memo GEO

Sätze der Vorlesung
»Raum und Form«

Prof. Dr. Peter Berger

Fassung vom 14.06.2014

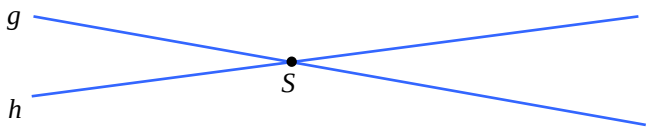
Dieser Überblick enthält alle wichtigen Sätze der Vorlesung – ohne Beweise, dafür mit einigen Erläuterungen und vielen möglichst instruktiven, weitgehend neu gezeichneten Abbildungen. An Definitionen sind nur die nicht ganz elementaren aufgenommen worden. Lerninhalte, die wir nicht als Sätze formuliert haben und die hier folglich nicht zu finden sind, sollten dennoch nicht vergessen sein!

Lage von Geraden

Zwei Geraden können in der Ebene auf drei, im Raum auf vier Arten relativ zueinander liegen:

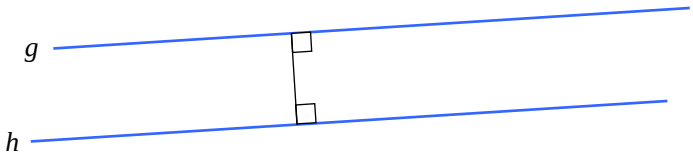
in Ebene und Raum:

(1) kopunktal *(einander in einem Punkt schneidend)*



$g \cap h = \{S\}$

(2) parallel und verschieden



$g \cap h = \varnothing$

(3) parallel und identisch

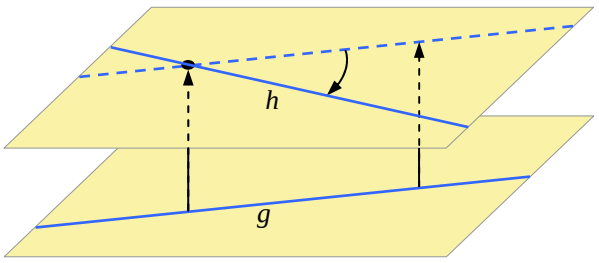


$g = h$

nur im Raum:

(4) windschief (nicht in einer gemeinsamen Ebene liegend)

(Beispiel: Sie haben eine Gerade g und eine exakte Kopie h davon, beide also genau aufeinander liegend; die Gerade h verschieben Sie nun senkrecht nach oben und verdrehen sie anschließend noch horizontal; danach sind g und h windschief zueinander. Es gibt keine Ebene, die beide Geraden zugleich enthalten würde.)

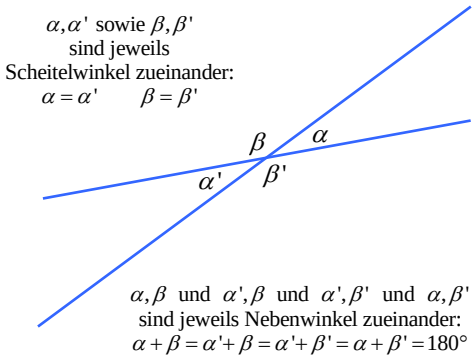


Winkel

- Einer Volldrehung entspricht ein *Vollwinkel* (Winkelmaß: 360°).
- Einer Halbdrehung entspricht ein Halbwinkel oder *gestreckter Winkel* (Winkelmaß: 180°).
- Einer Vierteldrehung entspricht ein *rechter Winkel* (Winkelmaß: 90°)

(Die Bezeichnung „rechter Winkel“ entspringt der früheren Bedeutung von „recht“ im Sinne von „richtiger“, „korrekter“ Winkel, z.B. beim Hausbau.)

Winkel an geschnittenen Geraden



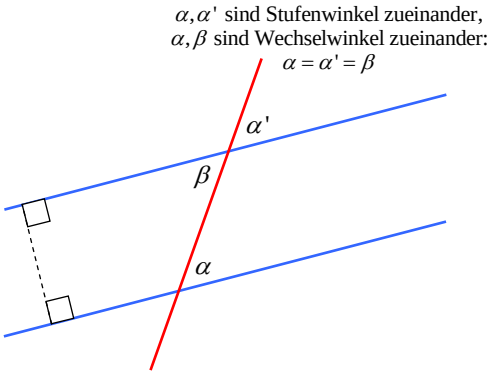
An zwei kopunktalen Geraden gibt es zwei Arten von Winkeln (genauer: von Beziehungen zwischen zwei Winkeln): Scheitelwinkel und Nebenwinkel.

Scheitelwinkelsatz
Scheitelwinkel sind gleich.

