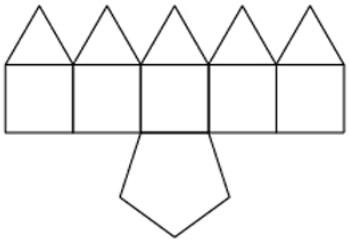
J8. Verlängerte quadratische Pyramide



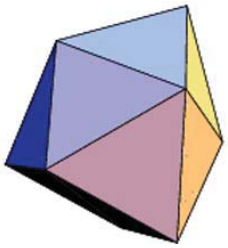


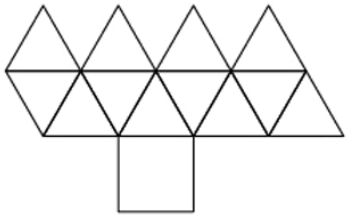
J9. Verlängerte fünfeckige Pyramide



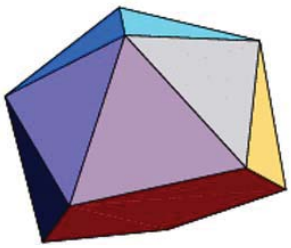


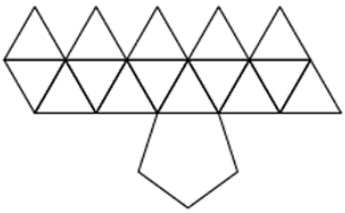
J10. Drehverlängerte quadratische Pyramide





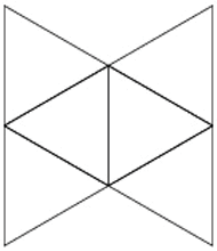
J11. Drehverlängerte fünfeckige Pyramide



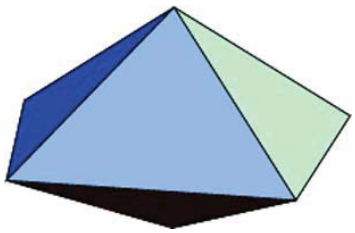


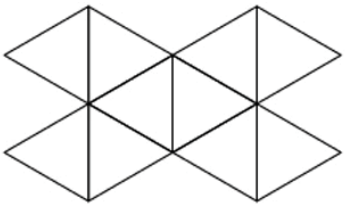
J12. Dreieckige Doppelpyramide



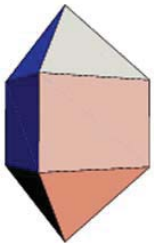


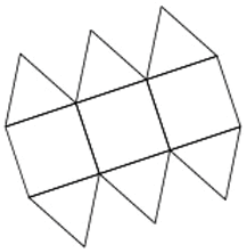
J13. Fünfeckige Doppelpyramide



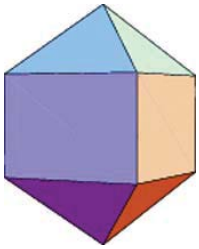


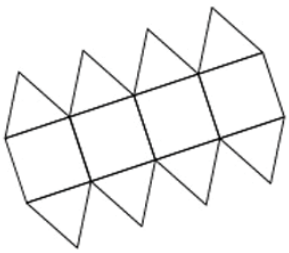
J14. Verlängerte dreieckige Doppelpyramide



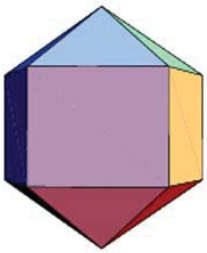


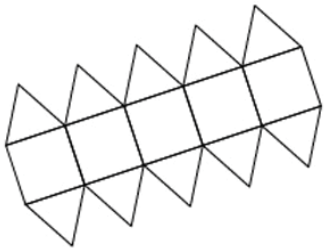
J15. Verlängerte quadratische Doppelpyramide



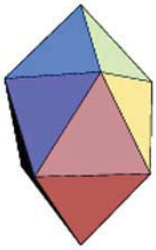


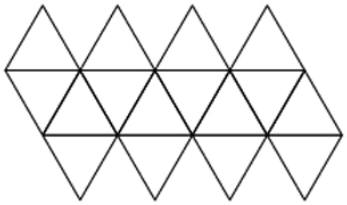
J16. Verlängerte fünfeckige Doppelpyramide



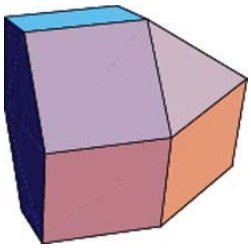


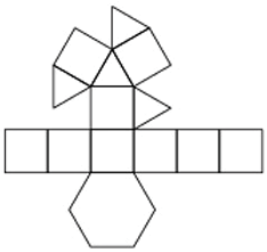
J17. Drehverlängerte quadratische Doppelpyramide



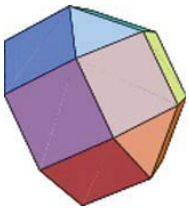


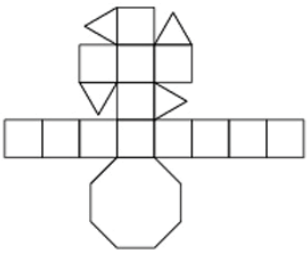
J18. Verlängerte dreieckige Kuppel



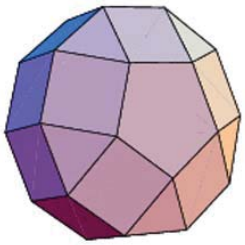


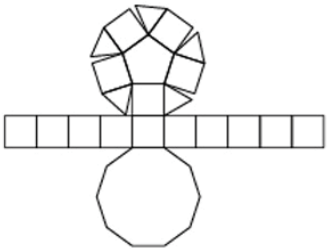
J19. Verlängerte quadratische Kuppel



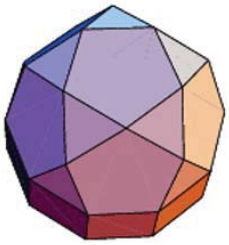


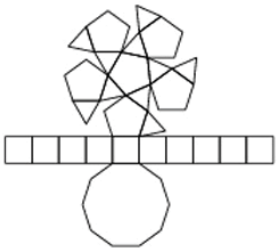
J20. Verlängerte fünfeckige Kuppel



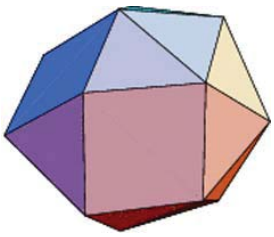


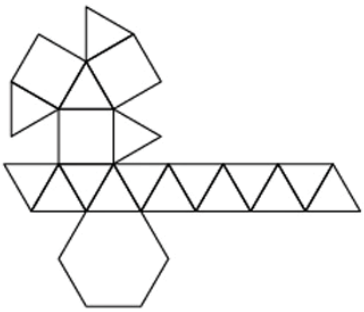
J21. Verlängerte fünfeckige Rotunde





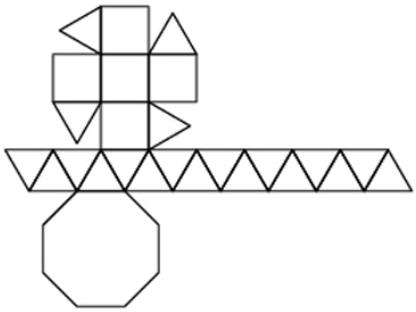
J22. Drehverlängerte dreieckige Kuppel



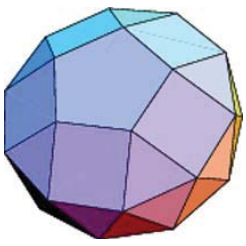


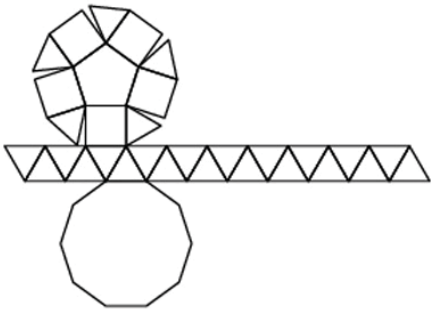
J23. Drehverlängerte quadratische Kuppel



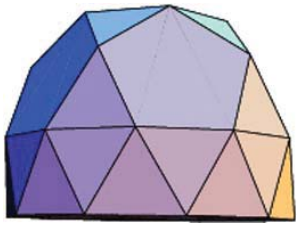


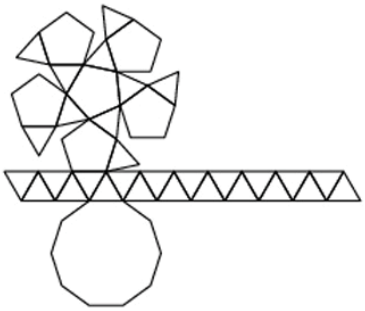
J24. Drehverlängerte fünfeckige Kuppel



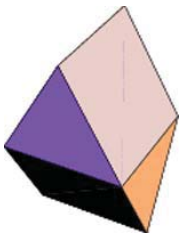


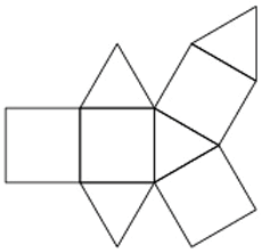
J25. Drehverlängerte fünfeckige Rotunde



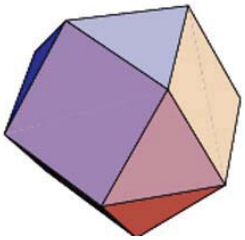


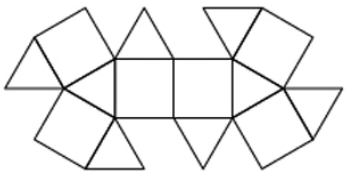
J26. Drehdoppelgiebel (Gyrobifastigium)



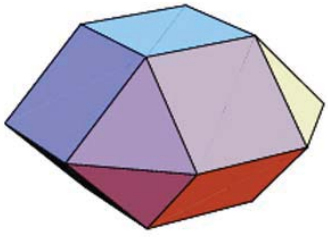


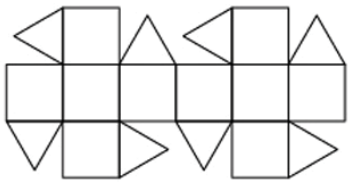
J27. Dreieckige Doppelkuppel



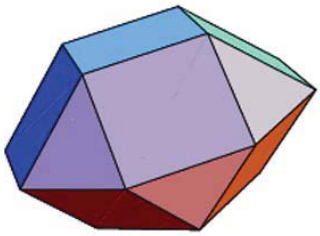


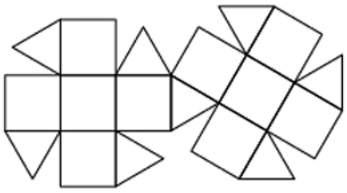
J28. Quadratische Doppelkuppel



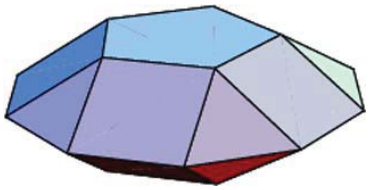


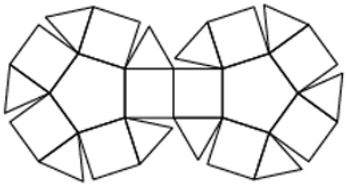
J29. Quadratische Drehdoppelkuppel



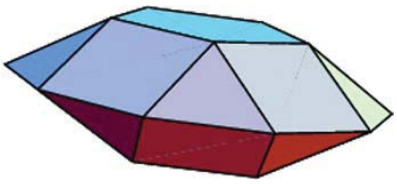


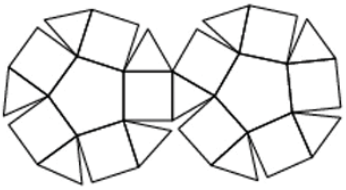
J30. Fünfeckige Doppelkuppel



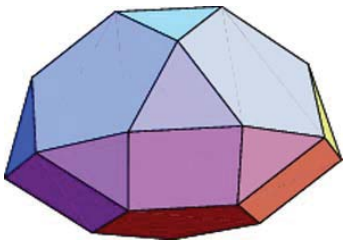


J31. Fünfeckige Drehdoppelkuppel



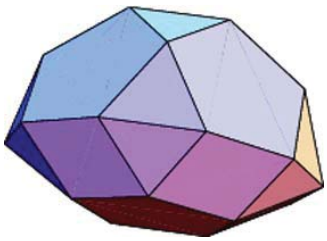


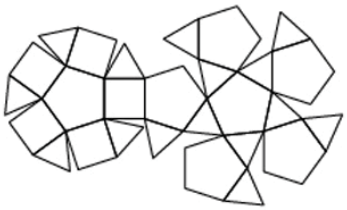
J32. Fünfeckige Kuppelrotunde





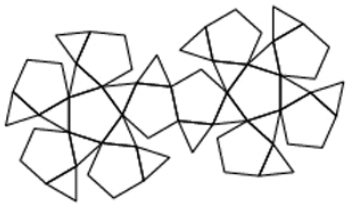
J33. Fünfeckige Drehkuppelrotunde



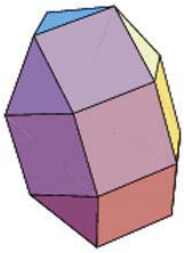


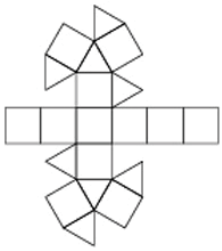
J34. Fünfeckige Doppelrotunde



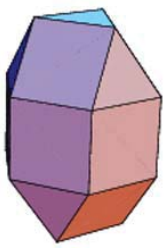


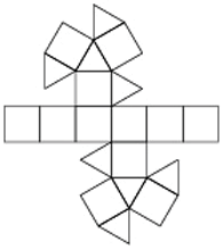
J35. Verlängerte dreieckige Doppelkuppel



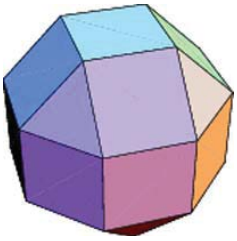


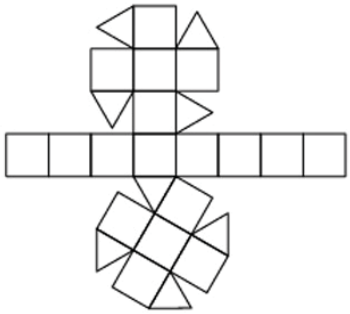
J36. Verlängerte dreieckige Drehdoppelkuppel



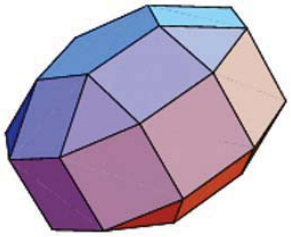


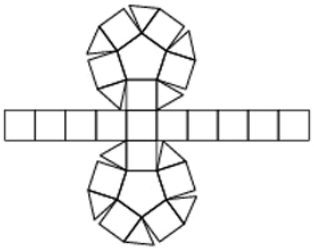
J37. Verlängerte quadratische Drehdoppelkuppel



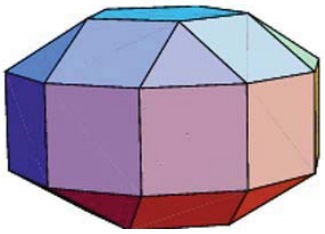


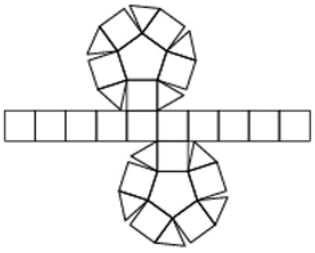
J38. Verlängerte fünfeckige Doppelkuppel



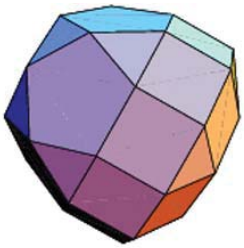


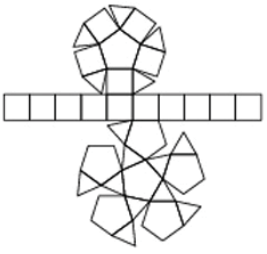
J39. Verlängerte fünfeckige Drehdoppelkuppel



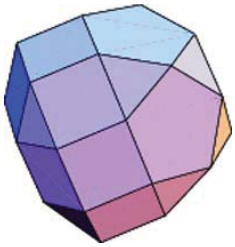


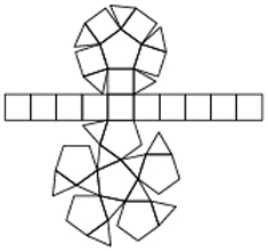
J40. Verlängerte fünfeckige Kuppelrotunde