Nebenwinkelsatz
Nebenwinkel ergänzen einander zum gestreckten Winkel (Winkelmaß 180°).

Bei zwei verschiedenen Geraden, die von einer dritten geschnitten werden, kommen zwei Arten von Winkeln hinzu (genauer: von Beziehungen zwischen zwei Winkeln): Stufenwinkel und Wechselwinkel

Stufen-/Wechselwinkelsatz
Genau dann, wenn die beiden geschnittenen Geraden parallel sind, gilt: Stufenwinkel und Wechselwinkel sind gleich.



Elementare Vergleiche

Satz vom kürzesten Weg
Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten *A*, *B* ist in Ebene und Raum stets die Strecke $\overline{AB}$.

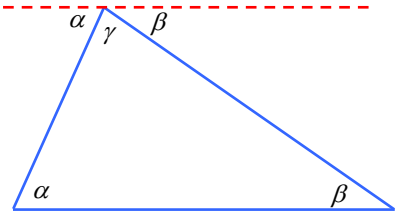
Dreiecksungleichung
Die Summe zweier Seitenlängen eines Dreiecks ist stets größer als die Länge der dritten Seite.

Winkelvergleichssatz
In einem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets der größere Winkel gegenüber.

Winkel am Dreieck

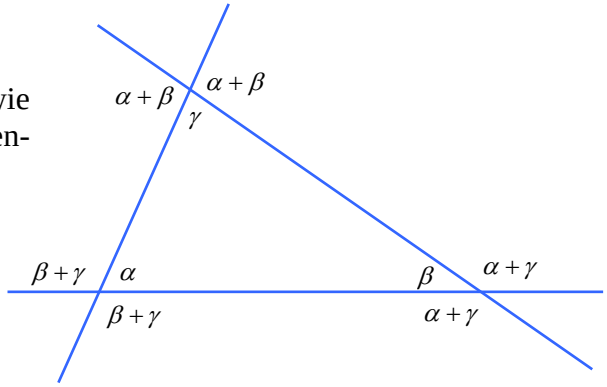
Innenwinkelsatz
Die Innenwinkel eines Dreiecks ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel (Winkelmaß 180°).

(Innenwinkelsumme = Basiswinkel + Scheitelwinkel = Wechselwinkel + Scheitelwinkel = gestreckter Winkel)



Außenwinkelsatz
Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

(Innenwinkel + Nebenwinkel = 180° = Innenwinkel + die beiden anderen Innenwinkel)



Kongruenzabbildungen

Zwei Figuren heißen kongruent, wenn in ihnen entsprechende Winkel und entsprechende Strecken gleich groß sind.

Eine Kongruenzabbildung ist eine bijektive Abbildung der Ebene auf sich, die jede Figur stets auf eine dazu kongruente Figur abbildet. Die Verkettung (Hintereinanderausführung) von Kongruenzabbildungen ist stets wieder eine Kongruenzabbildung.

Es gibt fünf Typen von Kongruenzabbildungen: Achsenspiegelungen, Punktspiegelungen, Rotationen (Drehungen), Translationen (Parallelverschiebungen) und Gleitspiegelungen (Schubspiegelungen). Jede Kongruenzabbildung lässt sich auch allein durch Verkettung von (maximal drei) Achsenspiegelungen realisieren.

Sätze über Kongruenzabbildungen

(1) Kongruenzabbildungen sind *geradentreu*, *streckentreu*, *längentreu* (daher auch *flächentreu* und *längenverhältnistreu*) und *winkelmaßtreu* (daher auch *parallelentreu*).

(2) Die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an kopunktalen Achsen ist eine *Rotation*. Jede Rotation lässt sich umgekehrt auch durch Verkettung zweier Achsenspiegelungen an kopunktalen Achsen realisieren.

(3) Die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an parallelen Achsen ist eine *Translation*. Jede Translation lässt sich umgekehrt auch durch Verkettung zweier Achsenspiegelungen an parallelen Achsen realisieren.

(4) Die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen an senkrechten Achsen ist eine *Punktspiegelung (Halbdrehung)*. Jede Punktspiegelung lässt sich umgekehrt auch durch Verkettung zweier Achsenspiegelungen an senkrechten Achsen realisieren.

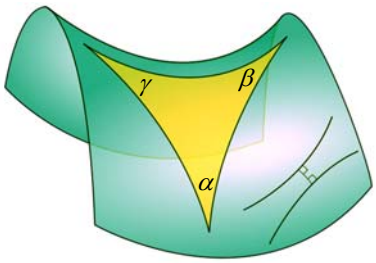
(5) Die Verkettung von drei Achsenspiegelungen ist entweder wieder eine Achsenspiegelung (genau dann, wenn die Achsen im Büschel liegen, d.h. parallel oder kopunktal sind) oder eine *Gleitspiegelung*. Jede Gleitspiegelung lässt sich umgekehrt auch durch Verkettung dreier Achsenspiegelungen an nicht im Büschel liegenden Achsen realisieren.

(6) ***Reduktionssatz:*** Die Verkettung von vier Achsenspiegelungen lässt sich stets auf eine Verkettung von zwei Achsenspiegelungen reduzieren (ist also entweder eine Translation oder eine Rotation). *(Mehr als drei Achsenspiegelungen braucht man also nie, um eine beliebige Kongruenzabbildung zu realisieren.)*

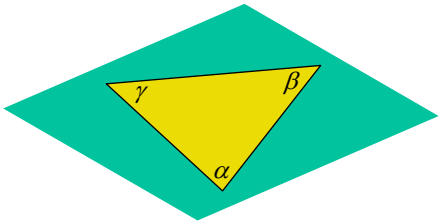
Innenwinkel

Innenwinkelsatz für ebene und gekrümmte Dreiecke
Die Summe der Innenwinkelmaße beträgt

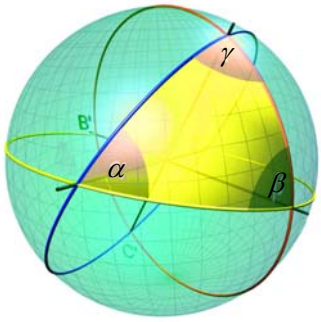
- im *hyperbolischen* Dreieck: 0° bis weniger als 180°;
- im *ebenen* Dreieck: 180°;
- im *sphärischen* Dreieck: mehr als 180° bis max. 540°.



hyperbolisches Dreieck
$0° \le \alpha + \beta + \gamma < 180°$



ebenes Dreieck
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



sphärisches Dreieck
$180° < \alpha + \beta + \gamma \le 3 \cdot 180° = 540°$

Tiefere Erläuterung für Interessierte:

Ebenen haben keine Krümmung (Krümmungsmaß Null). Kugeloberflächen haben konstante konvexe Krümmung (Krümmungsmaß positiv); hyperbolische Flächen haben variable und teils konvexe, teils konkave Krümmung (Krümmungsmaß negativ).

Vielecksseiten sind auf allen Flächen immer Strecken. Wie in der Ebene sind Strecken auch auf gekrümmten Flächen stets definiert als die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten; auf der Kugel sind dies stets Teile von Großkreisen, das sind Kreise mit dem Radius der Kugel, z.B. der Äquatorkreis. Denn Strecken sind auf allen Flächen stets Teile von Geraden; und die Geraden auf der Kugel sind eben die Großkreise.

Auch auf gekrümmten Flächen wird der Winkel zwischen zwei Strecken mit dem gemeinsamen Punkt P definiert als der Winkel zwischen den beiden Geraden durch P, auf denen die beiden Strecken liegen. Auf der Kugel ist also ein Innenwinkel eines Vielecks in der Ecke P immer der Winkel zwischen den beiden Großkreisen durch P, auf denen die Seiten des Vielecks liegen, die in P zusammenstoßen (s. Abb. rechts).

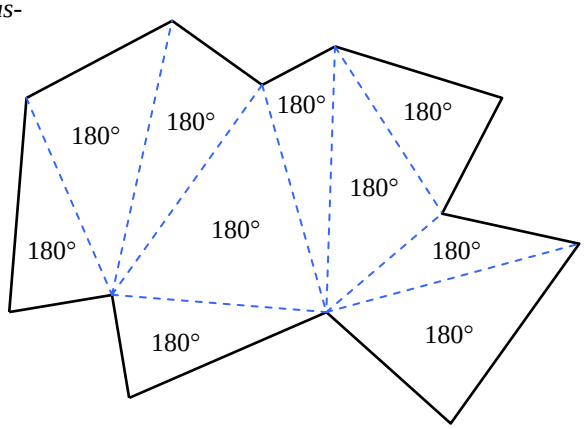
In der Abb. links ist eine spezielle hyperbolische Fläche dargestellt, eine sogenannte „Sattelfläche". Rechts unten sind darauf zwei parallele hyperbolische Geraden angedeutet.