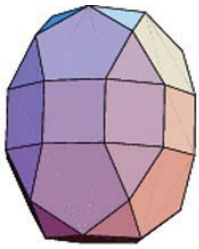


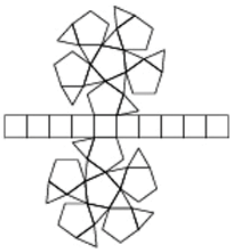
J41. Verlängerte fünfeckige Drehkuppelrotunde



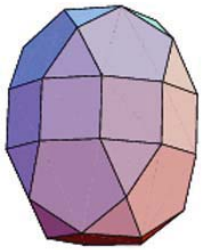


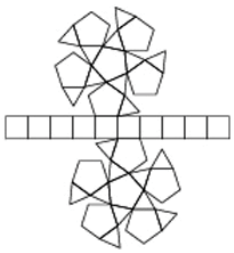
J42. Verlängerte fünfeckige Doppelrotunde



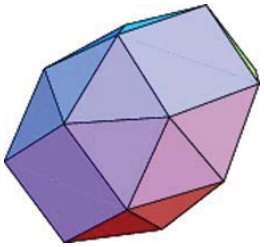


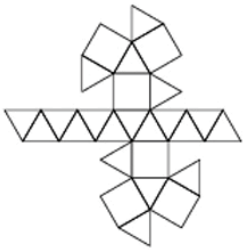
J43. Verlängerte fünfeckige Drehdoppelrotunde





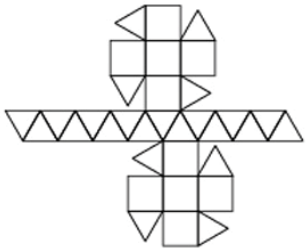
J44. Drehverlängerte dreieckige Doppelkuppel



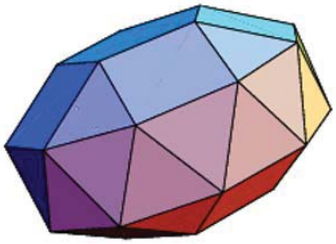


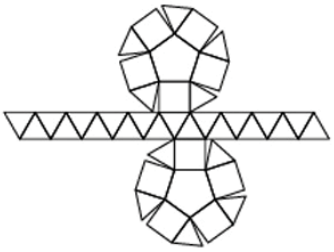
J45. Drehverlängerte quadratische Doppelkuppel





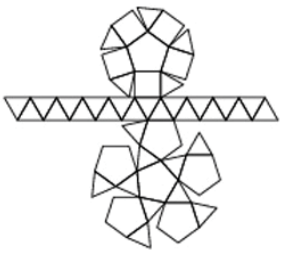
J46. Drehverlängerte fünfeckige Doppelkuppel



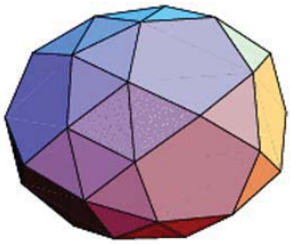


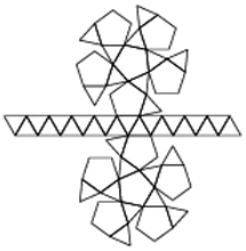
J47. Drehverlängerte fünfeckige Kuppelrotunde



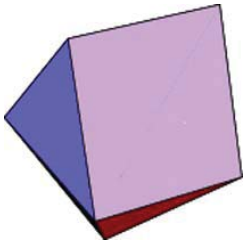


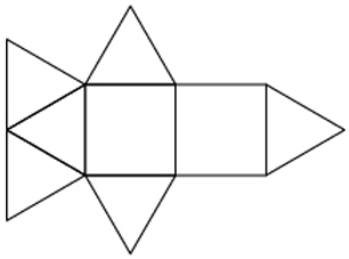
J48. Drehverlängerte fünfeckige Doppelrotunde



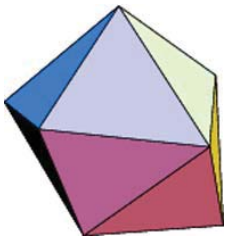


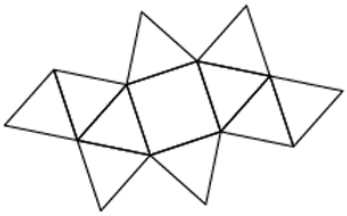
J49. Erweitertes dreieckiges Prisma



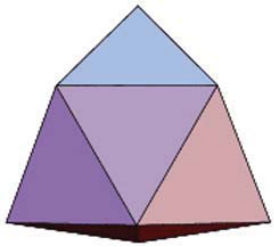


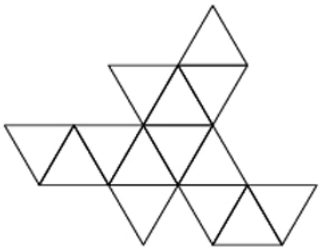
J50. Doppelterweitertes dreieckiges Prisma



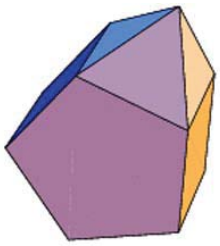


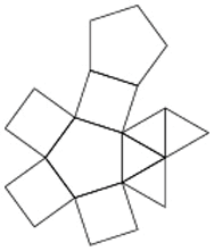
J51. Dreifach erweitertes dreieckiges Prisma



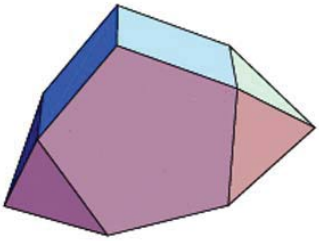


J52. Erweitertes fünfeckiges Prisma



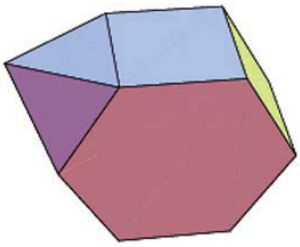


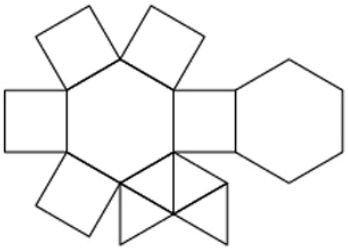
J53. Doppelterweitertes fünfeckiges Prisma



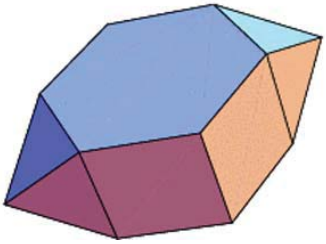


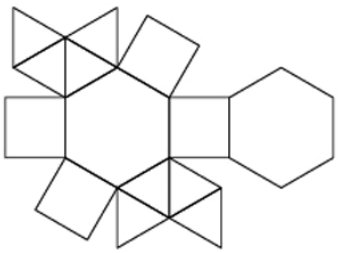
J54. Erweitertes sechseckiges Prisma



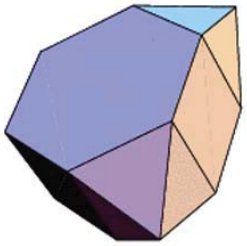


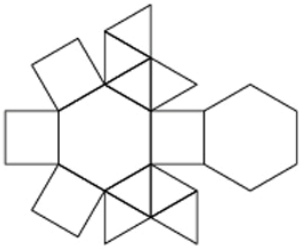
J55. Gegenüber doppelterweitertes sechseckiges Prisma



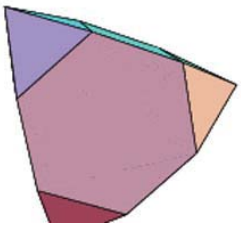


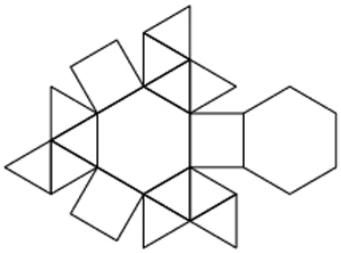
J56. Nebenan doppelterweitertes sechseckiges Prisma



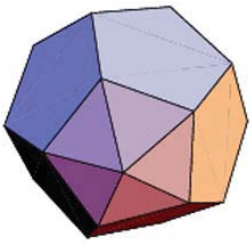


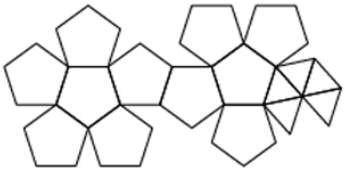
J57. Dreifach erweitertes sechseckiges Prisma





J58. Erweitertes Dodekaeder



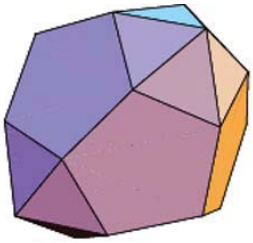


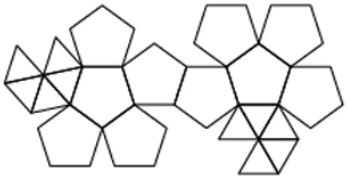
J59. Gegenüber doppelterweitertes Dodekaeder



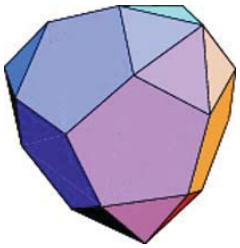


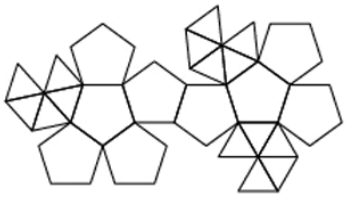
J60. Nebenan doppelterweitertes Dodekaeder



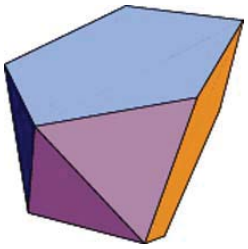


J61. Dreifach erweitertes Dodekaeder



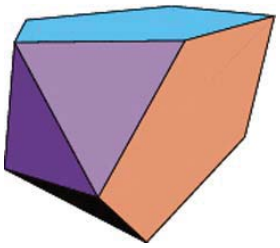


J62. Nebenan doppeltverkleinertes Ikosaeder



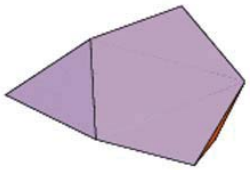


J63. Dreifach verkleinertes Ikosaeder



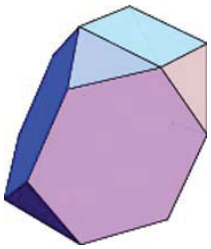


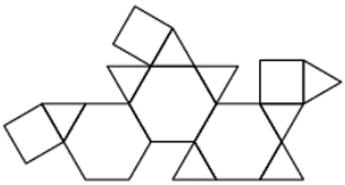
J64. Erweitertes dreifach verkleinertes Ikosaeder



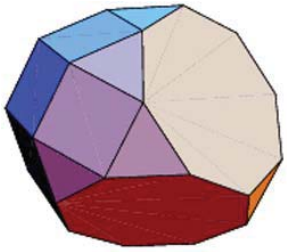


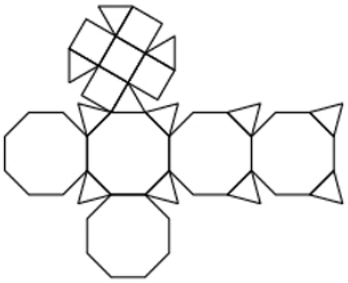
J65. Erweitertes abgeschnittenes Tetraeder



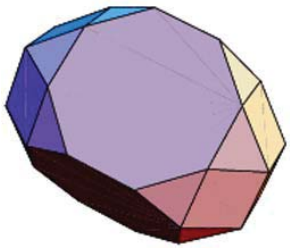


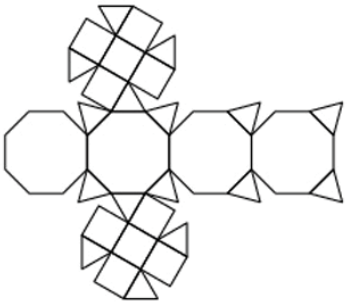
J66. Erweiterter abgeschnittener Würfel



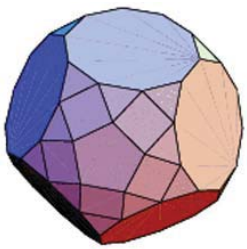


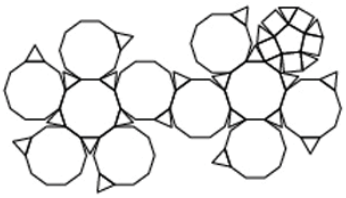
J67. Doppelterweiterter abgeschnittener Würfel



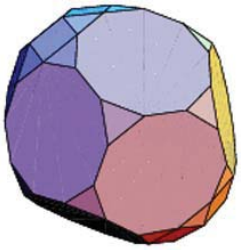


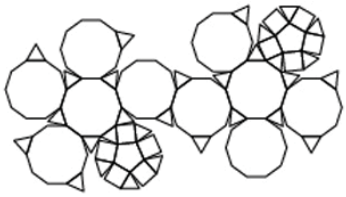
J68. Erweitertes abgeschnittenes Dodekaeder



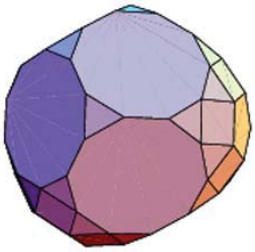


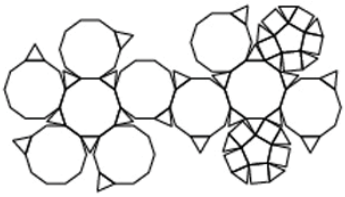
J69. Gegenüber doppelterweitertes abgeschnittenes Dodekaeder





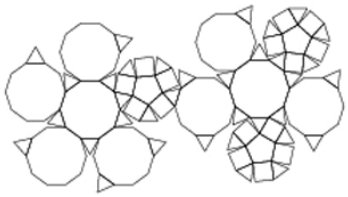
J70. Nebenan doppelterweitertes abgeschnittenes Dodekaeder



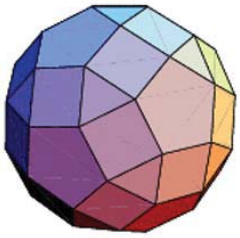


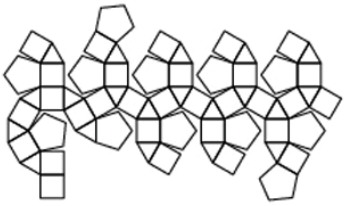
J71. Dreifach erweitertes abgeschnittenes Dodekaeder





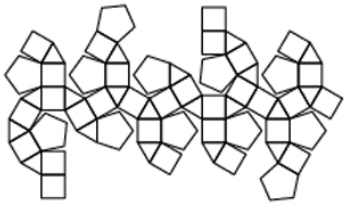
J72. Gedrehtes Rhombenikosidodekaeder



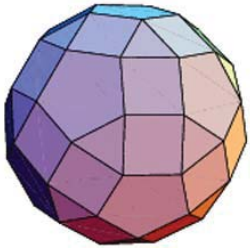


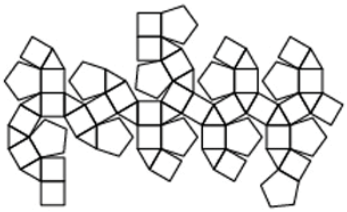
J73. Gegenüber doppeltverdrehtes Rhombenikosidodekaeder



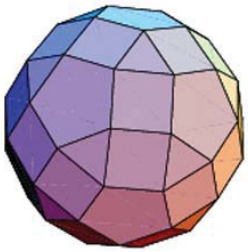


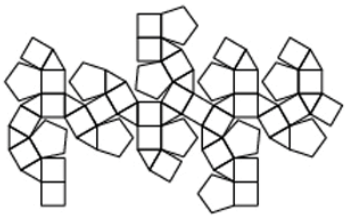
J74. Nebenan doppeltverdrehtes Rhombenikosidodekaeder



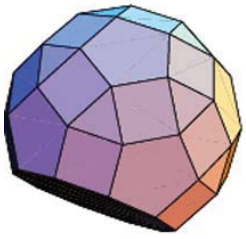


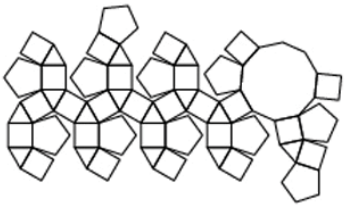
J75. Dreifach verdrehtes Rhombenikosidodekaeder