Die übliche Geometrie der Ebene bzw. des Raumes ist die sogenannte euklidische Geometrie. In ihr gilt neben anderen Axiomen auch das Parallelenaxiom: „Zu jeder Geraden und jedem Punkt P außerhalb von ihr gibt es genau eine Parallele durch P." Auf gekrümmten Flächen gilt das Parallelenaxiom aber nicht; auf gekrümmten Flächen gelten die sogenannten nichteuklidischen Geometrien, in denen das Parallelenaxiom verletzt ist. In seiner allgemeinen Relativitätstheorie hat Einstein gezeigt, dass in den Weiten des Weltalls die euklidische Geometrie nicht gilt, weil Schwerefelder den Raum krümmen. Die euklidische Geometrie ist lediglich eine Annäherung an die im Weltall wirklich geltenden Gesetze; sie gilt nur in lokal eng begrenzten Teilräumen und auch dort nur näherungsweise; je enger der Teilraum, desto besser die Annäherung: z.B. auf Ihrem Zeichenblatt oder in Ihrer Wohnung. Eine bisher ungelöste große Frage der Physik ist, ob die Geometrie des Weltalls eine sphärische (allgemein: elliptische) Geometrie ist oder aber eine hyperbolische Geometrie.

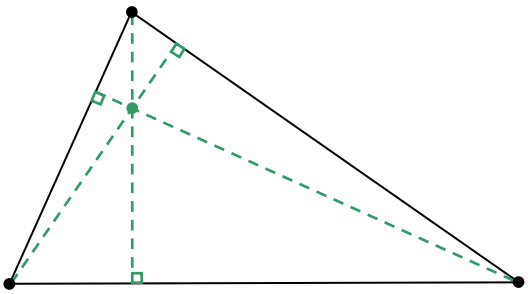
(Im weiteren Verlauf betrachten wir flache Figuren ausschließlich in der Ebene, nicht auf gekrümmten Flächen.)

Innenwinkelsatz für ebene Vielecke
In jedem ebenen *n*-Eck ist die Summe der Innenwinkelmaße stets $(n-2)\cdot 180°$.

(Die Zerlegung von Vielecken in Dreiecke nennt man „Triangulation".)

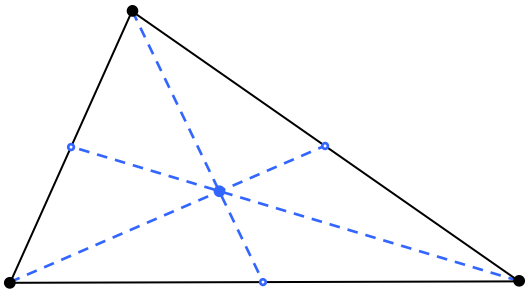


Besondere Punkte im Dreieck



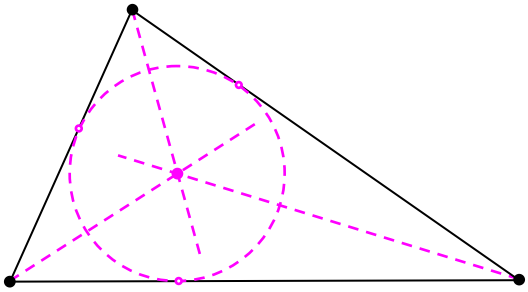
Höhenschnittpunktsatz
Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt. Dieser Höhenschnittpunkt liegt

- im spitzwinkligen Dreieck *innerhalb* des Dreiecks;
- im rechtwinkligen Dreieck *im Scheitel* des rechten Winkels;
- im stumpfwinkligen Dreieck *außerhalb* des Dreiecks.



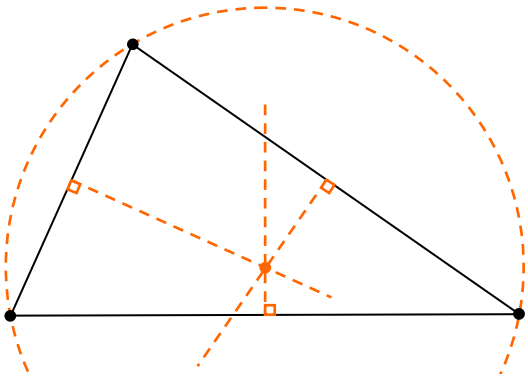
Schwerpunktsatz
Die drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

(Die Seitenhalbierenden heißen auch „Schwerlinien“ des Dreiecks; ihr Schnittpunkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks.)



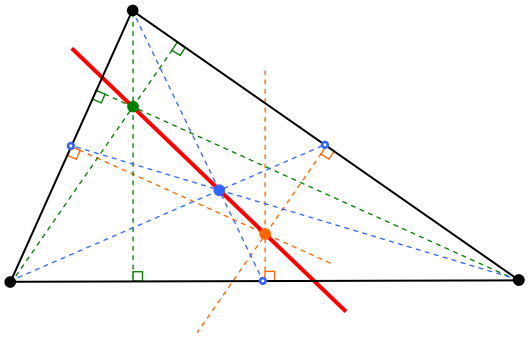
Inkreissatz
Die Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt. Dieser ist der Mittelpunkt des *Inkreises*.

(Jedes Dreieck hat also einen Inkreis, Vierecke dagegen haben nur einen Inkreis, wenn sie Tangentenvierecke sind, s.u.)



Umkreissatz
Die Mittelsenkrechten der drei Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt. Dieser ist der Mittelpunkt des *Umkreises*.

(Jedes Dreieck hat also einen Umkreis, Vierecke dagegen haben nur einen Umkreis, wenn sie Sehnenvierecke sind, s.u.)



Eulerscher Satz
In jedem Dreieck liegen Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt und Umkreismittelpunkt auf einer Geraden.

(Diese Gerade ist die „eulersche Gerade“ des Dreiecks. Beachte: Der Inkreismittelpunkt liegt i.a. nicht darauf.)

Zu den besonderen Punkten im Dreieck, zumindest zu den „interessanten“, gehören auch die Punkte mit den geringsten Gesamtabständen zu den Ecken bzw. den Seiten des Dreiecks. Einfache Resultate erhält man hier aber nur für das gleichseitige Dreieck.
Übrigens ist ein gleichseitiges Dreieck natürlich auch immer gleichwinklig. Man sollte daher besser von regelmäßigen Dreiecken sprechen. Vielecke heißen regelmäßig, wenn sie sowohl gleichseitig als auch gleichwinklig sind. Für Vielecke mit mehr als 3 Ecken sind Gleichseitigkeit und Gleichwinkligkeit, im Gegensatz zu den Dreiecken, keineswegs „aneinander gekoppelt“ So sind die gleichwinkligen Vierecke die Rechtecke, die gleichseitigen Vierecke aber die Rauten. Regelmäßige Vierecke sind also die rechteckigen Rauten oder, was das Gleiche ist, die rautenförmigen Rechtecke – kurz: die Quadrate.

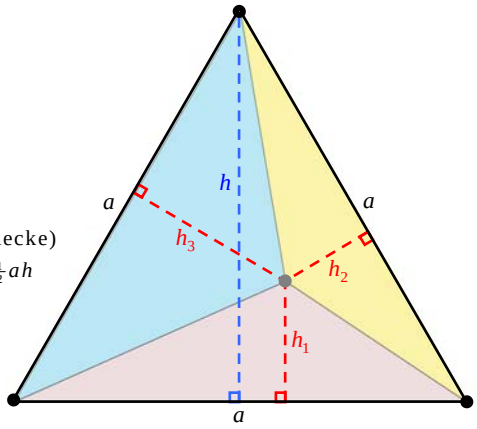
Satz vom kürzesten Eckenabstand
Der *Umkreismittelpunkt* eines *gleichseitigen* Dreiecks hat unter allen Punkten der Ebene die kleinste Summe der Abstände von den drei *Ecken* des Dreiecks.

Man könnte nun vermuten, der entsprechende Punkt mit dem geringsten Gesamtabstand zu den Seiten sei vielleicht der Inkreismittelpunkt. Das ist schön symmetrisch gedacht, aber falsch; sogar „total falsch“, denn der Witz ist, dass es so einen singulären idealen Punkt gar nicht gibt, weil nämlich alle Punkte des regelmäßigen Dreiecks exakt denselben Gesamtabstand zu den Seiten haben! (Das war der springende Punkt beim „Sucher und Surfer“-Problem: Der Sucher sollte sein Zelt am Umkreismittelpunkt aufschlagen; der Surfer dagegen kann sich niederlassen, wo er mag.)

Satz von Viviani
Für alle Punkte im Inneren und auf dem Rand eines *gleichseitigen* Dreiecks ist die Summe der Abstände von den drei *Seiten* konstant.

Flächenvergleich (4 Dreiecke)

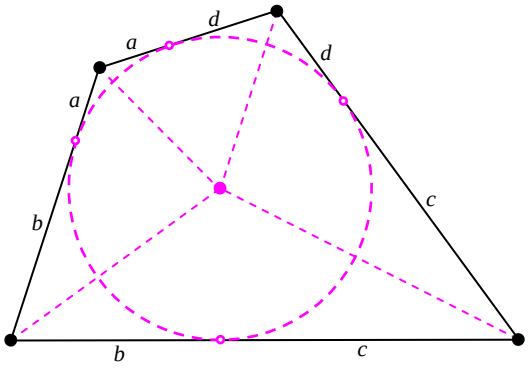
$$\tfrac{1}{2}ah_1 + \tfrac{1}{2}ah_2 + \tfrac{1}{2}ah_3 = \tfrac{1}{2}ah$$
$$\Downarrow$$
$$h_1 + h_2 + h_3 = h$$