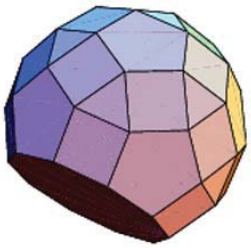


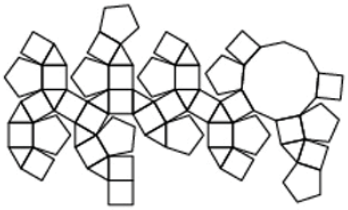
J76. Reduziertes Rhombenikosidodekaeder



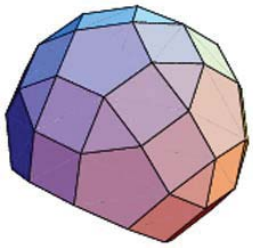


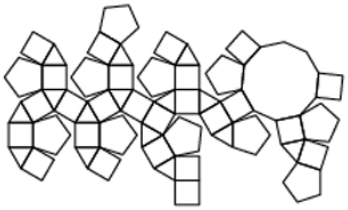
J77. Gegenüber verdrehtes reduziertes Rhombenikosidodekaeder



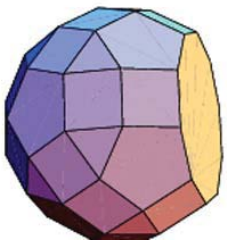


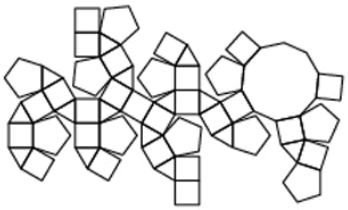
J78. Nebenan verdrehtes reduziertes Rhombenikosidodekaeder





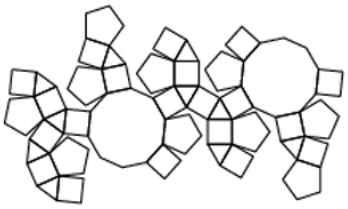
J79. Doppeltverdrehtes reduziertes Rhombenikosidodekaeder



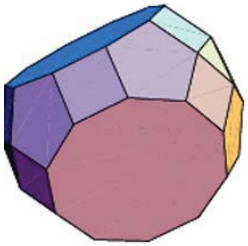


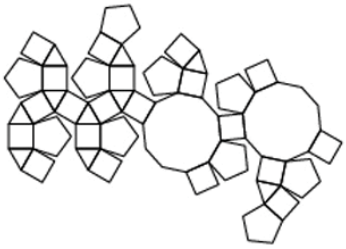
J80. Gegenüber doppeltreduziertes Rhombenikosidodekaeder



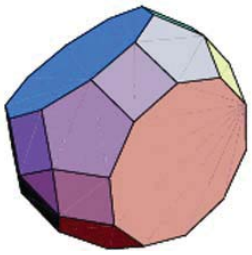


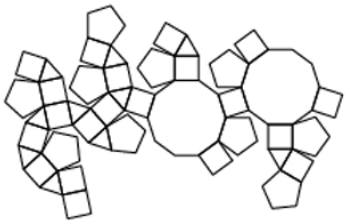
J81. Nebenan doppeltreduziertes Rhombenikosidodekaeder





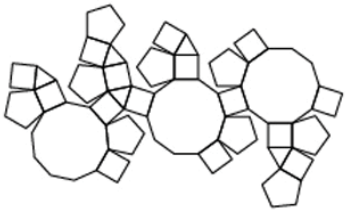
J82. Verdrehtes doppeltreduziertes Rhombenikosidodekaeder



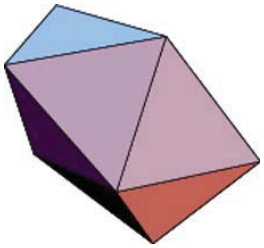


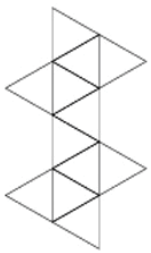
J83. Dreifach reduziertes Rhombenikosidodekaeder



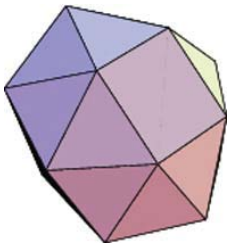


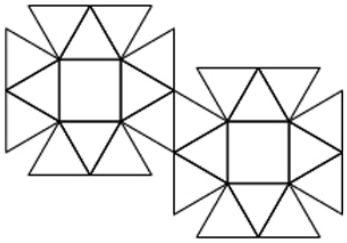
J84. Stumpfer Doppelkeil



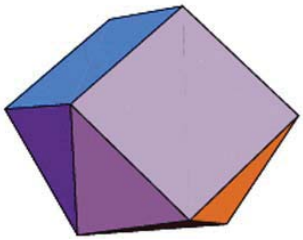


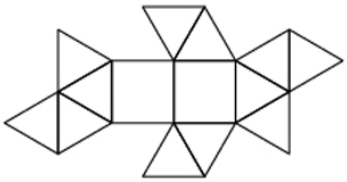
J85. Stumpfes quadratisches Antiprisma



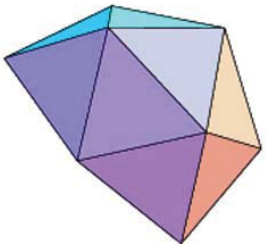


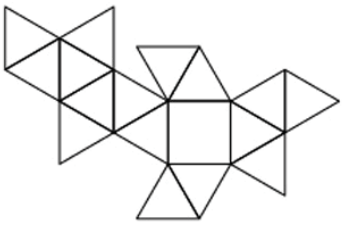
J86. Keilkranz



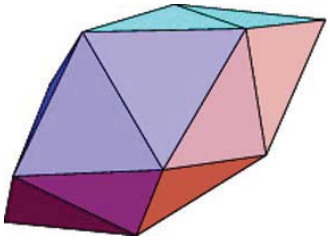


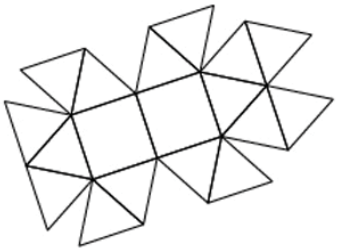
J87. Erweiterter Keilkranz



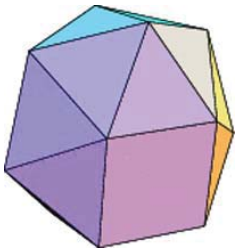


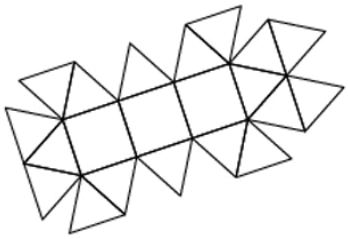
J88. Keilgroßkranz



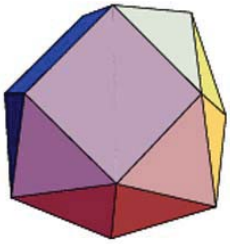


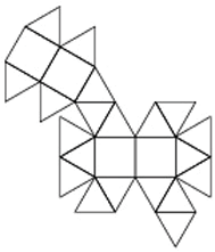
J89. Stumpfer Keilgroßkranz



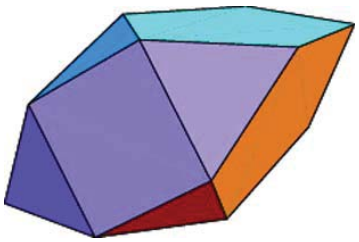


J90. Doppelkeilgürtel



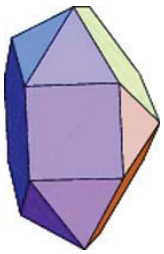


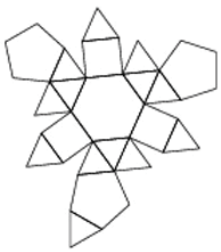
J91. Zweibogen-Doppelrotunde





J92. Dreieckige stumpfe Keilrotunde





Aus wie vielen n-Ecken sind die Johnson-Körper J_n jeweils aufgebaut?

J_n	3-Ecke	4-Ecke	5-Ecke	6-Ecke	8-Ecke	10-Ecke
1	4	1				
2	5		1			
3	4	3		1		
4	4	5			1	
5	5	5	1			1
6	10		6			1
7	4	3				
8	4	5				
9	5	5	1			
10	12	1				
11	15		1			
12	6					
13	10					
14	6	3				
15	8	4				
16	10	5				
17	16					
18	4	9		1		
19	4	13			1	
20	5	15	1			1
21	10	10	6			1
22	16	3		1		
23	20	5			1	
24	25	5	1			1
25	30		6			1
26	4	4				
27	8	6				
28	8	10				
29	8	10				
30	10	10	2			
31	10	10	2			
32	15	5	7			
33	15	5	7			
34	20		12			
35	8	12				
36	8	12				
37	8	18				
38	10	20	2			
39	10	20	2			
40	15	15	7			
41	15	15	7			
42	20	10	12			
43	20	10	12			
44	20	6				
45	24	10				
46	30	10	2			

J_n	3-Ecke	4-Ecke	5-Ecke	6-Ecke	8-Ecke	10-Ecke
47	35	5	7			
48	40		12			
49	6	2				
50	10	1				
51	14					
52	4	4	2			
53	8	3	2			
54	4	5		2		
55	8	4		2		
56	8	4		2		
57	12	3		2		
58	5		11			
59	10		10			
60	10		10			
61	15		9			
62	10		2			
63	5		3			
64	7		3			
65	8	3		3		
66	12	5			5	
67	16	10			4	
68	25	5	1			11
69	30	10	2			10
70	30	10	2			10
71	35	15	3			9
72	20	30	12			
73	20	30	12			
74	20	30	12			
75	20	30	12			
76	15	25	11			1
77	15	25	11			1
78	15	25	11			1
79	15	25	11			1
80	10	20	10			2
81	10	20	10			2
82	10	20	10			2
83	5	15	9			3
84	12					
85	24	2				
86	12	2				
87	16	1				
88	16	2				
89	18	3				
90	20	4				
91	8	2	4			
92	13	3	3	1		

Zahlbezeichnungen nach dem Griechischen

Einige Benennungsweisen in Geometrie und Chemie verstehen Sie besser, wenn Sie die griechischen Zahlen kennen. Daher hier eine Übersicht:

Kardinalzahlpräfixe

deutsch	***griechisch***
ein-	mono-
zwei-	di-
drei-	tri-
vier-	tetra-
fünf-	penta-
sechs-	hexa-
sieben-	hepta-
acht-	okta-
neun-	ennea-
zehn-	deka-
elf-	hendeka-
zwölf-	dodeka-
zwanzig-	ikosa-
dreißig-	triakonta-

Multiplikativa

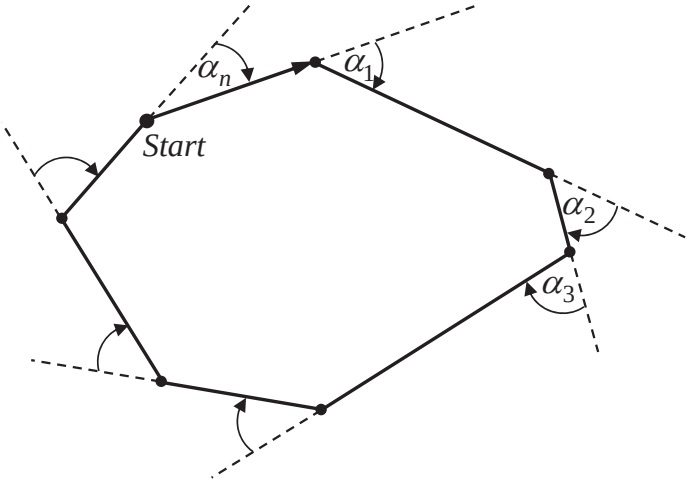
deutsch	***griechisch***
-	-
zweimal	bis
dreimal	tris
viermal	tetrakis
fünfmal	pentakis
sechsmal	hexakis
siebenmal	heptakis
achtmal	oktakis
neunmal	enneakis
zehnmal	dekakis
elfmal	hendekakis
zwölfmal	dodekakis
zwanzigmal	ikosakis
dreißigmal	triakontakis

10 Sätze über Polyeder: Descartes und Euler

Die Formel von Descartes

Stellen Sie sich vor, Sie wollen ein Vieleck (Polygon) zeichnen. (Der Einfachheit halber wollen wir hier nur **konvexe Vielecke** betrachten.) Wenn Sie auf Papier zeichnen, sehen Sie das Vieleck von oben, aus der Vogelperspektive; dies ist die Sicht, an die Sie gewöhnt sind.

Es gibt aber noch eine andere Sicht: Wenn Sie nämlich ein großes Vieleck auf den Schulhof zeichnen, stehen Sie gewissermaßen mittendrin. Nachdem Sie gezeichnet haben, können Sie das Vieleck abschreiten. Dazu starten Sie an einer Ecke, gehen die erste Seite entlang bis zur nächsten Ecke und drehen sich dann, um genau über die nächste Seite weiterzugehen. Das wiederholen Sie von Ecke zu Ecke. Wenn Sie die letzte Seite hinter sich haben, sind Sie zu Ihrer Startecke zurückgekehrt und drehen sich ein letztes Mal, bis Sie wieder genau entlang der ersten Seite schauen. Nun blicken Sie exakt in dieselbe Richtung wie bei Ihrem Start.



Frage: Addieren Sie die einzelnen Winkel, um die Sie sich an den Ecken jeweils gedreht. Um welchen Winkel haben Sie sich insgesamt gedreht? Hängt das Ergebnis davon ab, ob das Vieleck regelmäßig ist? Hängt es von der Eckenzahl ab? Oder von den Seitenlängen? Formulieren Sie einen Satz.

Für jedes konvexe Vieleck gilt:
Die Summe aller Außenwinkel ist stets 360°. Denn wenn man nach allen Einzeldrehungen wieder in dieselbe Richtung blickt wie beim Start, hat man sich beim Umrunden des Vielecks einmal ganz um sich selbst gedreht, also eine Drehung um 360° ausgeführt.
(Dieser Satz ist viel grundlegender und einfacher als der Satz über die Innenwinkelsumme, aber dennoch kennen/beachten ihn viele nicht. Aus ihm lässt sich der Innenwinkelsummensatz im Kopf herleiten.)

Außenwinkelsatz

Die Summe der Außenwinkel eines konvexen Polygons beträgt stets einen Vollwinkel (360°).

(Übrigens: Gilt dieser Satz auch für nichtkonvexe Polygone? Wie definieren Sie z.B. den Außenwinkel zum Innenwinkel 200°, den es in nichtkonvexen Polygonen ja geben kann?)

Wenn Sie Ihr Vieleck abschreiten, wollen Sie eigentlich geradeaus gehen (180°-Winkel), müssen aber an jeder Ecke um einen Winkel davon abweichen. Dieser Winkel »fehlt an 180°«, und wir nennen ihn daher das **Winkeldefizit** dieser Ecke des Vielecks. Wir haben gerade erkannt dass das **Gesamtwinkeldefizit über alle Ecken** in allen konvexen Polygonen stets dasselbe ist: immer ein Vollwinkel.

Wir könnten den Außenwinkelsatz daher auch als Winkeldefizit-Satz ausdrücken:

Winkeldefizit-Satz

Das Gesamtwinkeldefizit eines konvexen Polygons beträgt stets einen Vollwinkel (360°).

Sie kennen den Satz über die Innenwinkelsumme in Vielecken. Die Innenwinkelsumme beträgt in einem n-Eck stets $(n-2)\cdot 180°$. Meist wird das so begründet: Man kann jedes n-Eck in $n-2$ Dreiecke zerlegen (triangulieren); die Winkelsumme des n-Ecks ist dann die Summe der Innenwinkelsummen dieser Dreiecke.