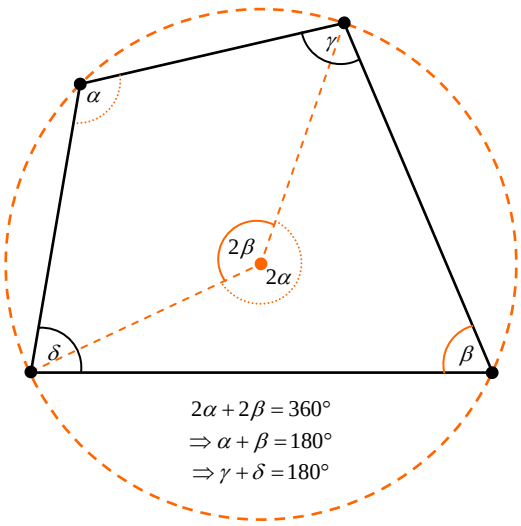


Kreise am Viereck

Vierecke haben nur in Spezialfällen einen Um- bzw. Inkreis.

Satz vom Tangentenviereck
Ein Viereck hat genau dann einen *Inkreis*, wenn gegenüberliegende Seitenpaare gleiche Gesamtlänge haben. *(Vierecke mit Inkreis heißen Tangentenvierecke.)*



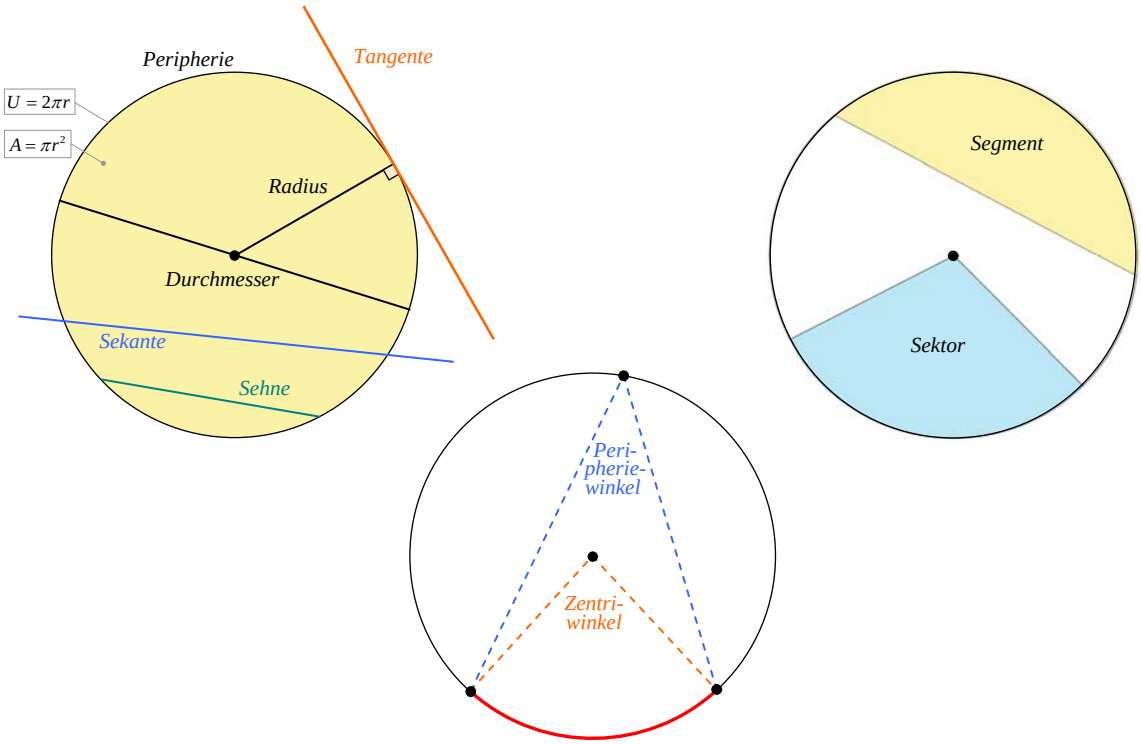


$$2\alpha + 2\beta = 360°$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = 180°$$
$$\Rightarrow \gamma + \delta = 180°$$

Satz vom Sehnenviereck
Ein Viereck hat genau dann einen *Umkreis*, wenn gegenüberliegende Innenwinkelpaare einander zu einem gestreckten Winkel ergänzen (Winkelmaß 180°). *(Vierecke mit Umkreis heißen Sehnenvierecke.)*

(In der Abb. wird der Zentriwinkelsatz angewandt, s.u.)

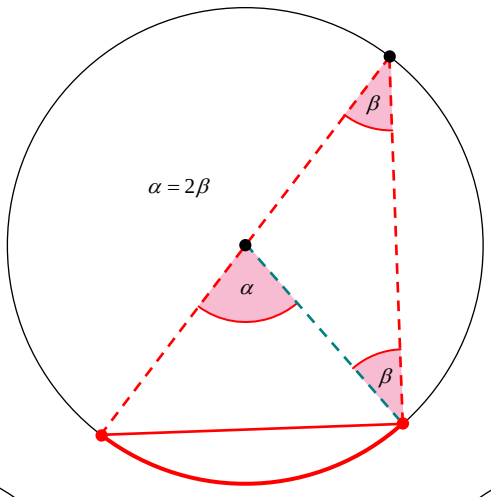
Winkel am Kreis



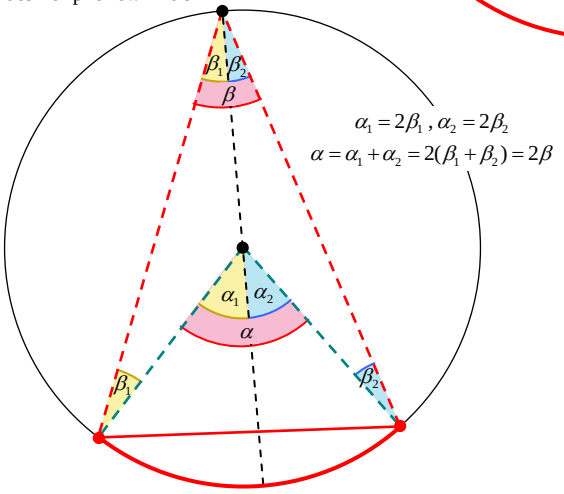
Zentriwinkelsatz

Jeder Peripheriewinkel über einem Kreisbogen ist halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel.

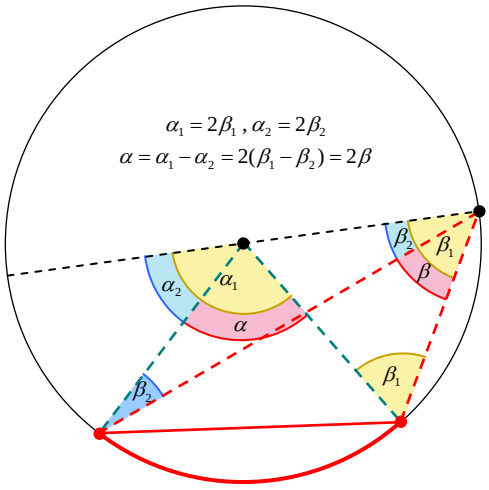
Kreismittelpunkt auf Schenkel
des Peripheriewinkels