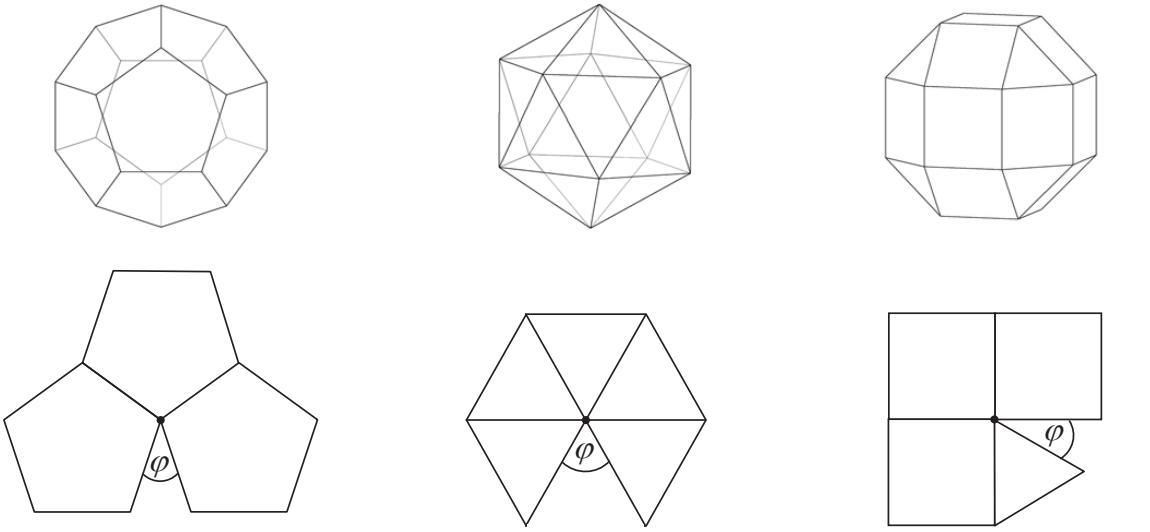
Sie könnten aber ebenso einfach mit dem Winkeldefizitsatz argumentieren. Ein Innenwinkel ist ja stets »180° minus Außenwinkel«. Die Innenwinkelsumme erhalten Sie also auch, wenn Sie n-mal 180° rechnen und davon die Summe aller Außenwinkel, also das Gesamtwinkeldefizit subtrahieren. Nach dem Winkeldefizit-Satz ergibt sich n-mal 180° minus 360° , also $(n-2)\cdot 180°$.

Während die Innenwinkelsumme sich stets mit der Zahl der Ecken des Polygons ändert, nennt der Außenwinkelsatz einen Winkel, der konstant und universell für alle n-Ecke ist. Insofern kann man sagen, dass der Außenwinkelsatz eine grundlegendere, »universellere« Aussage macht als der Innenwinkelsatz. Er ist daher und wegen seiner unmittelbaren Klarheit auch didaktisch der wichtigere Satz.

Was **Polygone** (Vielecke; wörtlich: Viel-Winkler) in der Ebene sind, das sind **Polyeder** (Vielflache; wörtlich: Viel-Flächner) im Raum: Zwei- bzw. dreidimensionale geschlossene Figuren, die von endlichvielen nichtgekrümmten Randstücken begrenzt werden; **Polygone von Seiten** (endliche Stücke von Geraden), **Polyeder von Flächen** (endliche Stücke von Ebenen).

Wenn der Begriff des Winkeldefizits für Polygone so grundlegend und zugleich einfach ist, gibt es dann bei Polyedern vielleicht etwas ähnliches? Kann man mit diesem Begriffs-Werzeug vielleicht sowohl in der zweidimensionalen wie in der dreidimensionalen Geometrie erfolgreich arbeiten?

In der Tat. Als Sie mit dem n-Eck-Baukasten experimentierten, haben Sie Winkeldefizite bereits kennengelernt. Und zwar beim Versuch, aus den n-Eck-Plättchen Raumecken herzustellen. Sie haben erlebt, dass das nur geht, wenn mindestens 3 Flächenstücke zusammenstoßen, und wenn die Stücke, flach auf den Tisch gelegt, eine Lücke lassen. Diese Lücke ist nichts anderes als das Winkeldefizit der entstehenden Ecke.



Dodekaeder

$\varphi = 360° - 3 \cdot 108°$

$= 36°$

Ikosaeder

$\varphi = 360° - 5 \cdot 60°$

$= 60°$

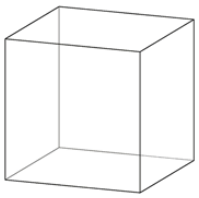
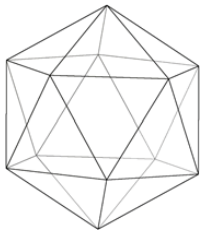
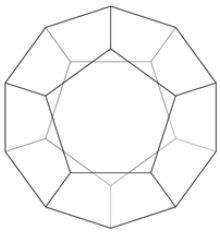
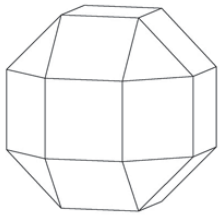
Rhombenkuboktaeder

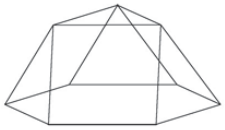
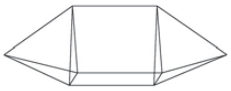
$\varphi = 360° - (3 \cdot 90° + 60°)$

$= 30°$

Winkeldefizite

Die folgende Tabelle zeigt für einige konvexe Polyeder den Zusammenhang von Eckenzahl und Winkeldefizit. Was an diesen Beispielen zu beobachten ist, gilt ganz allgemein für alle konvexen Polyeder.

				
	Würfel	Ikosaeder	Dodekaeder	Rhombenkuboktaeder
Eckenzahl	8	12	20	24
Winkeldefizit	90°	60°	36°	30°
Gesamtwinkeldef.	720°	720°	720°	720°

			
	Ikosaeder-Stumpf	dreieckige Kuppel	verlängerte dreieckige Doppelpyramide
Eckenzahl	60	3 + 6	2 + 6
Winkeldefizit	12°	60° | 90°	180°| 60°
Gesamtwinkeldef.	720°	720°	720°

Formel von Descartes

Das Gesamtwinkeldefizit eines konvexen Polyeders beträgt stets zwei Vollwinkel (720°).

Der Beweis ist für die Schule bei weitem zu schwer. Es empfiehlt sich stattdessen, im Unterricht noch weitere Beispiele von Polyedern zu untersuchen. Dabei sind die Polyeder besonders »rechenfreundlich«, die (wie unsere Beispiele) aus regelmäßigen Vielecken gebildet sind, für die man die Summe der in einer Polyederecke zusammenstoßenden Winkel ja leicht bestimmen kann.

regelmäßiges n-Eck	Dreieck	Viereck	Fünfeck	Sechseck	Achteck	Zehneck
Innenwinkel	60°	90°	108°	120°	135°	144°

Allgemein ist der Innenwinkel des regelmäßigen n-Ecks $=180° - 360°/n$.

Die Eulersche Polyederformel

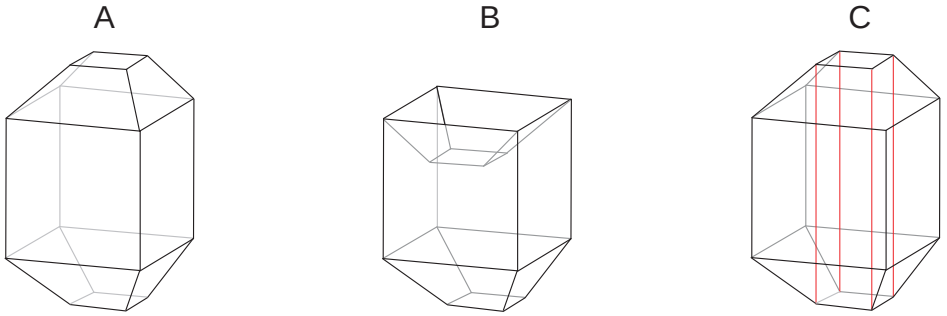
Wenn SchülerInnen an möglichst vielen Beispielen von möglichst verschiedenartig gebauten konvexen Polyedern Eckenzahl, Kantenzahl und Flächenzahl bilanzieren, entdecken sie bald, dass hier immer ein einfacher Zusammenhang besteht:

Polyederformel von Euler

In jedem konvexen Polyeder gilt:

Eckenzahl + Flächenzahl – Kantenzahl = 2.

Auch für nichtkonvexe Polyeder kann die Formel gelten; für solche gilt sie aber eben nicht allgemein. Nichtkonvexe Körper haben stets Dellen oder Löcher (Tunnel) oder beides.

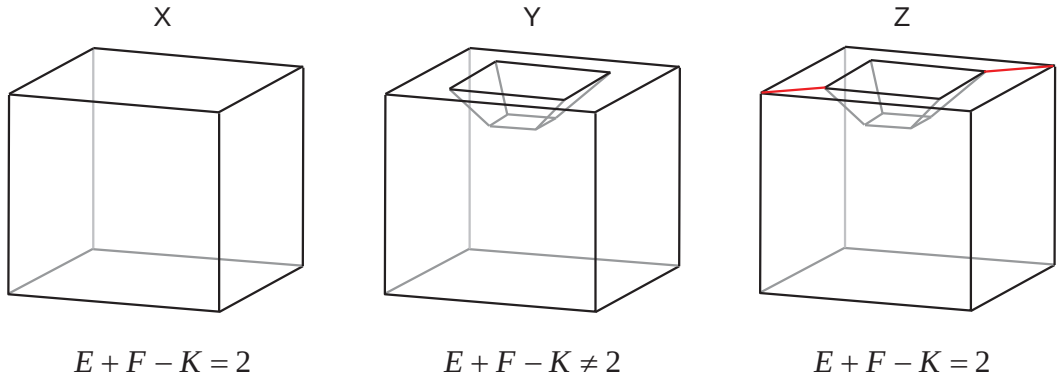


Für A und B gilt die Polyederformel, für C nicht

Zu B: Wenn man bei A das Dach nach innen verlegt, ändern sich Ecken-, Kanten- und Flächenzahl nicht. Da A konvex ist, gilt für A die Polyederformel; wegen der Übereinstimmung der Zahlen gilt sie also auch für B.

Zu C: Wenn man in A einen Tunnel von der Deck- zur Bodenfläche bohrt, wächst die Kantenzahl um 4, die Flächenzahl dagegen nur um 2. Die Differenz $E+F-K$ bleibt also nicht 2, sondern wird zu 0. Die Polyederformel gilt für C also nicht.

Das Beispiel legt die Vermutung nahe, dass für die Polyederformel nicht eigentlich die Voraussetzung wichtig ist, dass das Polyeder *konvex* ist, sondern dass es **keine Löcher (Tunnel)** hat. Die Delle macht B nichtkonvex, und dennoch erfüllt B die Polyederformel. Man überlegt leicht, dass dies für alle nichtkonvexen Polyeder gelten muss, die *auf die gleiche Weise* aus einem konvexen Polyeder lediglich durch »Eindellen« entstehen. – Aber Vorsicht: Die Formulierung *auf die gleiche Weise* meint versteckt noch etwas anderes. Polyeder B entstand aus A so, dass in B **alle Kanten zusammenhängen**. Das muss beim Eindellen aber nicht immer so sein, wie das nächste Beispiel zeigt.



Nur für X und Z gilt die Polyederformel

Aus dem Würfel X entsteht Polyeder Y durch Eindellen (wobei die Kanten der Delle mit den Würfelkanten aber **nicht zusammenhängen**). Die Eckenzahl steigt dabei um 8, die Flächenzahl um 5, die Summe $E+F$ wächst also um 13, die Kantenzahl dagegen nur um 12. Die Bilanz $E+F-K$ beträgt in Y nicht mehr 2, sondern 3. Die Polyederformel gilt hier also nicht.

Verbinden wir dagegen die beiden getrennten Kantensysteme von Würfel und Delle durch zwei neue Kanten (Polyeder Z), dann wächst gegenüber Y die Kantenzahl um 2, die Flächenzahl dagegen nur um 1 (die Eckenzahl ändert sich nicht). In Z ist mithin die Kantenzahl um 14 größer als in X, ebenso die Summe aus Ecken- und Flächenzahl. Daher hat in Z die Bilanz $E+F-K$ wie in X den Wert 2; für das Polyeder Z gilt die Polyederformel also wieder.

Körper, die aufgrund von Dellen nichtkonvex sind, stellen also eine wesentlich andere »Spezies« dar als nichtkonvexe Körper mit Löchern. Die Anzahl der Löcher eines Körpers nennt man sein **topologisches Geschlecht**. Körper ohne Löcher haben also das topologische Geschlecht 0, Körper mit n Löchern allgemein das Geschlecht n.

Wir können daher den Eulerschen Satz noch etwas »passgenauer« formulieren:

Polyederformel von Euler (erweitert)

In jedem Polyeder vom topologischen Geschlecht 0, in dem alle Kanten zusammenhängen, gilt:

Eckenzahl + Flächenzahl – Kantenzahl = 2.

Ein Beweis für die Eulersche Polyederformel ist in der Schule (Sekundarstufe I) weit weniger problematisch als man vielleicht erwarten würde. Allerdings nur dann, wenn dieser Beweis gemäß dem EIS-Prinzip (und der aktuellen Hirnforschung, die dieses alte Prinzip ja auf das Schönste bestätigt hat) **konsequent handlungsorientiert** realisiert wird.

Die **Idee** ist dabei folgende: Man führt an einem konkreten Polyeder eine Zählung von Ecken-, Kanten- und Flächenzahl durch. Und zwar handlungsorientiert, indem man **Ecken und Kanten Schritt für Schritt färbt**, wobei man in jedem Schritt die **Gültigkeit der Bilanz** $E+F-K=2$ **überprüft und begründet**.

Einerseits wird diese Färbungshandlung am Modell zumeist als unmittelbar überzeugend erlebt. Andererseits können SchülerInnen aus der Erfahrung mit dem eigenen Handlungsablauf Argumente dafür entwickeln, warum dieses Verfahren auch bei anderen, ja sogar bei allen konvexen Polyedern funktionieren muss. Selbst wenn SchülerInnen die vollständige logische Konsequenz nicht erfassen, bleibt ihnen die konkrete Erfahrung anhand von Beispielen (**empiriebasierte Überzeugung)**, dass das Verfahren funktioniert.

Die SchülerInnen erleben hier **Mathematik als konkretes Handeln** (dynamisches Wissen, Handlungswissen), wohingegen sie Mathematik sonst zumeist als Samm-

lung von auswendig gelernten und nicht hinterfragten Formeln und Methoden erleben (statisches Wissen).

Den Beweis demonstrieren zunächst Sie, anschließend alle SchülerInnen in allein oder besser in Partnerarbeit (Kommunikation!), und zwar stets exemplarisch handelnd durch tatsächlich ausgeführtes (nicht etwa nur imaginiertes) Färben (z.B. mit einem Filzstift) eines Körpermodells (aus Pappe).

Alternativ kann späterhin zusätzlich ein Transfer erarbeitet werden: Indem man nämlich auf einem Tischtennisball ein beliebiges Netz Polyedernetz aufzeichnet (z.B. schwarz), das dann anschließend wie beim Pappmodell Schritt für Schritt gefärbt wird (z.B. rot).

Den Erkenntnis- und Argumentationsweg fassen wir im folgenden modellhaft zusammen:

Beweis der Eulerschen Polyederformel
(induktiv durch schrittweises Färben der Kanten und Ecken)

Zählprinzip: Kanten und Ecken werden erst gezählt, sobald sie gefärbt sind. Eine Fläche wird erst gezählt, sobald alle ihre Ecken und Kanten gefärbt sind. Schritt für Schritt färbt man, bis zum Schluss sämtliche Ecken und Kanten gefärbt sind. Dabei wird man feststellen, dass nach jedem Schritt die Polyederformel gilt, insbesondere auch nach dem letzten. Dann weiß man, dass sie für das ganze Polyeder gilt.

Anfangsschritt: Man beginnt damit, dass man **irgendeine Kante sowie deren beide Ecken färbt**. Danach zählt man also 1 Kante, 2 Ecken und 1 Fläche; es gilt also nach diesem ersten Schritt die Bilanz $E+F-K=2+1-1=2$. Mit anderen Worten: **Nach dem Startschritt gilt die Polyederformel** (für die bis dahin gefärbten Ecken und Kanten).

Folgeschritt Typ 1: **Man färbt eine Kante, die zwischen einer bereits gefärbten Ecke und einer noch nicht gefärbten Ecke verläuft.** Das heißt, die Zahl der gefärbten (also zu zählenden) Ecken und Kanten wächst jeweils um 1. Was ist aber mit der Flächenzahl, wächst sie auch?

Empirische Beobachtung: Am konkreten Modell, das man gerade färbt, beobachtet man immer, dass dies nicht der Fall ist. Die neu gefärbte Kante schließt nie einen Kreis aus lauter gefärbten Kanten. Und erst dann darf eine Fläche ja gezählt werden.

Theoretische Begründung: Dies ist nicht etwa nur zufällig bei unserem Polyeder so ist, sondern immer so sein. Denn: Die neu gefärbte Kante ziehen wir doch zu einer vorher ungefärbten Ecke, von der daher im Augenblick keine gefärbte Kante losgeht (sonst müsste auch die Ecke gefärbt sein, was sie aber nicht ist). Da die Ecke an der in Frage stehenden Fläche liegt, sind demnach noch nicht alle Kanten dieser Fläche gefärbt. Also darf sie noch nicht gezählt werden.

Fazit: Nur die Ecken- und die Kantenzahl wachsen um 1, die Flächenzahl bleibt dagegen unverändert. Wenn vor dem Schritt die Bilanz $E+K-F=2$ galt, dann muss die die aktuelle Bilanz nach diesem Schritt also lauten: $E_{neu}+F_{neu}-K_{neu}=(E+1)+F-(K+1)=E+K-F=2$. **Wenn also vor diesem Schritt die Polyederformel gilt, dann gilt sie auch nach dem Schritt** (für die bis dahin gefärbten Ecken und Kanten).

Folgeschritt Typ 2: **Man färbt eine Kante, die zwischen zwei bereits gefärbten Ecken verläuft.** Dabei wächst also die Kantenzahl um 1, während die Eckenzahl nicht wächst (da beide Ecken schon vorher gefärbt waren, sind sie bereits gezählt worden). Nun muss aber die neu gefärbte Kante mit anderen gefärbten Kanten eine Fläche ganz umschließen, die vorher noch nicht ganz von gefärbten Kanten umschlossen war. Das heißt, die Flächenzahl wächst bei diesem Schritt um 1.

Fazit: Nur die Kanten- und die Flächenzahl wachsen um 1, die Eckenzahl bleibt dagegen unverändert. Wenn vor dem Schritt die Bilanz $E+K-F=2$ galt, dann muss die die aktuelle Bilanz nach diesem Schritt also lauten: $E_{neu}+F_{neu}-K_{neu}=E+(F+1)-(K+1)=E+K-F=2$. **Wenn also vor diesem Schritt die Polyederformel gilt, dann gilt sie auch nach dem Schritt** (für die bis dahin gefärbten Ecken und Kanten).

Da man bei jedem konvexen Polyeder immer alle Ecken und Kanten färben kann, indem man mit dem Startschritt beginnt und danach ausschließlich Folgeschritte vom Typ 1 oder vom Typ 2 durchführt, können wir für jedes konvexe Polyeder folgendermaßen schließen:

Nach dem Startschritt gilt die Polyederformel.

Nach jedem Folgeschritt bleibt sie gültig, wenn sie vorher galt.

Also ist die Polyederformel auch nach dem letzten Schritt gültig,
wenn alle Ecken und Kanten gefärbt und damit gezählt worden sind.

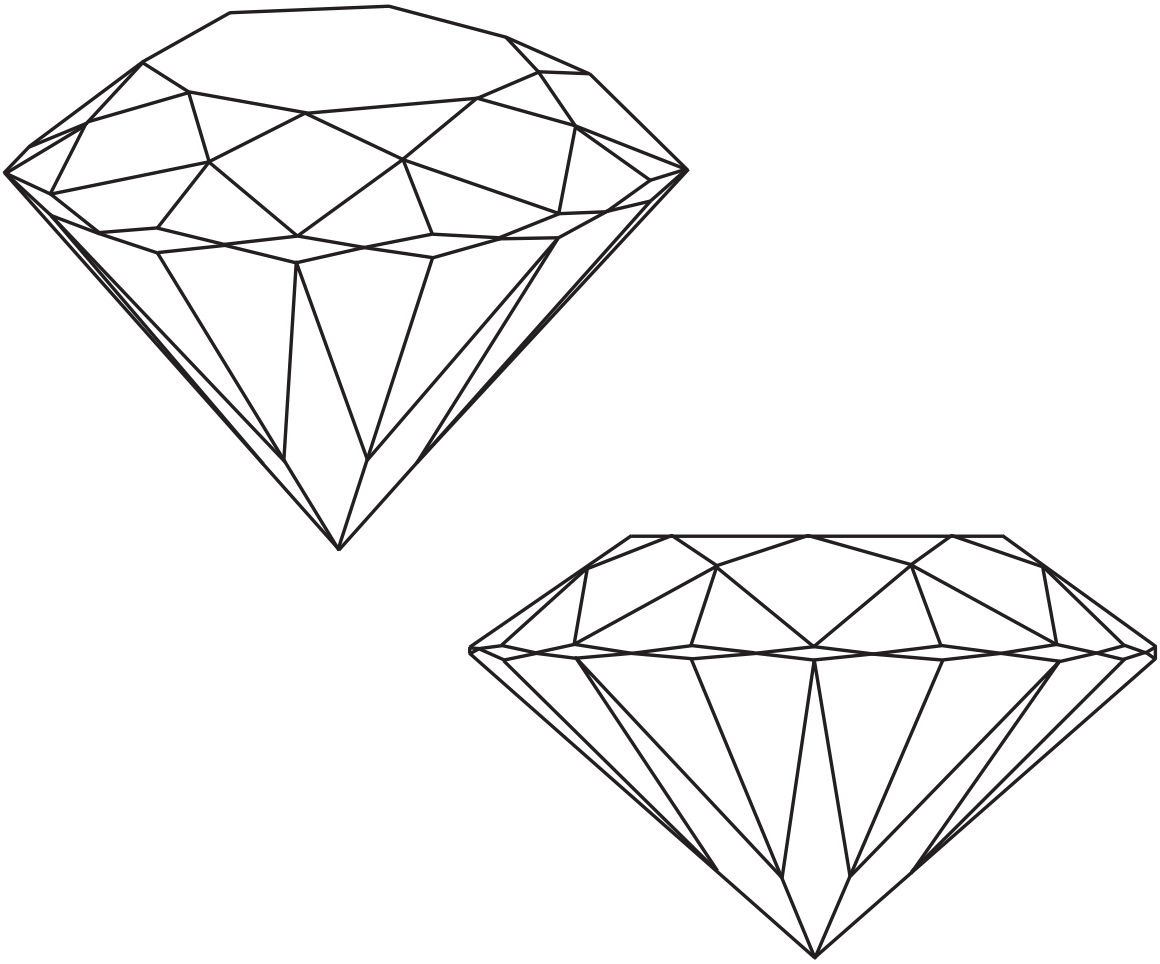
Damit haben wir die Polyederformel für alle konvexen Polyeder bewiesen.

Beachten Sie noch einmal: Der korrekte formallogische Schluss wird und muss nicht von allen SchülerInnen vollständig durchschaut werden. Das ist aber auch nicht das Ziel. Das Ziel ist vielmehr die **eigenaktive Gewinnung von empirischer Evidenz durch konkretes Handeln an überzeugenden Beispielen.** Auch wenn das auf den ersten Blick dem Allgemeinheitsanspruch mancher Mathematiker widersprechen mag – so sieht der Beginn mathematischer Forschung immer aus. **Erst auf der Basis empirischer Gewissheit kann sich ein Beweisbedürfnis entwickeln.** Solange man empirische Gewissheit noch nicht erlebt, sucht man nicht nach einem Beweis, sondern nach weiteren empirischen Beispielen.

11 Besondere Polyeder: Drei Beispiele

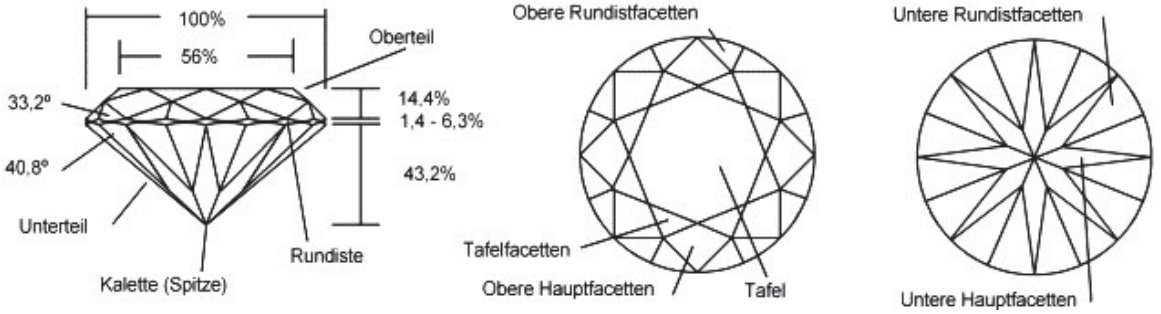
Brillant: Das optimale Polyeder für Diamanten

Der Diamant ist das härteste Mineral; chemisch handelt es sich um eine spezielle Modifikation des Elements Kohlenstoff.



Erst durch den Schliff wird Diamant »schön«. Mit dem Schliff will man erreichen, dass möglichst viel des einfallenden Lichts im Stein reflektiert und zugleich gebrochen wird: Dadurch entsteht bei guter Beleuchtung das optische Phänomens der »Brillanz« (»Funkeln« und »Feuern«). Der Schliff, der eine besonders hohe Brillanz garantiert, wird »Brillant« genannt. (Merke: Diamant heißt der Stein, Brillant der Schliff.) **Der Brillant ist mathematisch ein spezielles konvexes Polyeder.**

Maße und Fachbezeichnungen:



(Diese Abb.: Wikipedia)

Flächenbilanz des Brillant-Polyeders:

1 Achteck	Tafel
8 gleichschenklige Dreiecke	Tafelfacetten
8 Drachen	obere Hauptfacetten
16 Dreiecke	obere Rundistfacetten
16 Rauten	Rundiste
16 Dreiecke	untere Rundistfacetten
8 Drachen	untere Hauptfacetten

Aus der Flächenbilanz können wir die Eckenzahl folgern:

1. Wir summieren die Flächenzahlen: $1+8+8+16+16+16+8=73$ Flächen.
2. Wir summieren die Kantenzahlen aller Flächen:

   $1\cdot 8+8\cdot 3+8\cdot 4+16\cdot 3+16\cdot 4+16\cdot 3+8\cdot 4=256$

   Da wir dabei jede Kante sowohl bei ihrer »rechten« als auch bei ihrer »linken« Fläche mitgezählt haben, haben wir dabei jede Kante doppelt gezählt. Der Brillant hat also 128 Kanten.
3. Nach der Eulerschen Polyederformel ist die Eckenzahl also $128-73+2=57$.

Das Brillant-Polyeder hat also 57 Ecken, 128 Kanten und 73 Flächen.

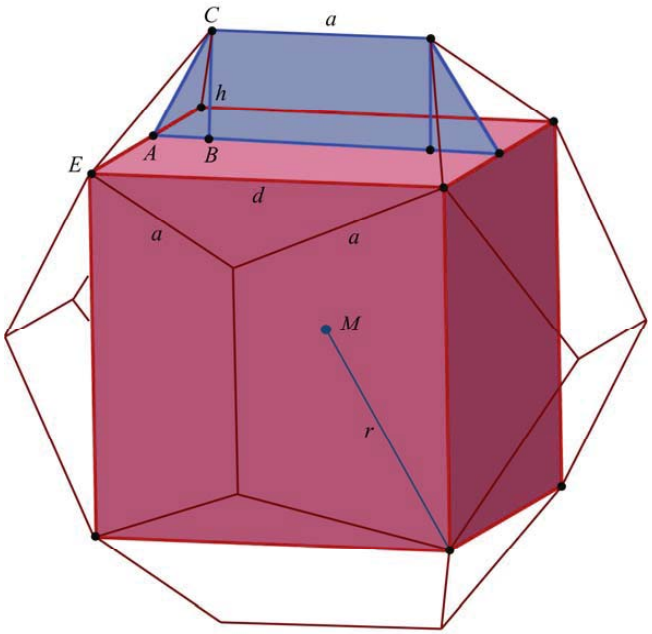
Wenn Sie einen Brillanten unter der Lupe betrachten, werden Sie vielleicht die 16 Rauten der Rundiste kaum erkennen können, weil die Rundiste oft kreisförmig geschliffen wird, so dass die Kanten »verwischt« werden. Vielleicht ist auch die Kalette (Spitze) etwas angeschliffen, so dass sie keine mathematische Ecke, sondern eine kleine Fläche bildet.

Das Dodekaeder: Ein Würfel mit sechs Walmdächern

Wenn Sie auf jede der sechs Seiten eines Würfels ein geeignetes Dach (genauer: ein Walmdach) setzen, erhalten Sie ein Dodekaeder. Wie kann das sein? Diese Verwandtschaft von Würfel und Dodekaeder wird von der Zahl 12 gestiftet.

Bauen Sie Würfel und Dächer aus Papier; wenn Sie den Zusammenhang zwischen Seite *a* und Diagonale *d* im Fünfeck kennen, haben Sie die Netze schnell gezeichnet.

Übrigens: Die Dachhöhe *h* ist gerade die halbe Seitenlänge *a*. Warum?



Aus einem Würfel und 6 Walmdächern
entsteht ein Dodekaeder

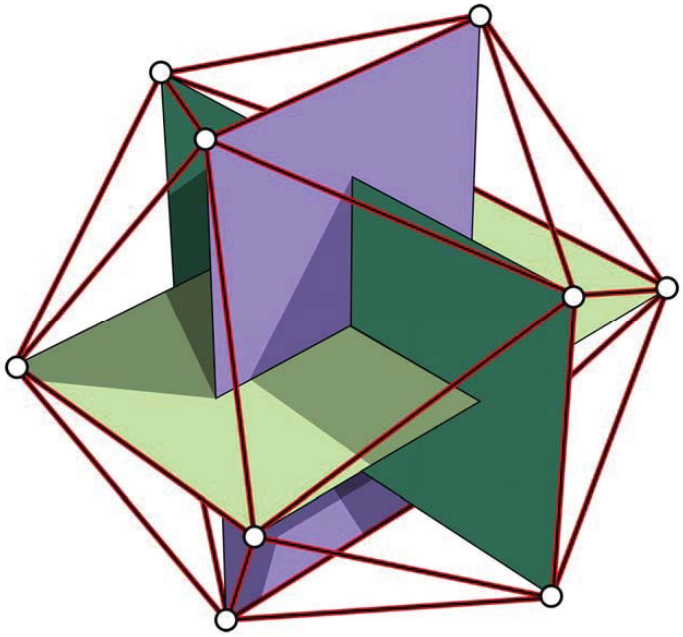
Übung

1. Bestimmen Sie die Diagonale *d* in Abhängigkeit von *a*. (Tipp: Kennen Sie den Zusammenhang zwischen Seite *a* und Diagonale *d* im Fünfeck?)
2. Die Dachhöhe ist gerade die halbe Seitenlänge *a*. Weisen Sie das nach.
3. Zeichnen Sie Netze für den Würfel und die 6 Dächer. Rechnen Sie hier nicht – nehmen Sie den Zirkel. (Stichwort: goldener Schnitt, stetige Teilung).
4. Bauen Sie den Würfel und die 6 Dächer. Prüfen Sie nach, ob man die Teile zu einem Dodekaeder zusammensetzen kann.

Das Ikosaeder: Ein Körper aus drei goldenen Rechtecken

Stehen die beiden Seiten eines Rechtecks im Verhältnis des goldenen Schnitts, dann nennt man es ein *goldenes Rechteck*. Ein goldenes Rechteck ist also ein Rechteck, bei dem die längere Seite genau das Φ-fache der kürzeren ist.

Stecken Sie nun drei kongruente goldene Rechtecke paarweise senkrecht und genau mittig ineinander, so dass eine möglichst symmetrische Figur entsteht, dann bilden die dreimal vier Ecken der Rechtecke genau die Ecken eines Ikosaeders.



Aus 3 kongruenten goldenen Rechtecken
entsteht ein Ikosaeder

Übung

Bauen Sie

12 Deltaeder: Alles Dreiecke

Konvexe Polyeder, die aus lauter (kongruenten) regelmäßigen Dreiecken bestehen, heißen Deltaeder. Sie kennen schon einige Deltaeder, nämlich die platonischen Körper, die von Dreiecken begrenzt werden: Tetraeder (4 Dreiecke), Oktaeder (8 Dreiecke), Ikosaeder (20 Dreiecke).

Welche Deltaeder gibt es außerdem noch? Ihre konstruktive Entdeckung mit dem n-Eck-Baukasten ist eine kreative und spannende Sache.

Bauen Sie jetzt selbst Deltaeder!

Erfahrungsgemäß kommt man beim explorativen Bauen zu einer Reihe interessanter Beobachtungen und Fragen. Zum Beispiel:

1. »Ein größeres Deltaeder als das Ikosaeder kriegt von uns niemand hin. Gibt es denn wirklich kein Deltaeder mit mehr als 20 Dreiecken?«
2. »Die Deltaeder, die wir bisher gefunden haben, haben immer eine gerade Flächenzahl. Ist das Zufall?«

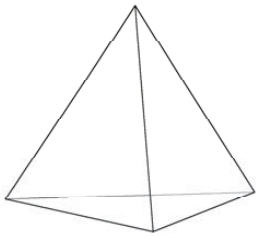
Beginnen wir mit Frage 2. Wie wir eben beim Brillant-Polyeder die Kanten gezählt haben, können wir auch beim Deltaeder vorgehen: Wenn es aus f Dreiecken besteht, liefert jedes Dreieck 3 Kanten, insgesamt also $3f$, wobei aber wieder jede Kante doppelt gezählt ist. Die Kantenzahl ist also die Hälfte von $3f$. Da die Kantenzahl eine ganze Zahl ist, muss also f eine gerade Zahl sein. **Deltaeder bestehen also stets aus einer geraden Anzahl von Dreiecken.**

Frage 1 ist ein wenig schwieriger, weil wir sie nicht mit einer bloßen Rechenaufgabe beantworten können. Die folgende Überlegung ist vielleicht formal nicht ganz perfekt; sie hat aber dafür den Vorteil, dass Lernende immer wieder von selbst auf diese Idee kommen. Der Idee sieht man übrigens an, dass Leute sie haben, die selbst Hand angelegt haben und fest auf dem Boden ihrer eigenen praktischen Erfahrungen beim Bauen von Deltaedern stehen:

»Wenn ich ein Deltaeder aus möglichst vielen Dreiecken bauen will, dann muss ich dafür sorgen, dass sich das Deltaeder nicht zu rasch schließt. Ein Tetraeder ist schon nach nur 4 Dreiecken zu, ein Tetraeder nach 8 Dreiecken. Anders gesat: Ich muss erreichen, dass mein Deltaeder möglichst wenig gekrümmt ist. So nach dem Motto: Je weniger gekrümmt, desto größer die Kugel. Weil aber die Dreiecke selbst natürlich überhaupt nicht gekrümmt sind, spielt sich Krümmung an den Kanten und vor allem an den Ecken ab. Je mehr Dreiecke an einer Ecke zusammenstoßen, desto flacher wird die Schale, die ich erhalte. Mehr als 5 Dreiecke können aber an einer Ecke niemals zusammenstoßen, denn ab 6 würde ja keine Raumecke mehr entstehen (6 regelmäßige Dreiecke an einer Ecke bilden ein flaches Sechseck). Also kann ich bestenfalls an jeder Ecke immer genau 5 Dreiecke zusammenstoßen lassen – dann erhalte ich aber das Ikosaeder. **Das Ikosaeder ist also das größte Deltaeder.**«

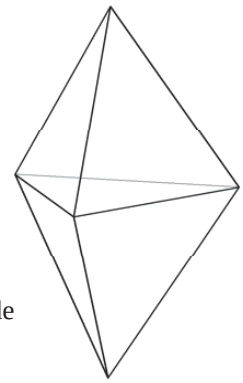
Bevor Sie weiterlesen:
Bauen Sie spätestens jetzt erst einmal selbst Deltaeder!

Die 8 Deltaeder



f = 4

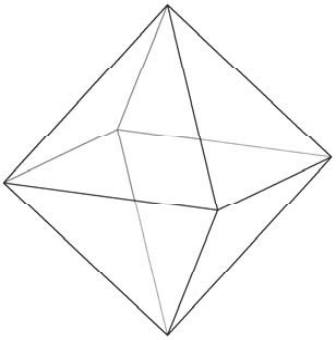
Tetraeder



f = 6

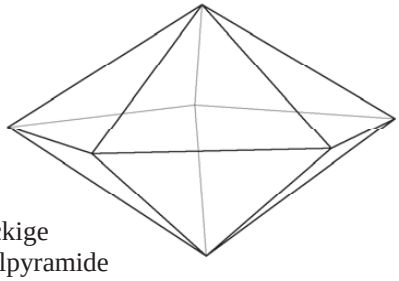
Dreieckige Doppelpyramide

[J12]



f = 8

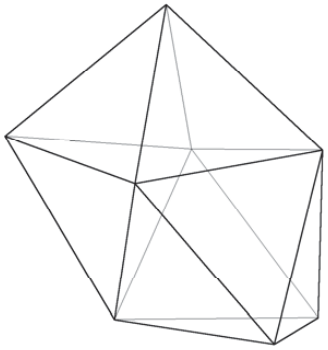
Oktaeder



f = 10

Fünfeckige Doppelpyramide

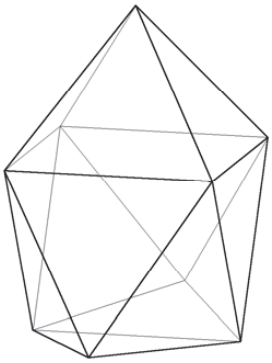
[J13]



f = 12

Stumpfer Doppelkeil

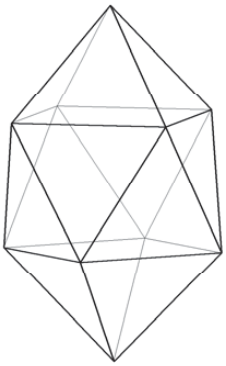
[J84]

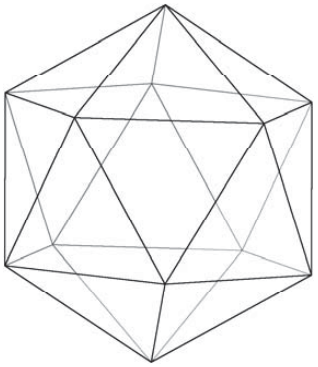


f = 14

Dreifach erweitertes dreieckiges Prisma

[J51]





f = 20

Ikosaeder

Vermutlich sind Sie längst selbst darauf gekommen: Da Deltaeder konvexe Polyeder sind und aus lauter regelmäßigen Vielecken bestehen, müssen sie natürlich entweder platonische Körper oder Johson-Körper sein. Selbst Konstruieren ist zwar allemal viel besser (nämlich intelligenter und motivierender) – doch Sie hätten auch einfach bei den Johnson-Körper nachschauen können, welche Netze nur aus Dreiecken bestehen.

Vielleicht haben Sie sich inzwischen noch weitere Fragen gestellt. Zum Beispiel:

3. »Könnte es zu einer (geraden) Flächenzahl nicht auch mehrere Deltaeder geben?«
4. »Gibt es wirklich kein Deltaeder mit 18 Flächen? Vielleicht müsste man nur intensiver versuchen, eines zu konstruieren?«

Wie wir bereits überlegt haben, ist die Kantenzahl eines Deltaeders

$$k = 3/2\, f\ ,$$

weshalb f stets gerade sein muss. An jeder Ecke können nur drei, vier oder fünf Dreiecke zusammenstoßen (und folglich auch ebenso viele Kanten). Die Anzahlen dieser Ecken bezeichnen wir mit e_3, e_4, e_5. Die Gesamteckenzahl ist also

$$e_3 + e_4 + e_5 = e\ .$$

Die Flächenzahl f können wir berechnen, indem wir für jede der e_3 Ecken jeweils 3 Fächen zählen, für jede der e_4 Ecken jeweils 4, und für jede der e_5 Ecken jeweils 5. Zusammen zählen wir $3e_3 + 4e_4 + 5e_5$ Flächen. Da dies aber Dreiecke sind, haben wir jedes Dreieck von jeder ihrer Ecken gezählt haben, also dreifach. Also gilt für die Flächenzahl f:

$$3e_3 + 4e_4 + 5e_5 = 3f\ .$$

Da f gerade ist, muss auch die linke Seite der letzten Gleichung gerade sein. Da $4e_4$ gerade ist, muss demnach auch $3e_3 + 5e_5$ gerade sein. Das geht aber wegen der ungeraden Koeffizienten nur dann, wenn e_3, e_5 entweder beide gerade oder beide ungerade sind; kürzer gesagt: wenn ihre Summe $e_3 + e_5$ gerade ist.

Wegen $k = 3/2\, f$ ergibt sich hier aus der Eulerschen Polyederformel:

$$e = k - f + 2 = 3/2\, f - f + 2 = 1/2\, f + 2\ .$$

Wenn wir nun sämtliche Möglichkeiten durchspielen, die Eckenzahl e für alle geradzahligen Werte von 4 bis 20 so in drei Summanden e_3, e_4, e_5 zu zerlegen, dass alle bisher hergeleiteten Eigenschaften erfüllt sind, so stellen wir fest, dass es überhaupt nur 19 solche Zerlegungen gibt. Aber nur für 8 dieser Zerlegungen gibt es tatsächlich auch ein Deltaeder mit den angegebenen Werten für f, e, e_3, e_4, e_5. Für jede gerade Zahl außer $f = 18$ gibt es jeweils genau ein Deltaeder mit dieser

Flächenzahl. Den vollständigen Beweis haben die Mathematiker H. Freudenthal und B. L. van der Waerden im Jahr 1947 geführt.

f	e	e_3	e_4	e_5	
4	4	4	0	0	**für diese Zahlen gibt es genau ein Deltaeder**
6	5	3	1	1	kein Deltaeder möglich
6	5	2	3	0	**für diese Zahlen gibt es genau ein Deltaeder**
8	6	3	0	3	kein Deltaeder möglich
8	6	2	2	2	kein Deltaeder möglich
8	6	1	4	1	kein Deltaeder möglich
8	6	0	6	0	**für diese Zahlen gibt es genau ein Deltaeder**
10	7	2	1	4	kein Deltaeder möglich
10	7	1	3	3	kein Deltaeder möglich
10	7	0	5	2	**für diese Zahlen gibt es genau ein Deltaeder**
12	8	2	0	6	kein Deltaeder möglich
12	8	1	2	5	kein Deltaeder möglich
12	8	0	4	4	**für diese Zahlen gibt es genau ein Deltaeder**
14	9	1	1	7	kein Deltaeder möglich
14	9	0	3	6	**für diese Zahlen gibt es genau ein Deltaeder**
16	10	1	0	9	kein Deltaeder möglich
16	10	0	2	8	**für diese Zahlen gibt es genau ein Deltaeder**
18	11	0	1	10	kein Deltaeder möglich
20	12	0	0	12	**für diese Zahlen gibt es genau ein Deltaeder t**

13 Flexible Polyeder: Biegen ja, atmen nein

Das Scharnier-Modell

Wir stellen uns vor, die Flächen eines Polyeders wären Metallplatten und die Kanten wären Scharniere. Wenn man seine Flächen trotz der Scharniere nicht bewegen kann, nennen wir das Polyeder ***starr***, andernfalls ***flexibel (biegbar)***.

Problem

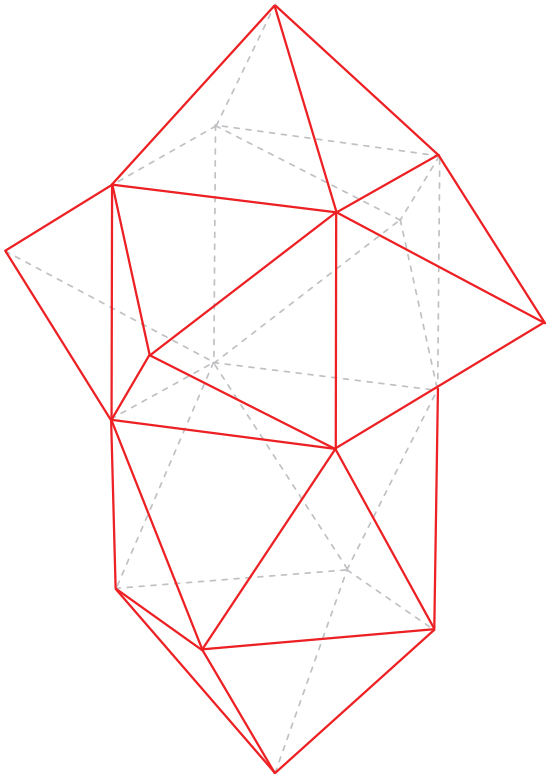
Gibt es überhaupt flexible Polyeder?

Euklid (und wohl alle vor ihm und anscheinend auch alle nach ihm, bis ins 20. Jahrhundert) scheinen das für völlig unmöglich gehalten zu haben. Ohne jeden Beweis …

Satz (Cauchy 1813)[1]

Jedes konvexe Polyeder ist starr.

(Ein Fehler in Cauchys ursprünglichem Beweis ist über 50 Jahre lang übersehen worden. Man kann ihn aber reparieren.)



Satz (Connelly 1978)[2]

Es gibt nicht-konvexe Polyeder, die flexibel sind.

Beweis: Zum Beispiel das flexible Deltaeder von Paul Mason (s. Abbildung).

Allerdings sind nicht nur alle konvexen, sondern auch die weitaus meisten nicht-konvexen Polyeder starr. **Statistisch sind fast alle Polyeder starr.**

Satz (Sabitov 1997)[3]

Das Volumen eines flexiblen Polyeders bleibt bei Formveränderung stets konstant. (Anschaulich formuliert: **Polyhedra can bend but not breathe.** Polyeder können sich biegen, aber nicht atmen.)

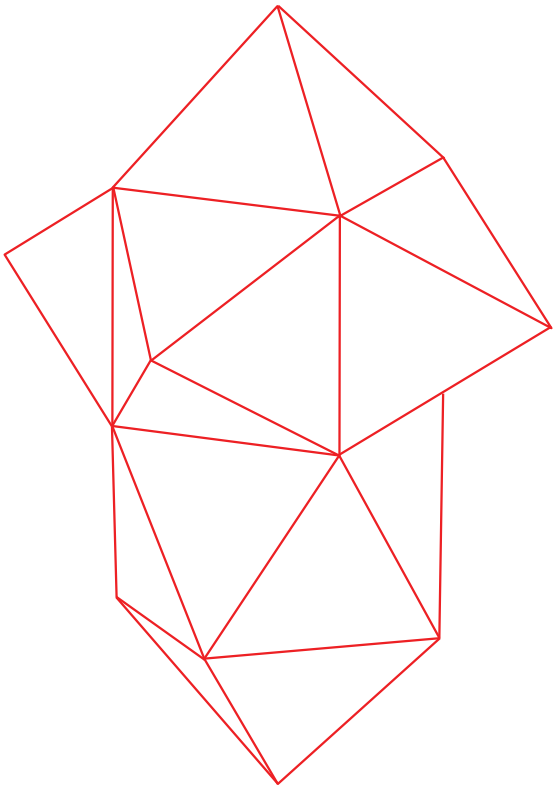
---

1 Cauchy, A. L. : Sur les polygones et les polyèdres. XVIe Cahier IX, 87-89, 1813.

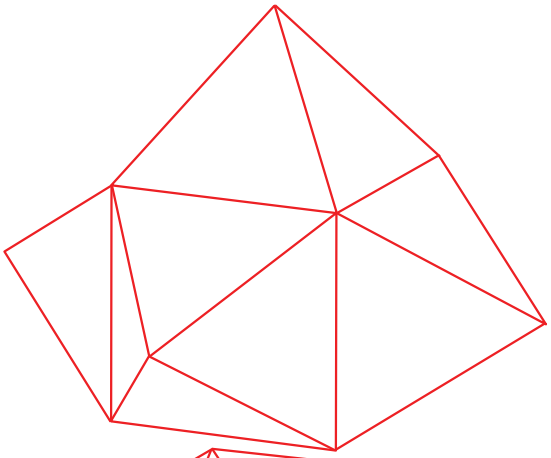
2 Connelly, R. : A Flexible Sphere. Math. Intel. 1, 130-131, 1978.

3 Connelly, R., Sabitov, I. & Walz, A.: The Bellows Conjecture. Contrib. Algebra Geom. 38, 1-10, 1997.

Das
flexible Deltaeder
von Paul Mason[4]

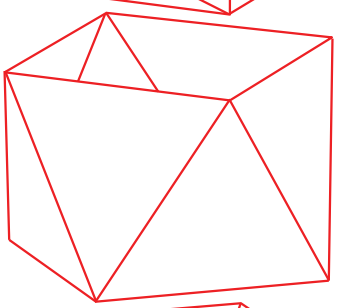


Würfel
mit 5 aufgesetzten
quadratischen Pyramiden
(Würfelflächen
werden entfernt)

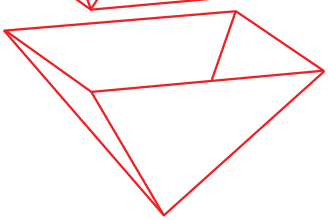


+

quadratisches Antiprisma
(ohne Decke und Boden)



+

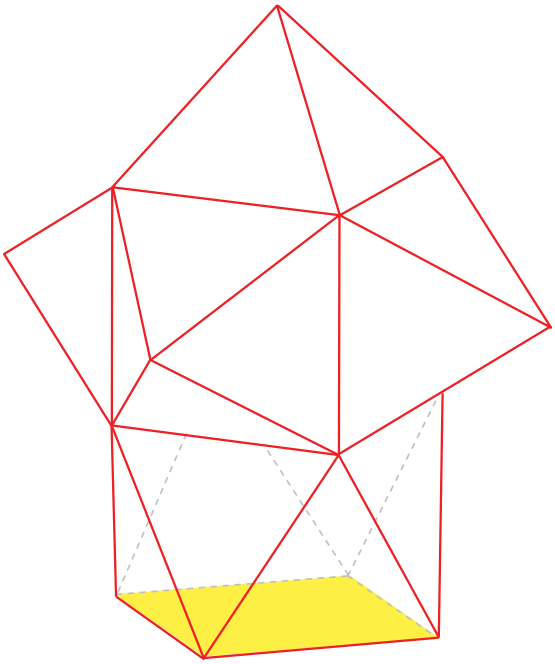


quadratische Pyramide
(ohne Boden)

[4] Ein Deltaeder ist ein Polyeder, dessen Flächen lauter regelmäßige Dreiecke sind (die dann alle zueinander kongruent sein müssen – warum?)

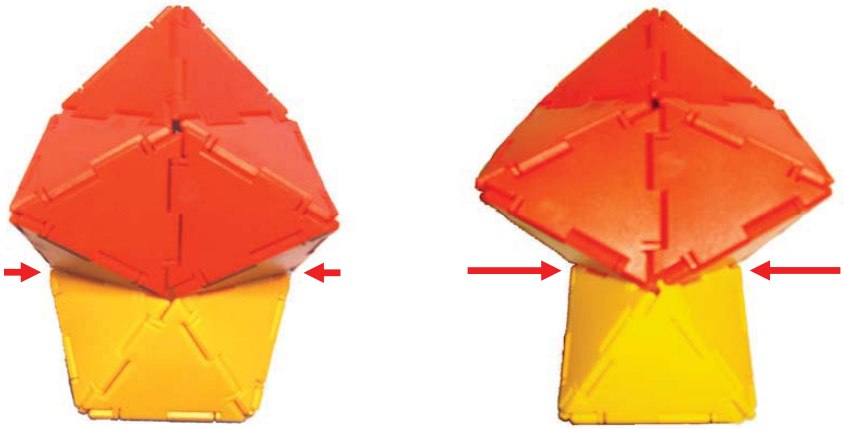
Masons flexibles Deltaeder bleibt flexibel, wenn wir die untere Pyramide durch ein Quadrat ersetzen.

Dabei entsteht ein Polyeder, das wir **Dreieckspilz** nennen.



Der Dreieckspilz ist fast ganz aus Dreiecken gebaut – fast, denn er steht ja auf einem Quadrat. (Der Dreieckspilz ist also kein Deltaeder mehr; aber er ist ein wenig einfacher zu bauen und ebenso flexibel wie Masons Deltaeder.)

Bauen wir den Dreieckspilz mit dem *n*-Eck-Baukasten, so können wir seine Biegsamkeit unmittelbar erleben: Er lässt sich an der Taille (an der »Nahtstelle« des erweiterten Würfels mit dem Antiprisma) zusammen- und auseinanderdrücken, ohne kaputtzugehen.



Mit der einen Hand können wir links-rechts zusammendrücken, mit der anderen Hand vorne-hinten. Jede dieser Veränderungen macht die andere rückgängig.

Es gibt zwischen den beiden Extremformen unendlich viele Zwischenformen. Alle diese Formen haben aber dasselbe Volumen, wie Idjad Sabitov 1997 (für alle flexiblen Polyeder) gezeigt hat. – Wir sehen auch hier wieder:

Die Geometrie macht auch heute *starke Entdeckungen*.

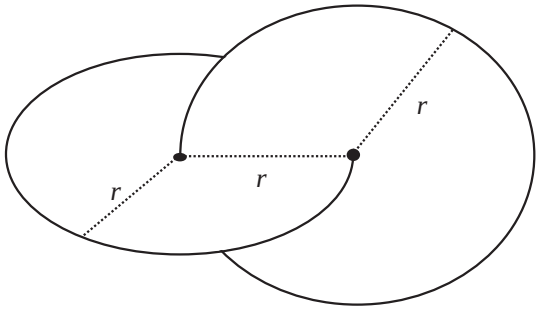
14 Torkelkörper : Oloid, Sphericon, Pita

Zweikreisroller

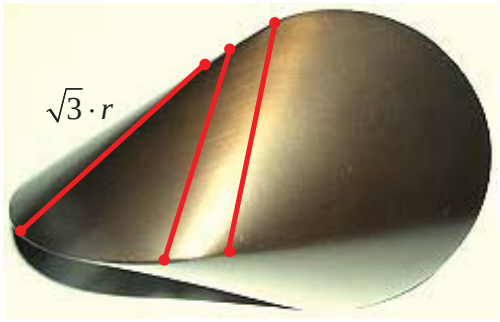
Zwei Kreisscheiben mit gleichem Radius so ineinander schieben, dass sie aufeinander senkrecht stehen und einen gemeinsamen Durchmesser haben. (*Durchmesser:* eine Gerade in der Kreisebene durch den Kreismittelpunkt)

Je nach dem Abstand ihrer Mittelpunkte ergeben sich Zweikreisroller mit unterschiedlichen Eigenschaften.

Mittelpunktsabstand gleich Radius: Das Oloid

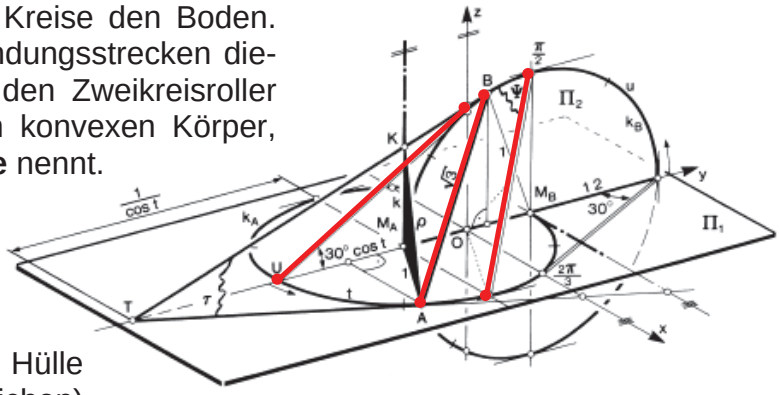


Ein spezieller **Zweikreisroller**



und dessen konvexe Hülle: das **Oloid**

Wenn ein Zweikreisroller rollt, berühren stets zwei Punkte seiner beiden Kreise den Boden. Wenn man aus allen Verbindungsstrecken dieser Punkte eine Hülle um den Zweikreisroller bildet, so erhält man einen konvexen Körper, den man die **konvexe Hülle** nennt.



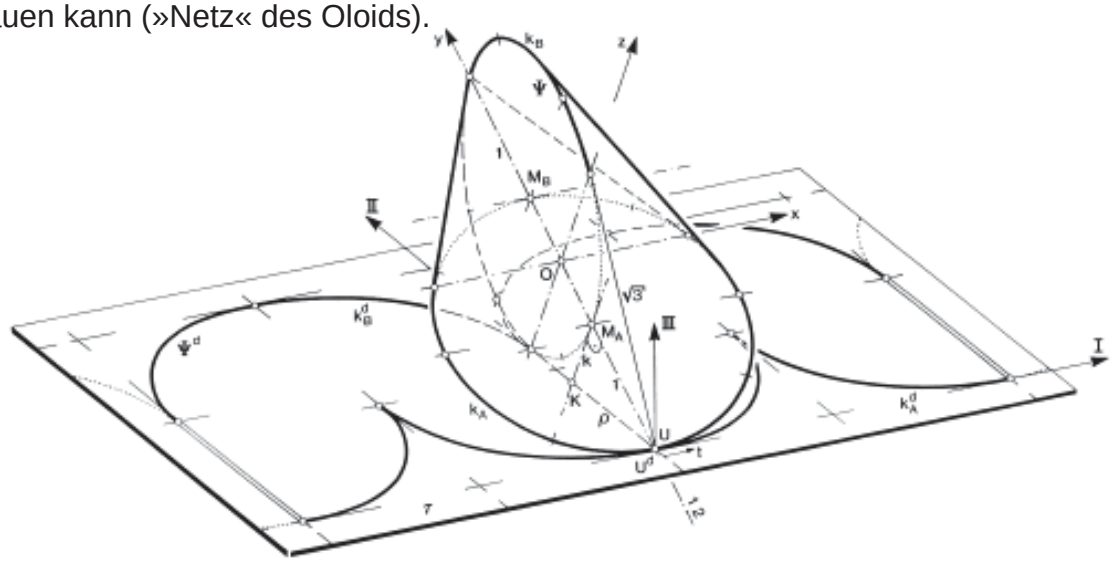
Allgemein ist die konvexe Hülle einer (ebenen oder räumlichen) Figur *F* die kleinste konvexe Figur, in der *F* ganz enthalten ist.

Die konvexe Hülle des Zweikreisrollers mit Mittelpunktabstand gleich Radius heißt **Oloid**. Das Oloid ist erst im 20. Jahrhundert ge- bzw. erfunden worden (Paul Schatz, 1898–1979).

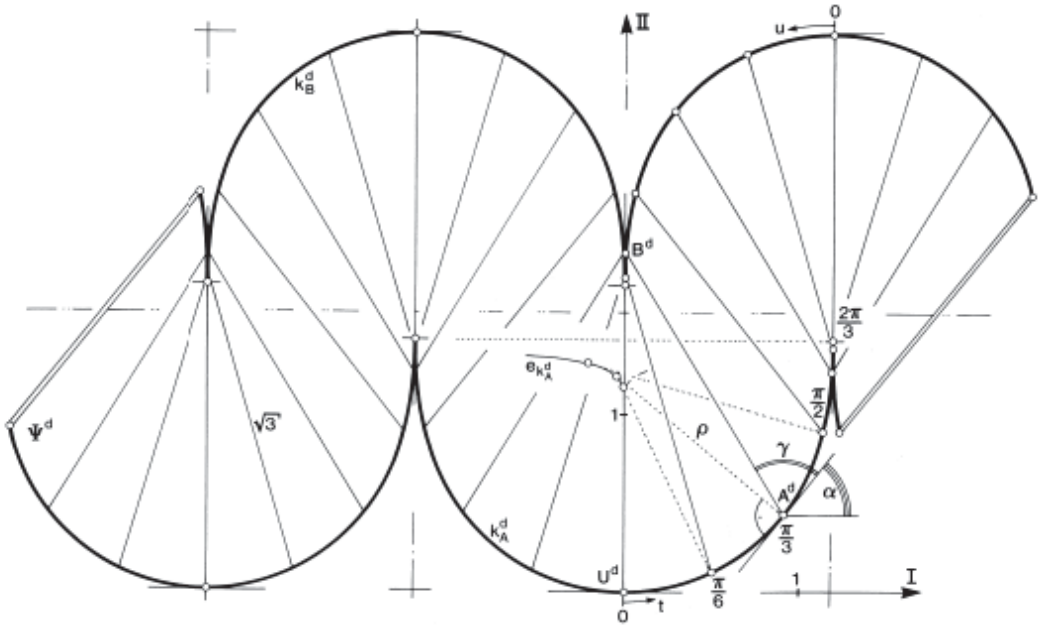
Wenn eine Kugel rollt, berührt sie zu jedem Zeitpunkt mit genau einem Punkt die Rollebene. Wenn ein Zylinder (der Länge *L*) rollt, berührt er zu jedem Zeitpunkt mit genau einer Strecke (der Länge *L*) die Rollebene. Wenn die konvexe Hülle eines beliebigen Zweikreisrollers rollt, dann berührt sie ebenfalls zu jedem Zeitpunkt

mit genau einer Strecke die Rollebene. Beim Oloid sind alle dieser Berührstrecken – wie beim Zylinder – gleich lang; nämlich genau $\sqrt{3} \cdot r$.

Weil das Oloid wie der Zylinder beim Rollen zu jedem Zeitpunkt entlang einer Strecke die Rollebene berührt, kann man wie den Zylinder auch das Oloid »in die Ebene abrollen«. D.h. Oloid und Zylinder hinterlassen bei einer vollständigen Abrolldrehung in der Ebene einen »Abdruck« von sich. Beim Zylinder nennt man diesen Abdruck den »Mantel«; aus ihm und zusätzlich zwei Kreisscheiben kann man den Zylinder zusammenbauen (»Netz« des Zylinders). Beim Oloid ist dieser Abdruck aber vollständig: jeder Punkt auf der Oberfläche des Oloids wandert bei einer Umdrehung genau einmal auf die Rollebene und »verewigt« sich dort. Das bedeutet, dass man aus dem Abdruck des Oloids das ganze Oloid zusammenbauen kann (»Netz« des Oloids).

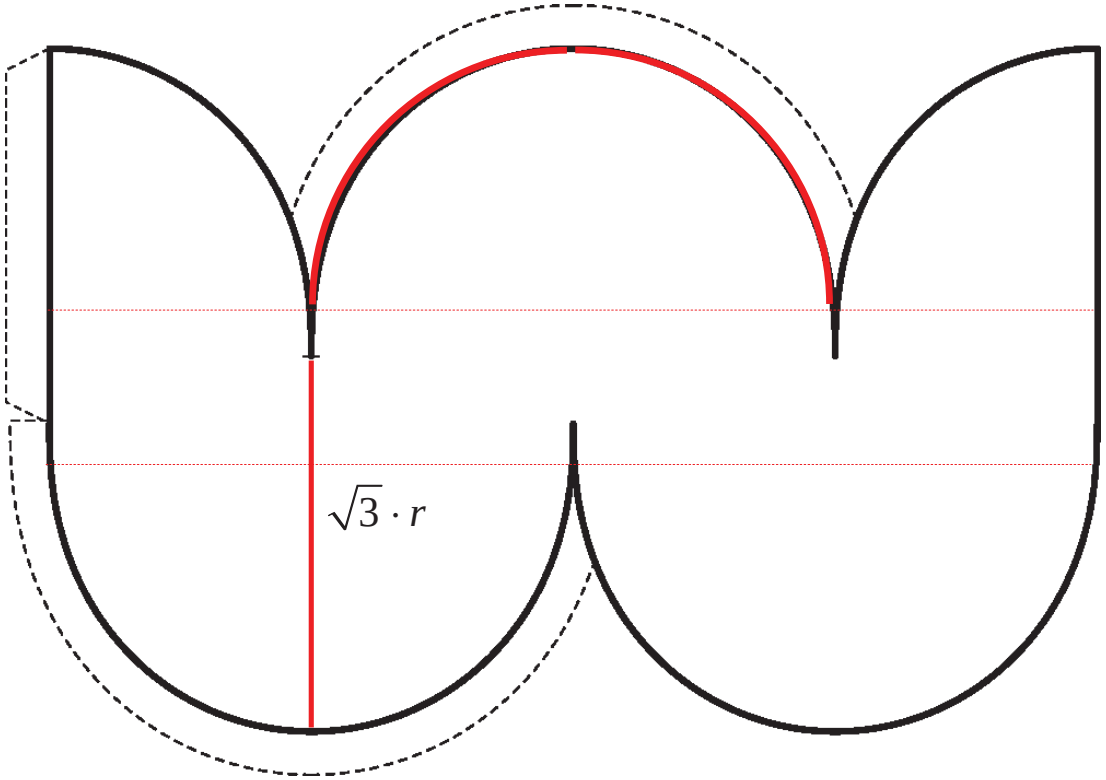


Beim Abrollen des Oloids in die Ebene entsteht das Oloidnetz



Netz des Oloids

Zum Basteln kann man ein etwas vereinfachtes Oloid-Netz verwenden:



Wie man beim konkreten Experimentieren mit Zweikreisrollern erkennt, ist das Oloid-Netz im wesentlichen aus Kreiselementen (und Strecken) zusammengesetzt. Den Zusammenhang zwischen den Maßen des Netzes und dem Radius r stellt die in den Netzen eingezeichnete Berührstrecke her, mit der das Oloid beim Abrollen den Boden berührt: sie hat stets die Länge $\sqrt{3} \cdot r$. (Im oberen Netz wurde zur Vereinfachung $r = 1$ gewählt.)

Das verblüffendste Resultat über das Oloid betrifft seine Oberfläche: **Das Oloid aus zwei Kreisscheiben mit Radius *r* hat dieselbe Oberfläche wie die Kugel mit Radius *r***:

$$A_{Oloid} = 4\pi r^2 = A_{Kugel}$$

Für das Volumen gibt es eine so schöne Beziehung nicht. Es gibt leider überhaupt keine einfache exakte Formel für das Oloidvolumen; man kann nur einen numerischen Näherungswert angeben:

$$V_{Oloid} \approx 3{,}05241 \cdot r^3$$

(Zum Vergleich: $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$)

Wegen $3{,}05241 : \frac{4}{3}\pi \approx 0{,}7285$ beträgt das Oloidvolumen damit also knapp 73% des Kugelvolumens (bei jeweils gleichem Radius).

Übung

Bauen Sie ein Oloid. (Vergrößern Sie das Oloid-Netz und schneiden Sie es aus.)



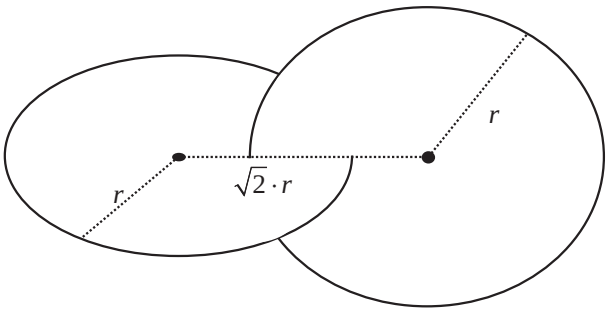
In der chemischen Industrie wird das Oloid aufgrund seiner besonderen geometrischen Eigenschaften als Behälter für ein sehr effizientes Mischen genutzt.

Zweikreisroller sind spezielle »Torkler« (Torkelkörper)

Alle Zweikreisroller können rollen, aber sie **torkeln**. Genauer: Sie rollen in regelmäßigen Rechts-/Linkskurven. Wenn das Oloid rollt, bewegt sich sein Schwerpunkt auf und ab; Folge: Das Oloid rollt ungleichmäßig (abwechselnd Beschleunigung und Verzögerung).

Man kann aber den Mittelpunktabstand des Zweikreisrollers so einstellen, dass der **Schwerpunkt beim Rollen stets exakt auf derselben Höhe** über der Rollebene bleibt. Folge: Dieser Körper rollt vollkommen gleichmäßig. Er torkelt zwar auch, aber mit konstanter Geschwindigkeit; also wie ein Zylinder, nur dass er in Schlangenlinien rollt. Dieses »optimal-weiche« Rollen tritt beim folgenden Zweikreisroller ein:

Mittelpunktsabstand gleich Wurzel 2 mal Radius:
Der optimal rollende Zweikreisroller



Der Schwerpunkt liegt immer auf der gleichen Höhe – Folge: gleichmäßiges, »weiches« Rollen

Das Sphericon

Das *Sphericon* ist gewissermaßen ein verdrehter Doppelkegel.

Übung

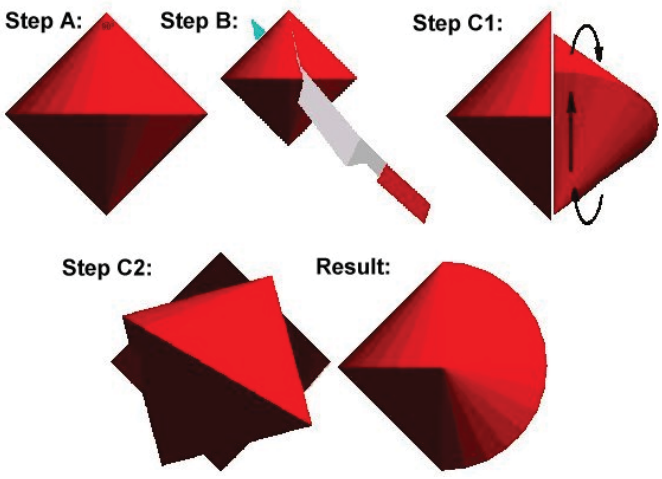
Bevor Sie weiter lesen: Beschreiben Sie möglichst genau, was Sie auf dem folgenden Bild sehen. Ergänzen Sie, was Sie nicht sehen können, durch Phantasie und Nachdenken.



Sphericon

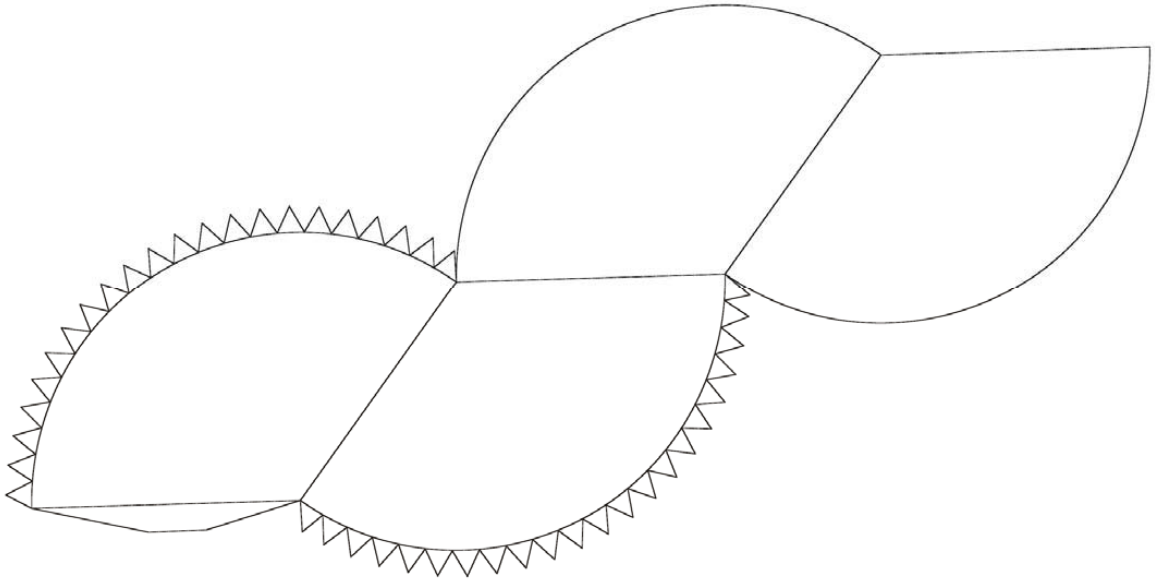
Ein massives Sphericon können Sie so herstellen: Kleben Sie zwei Kegel (mit rechtem Winkel an der Spitze) zu einem Doppelkegel zusammen, zersägen Sie diesen von Spitze zu Spitze und kleben Sie beide Teile um 90 Grad verdreht erneut zusammen.

Begründen Sie, warum die gedrehten Teile genau zusammenpassen.



Konstruktion eines Sphericons

Einfacher ist es wohl, das Sphericon aus Papier zusammenzubauen. Dazu benötigen Sie ein Netz.



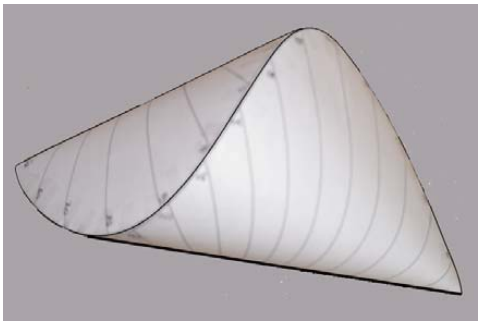
Sphericon-Netz

Übung

Bauen Sie ein Sphericon. (Vergrößern Sie das Netz und schneiden Sie es aus.)

Pita-Körper

Es gibt weitere Körper, die vollständig in die Ebene abrollbar sind. Sie kennen vielleicht ein Beispiel – aus der mazedonischen Küche: Die Abbildung zeigt ein so genanntes »Pita« (Pita-Körper).



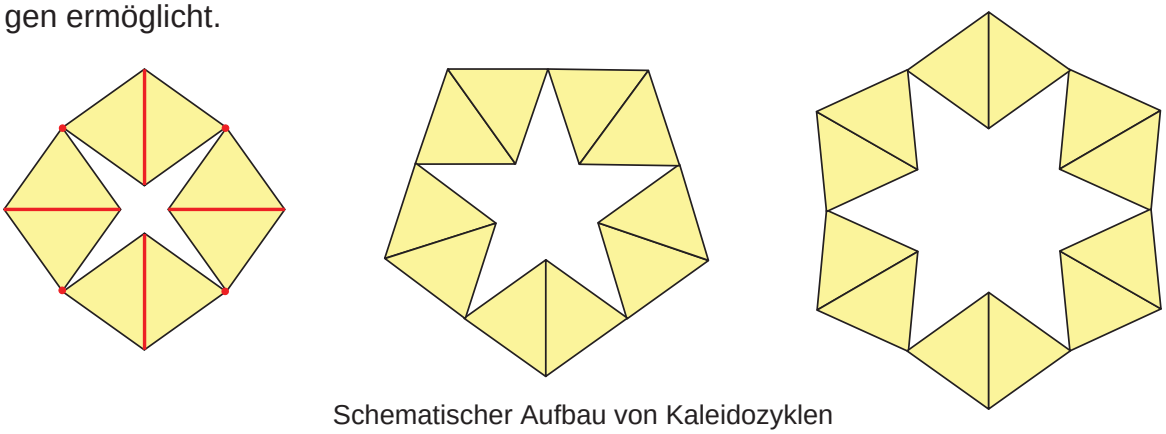
Übung

Versuchen Sie, das Netz eines Pita-Körpers zu zeichnen; also eine zweidimensionale Figur, die ausgeschnitten zu einem Pita-Körper geformt werden kann.

15 Kaleidozyklen: Umstülpbare Tetraeder-Ringe

Kaleidozyklen

Als *Kaleidozyklen* (von griechisch *kaló*: schön, *eidos:* Figur, *kyklos:* Ring) bezeichnet man Tetraeder-Ringe, die aus einer geraden Anzahl von kongruenten (nicht unbedingt regelmäßigen) Tetraedern bestehen, die in der Form eines Rings aneinanderhängen. Dabei sind benachbarte Tetraeder lediglich jeweils durch eine gemeinsame Kante verbunden, die wie ein Scharnier funktioniert und Bewegungen ermöglicht.



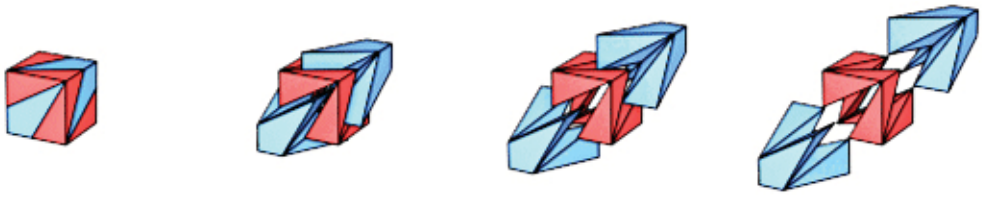
Schematischer Aufbau von Kaleidozyklen mit $2n$ Tetraedern (für $n = 4, 5, 6$)

Im linken Bild sind die Scharnierkanten rot markiert; entsprechend liegen sie in den anderen Bildern (die Punkte markieren Kanten, die auf der Zeichenebene senkrecht stehen)

Die bewegliche Verbindung der Tetraeder und die Ringform haben die verblüffende Folge, dass man einen Kaleidozyklus in einer endlosen Bewegung fortwährend »umstülpen« kann. Diese Umstülpbewegung wird von vielen Menschen, die sie an einem Modell mit eigenen Händen erleben, als faszinierendes Phänomen, als eine Art »rhythmischen Pulsierens« beschrieben.

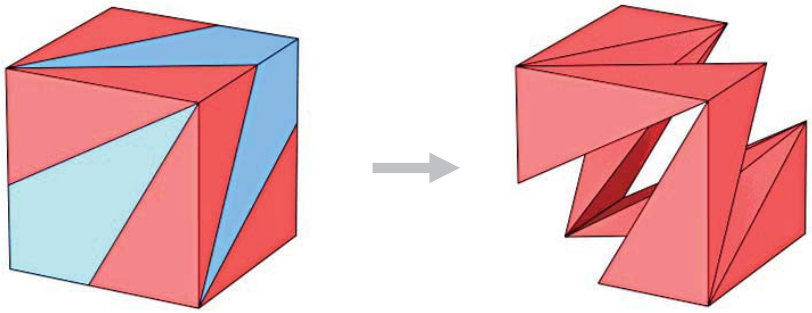
Würfelzerlegung: Wie das Oloid entdeckt wurde

Paul Schatz entdeckte, dass man einen Würfel auf eine ganz besondere und bislang unbekannte Weise in drei Teile teilen kann: in zwei kongruente »Riegelkörper« sowie einen »Würfelgürtel«. Alle drei Teile haben übrigens das gleiche Volumen.



Die Zerlegung des Würfels in zwei *Riegelkörper* (blau) und den *Würfelgürtel* (rot)

Der Würfelgürtel ist nichts anderes als ein Kaleidozyklus aus sechs Tetraedern.

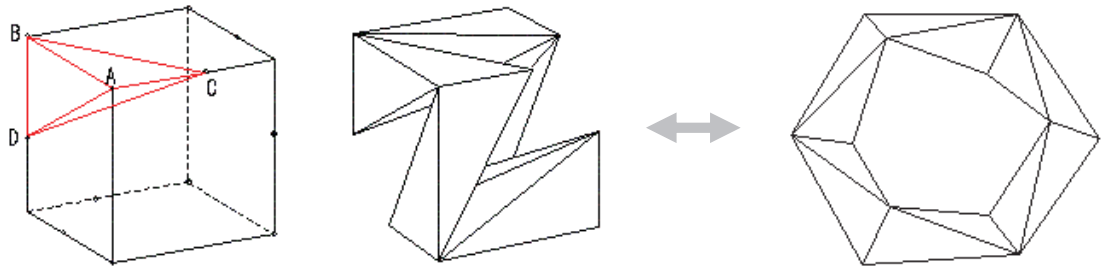


Würfel und Würfelgürtel



Umstülpbewegung des Würfelgürtels

Wie die Tetraeder des Würfelgürtels genau aufgebaut sind, zeigt die folgende Abbildung: Die Dreiecke *ABC* und *ABD* sind »halbe gleichseitige Dreiecke«, d.h. rechtwinklige Dreiecke mit den Längen $AB = a$, $AC = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot a$, $BC = \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot a$ (*a* ist die Würfel-Kantenlänge). Damit sind alle Tetraederkanten gegeben.



Die genaue Form der Würfelgürtel-Tetraeder

Wegen der Umstülpmöglichkeit bezeichnete Schatz den Würfelgürtel auch als »umstülpbaren Würfel«, was insofern ungenau ist, als der Gürtel nur einen Teil des Würfel bildet. Die Bewegung des Umstülpens, die er als erster bei einem geometrischen Objekt entdeckt hat, bezeichnete Schatz als *Inversion*. Man kann die Inversion als eine ebenso grundlegende geometrische Bewegungsart wie *Translation* (Verschiebung) und *Rotation* (Drehung) auffassen. Jedenfalls gilt das für Kaleidozyklen.

Zusammenhang des umstülpbaren Würfels mit dem Standard-Oloid

Was könnte der »umstülpbare Würfel« mit dem Oloid zu tun haben?! Schatz machte ein bemerkenswertes geometrisches Beobachtungsexperiment. Er führte die Umstülpbewegung fortlaufend durch, hielt dabei aber eines der Tetraeder fest. Und er beobachtete dabei gleichzeitig, welchen Weg eine fest gewählte lange Kante eines der anderen Tetraeder bei dieser fixierten Umstülpung zurücklegte. Seine Entdeckung ist verblüffend:

Oloidsatz

Fixiert man beim Würfelgürtel ein Tetraeder, so überstreicht eine lange Kante eines der frei beweglichen Tetraeder beim Umstülpen stets genau die Oberfläche eines (Standard-)Oloids.