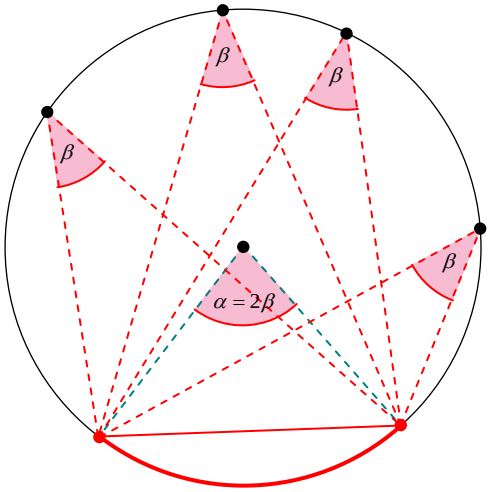


Kreismittelpunkt innerhalb
des Peripheriewinkels

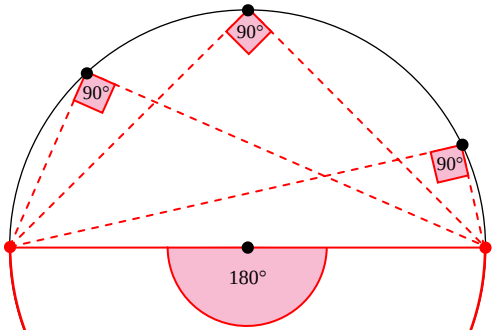


Kreismittelpunkt außerhalb
des Peripheriewinkels

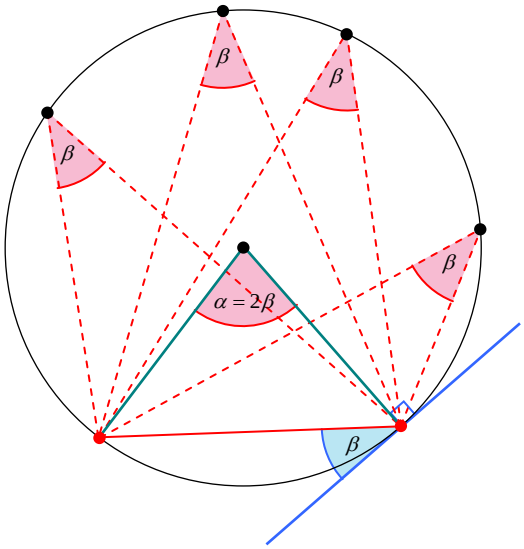




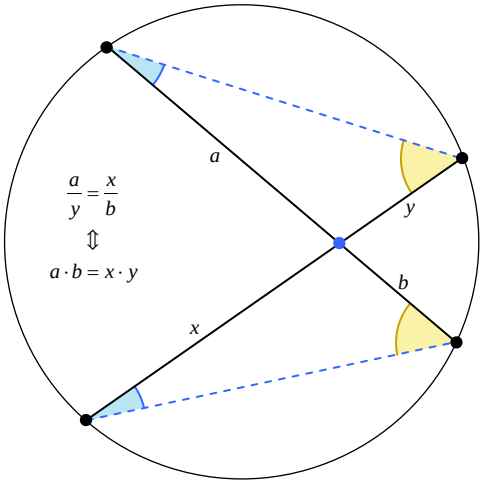
Peripheriewinkelsatz
Alle Peripheriewinkel über einem Kreisbogen sind gleich. *(Da alle gleich dem halben Zentriwinkel sind.)*



Satz des Thales
Peripheriewinkel über dem Halbkreis (über dem Durchmesser) sind stets rechte Winkel.
(Folgt unmittelbar aus dem Peripheriewinkelsatz.)



Sehnentangentenwinkelsatz
Ein Sehnentangentenwinkel ist ebenso groß wie jeder Peripheriewinkel über dem Kreisbogen, der zwischen den Schenkeln des Sehnentangentenwinkels liegt.



Sehnensatz
Schneiden sich im Kreis zwei Sehnen, so ist das Produkt der Sehnenabschnittslängen bei beiden gleich.
(Folgt aus dem Peripheriewinkelsatz und der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke, s.u.)

Geometrische Örter

Als geometrischen Ort bezeichnet man die Menge aller Punkte mit einer bestimmten vorgegebenen Eigenschaft. Meist haben solche Punktmengen die Form von Kurven, weswegen man sie dann auch als Ortskurven bezeichnet. (Beachte: Der Plural lautet „geometrische Örter“.)

Satz über geometrische Örter

(1) Der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei Punkten *A, B* gleichen Abstand haben, ist die *Mittelsenkrechte* der Strecke $\overline{AB}$.

(2) Der geometrische Ort aller Punkte, die von einer Geraden *g* einen vorgegebenen Abstand haben, ist das *Parallelenpaar* zu *g* im gegebenen Abstand.

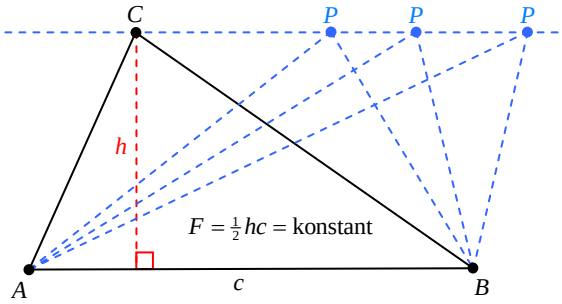
(3) Der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei Parallelen gleichen Abstand haben, ist die *Mittelparallele*.

(4) Der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei kopunktalen Geraden gleichen Abstand haben, sind die beiden *Winkelhalbierenden*.

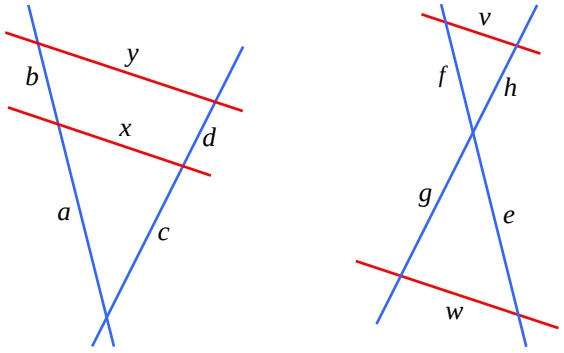
(5) Der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt *M* den Abstand *r* haben, ist der *Kreis* um *M* mit Radius *r*.

(6) Der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die Strecke $\overline{AB}$ unter demselben Winkel α erscheint, ist der Kreisbogen über der Sehne $\overline{AB}$ mit Mittelpunktswinkel 2α. *(siehe Peripheriewinkelsatz)*

(7) Der geometrische Ort aller Punkte *P*, für die das Dreieck *ABP* denselben Flächeninhalt hat wie das Dreieck *ABC*, ist die Parallele zur Strecke $\overline{AB}$ durch *C*.



Strahlensätze



Strahlensatzfiguren

Erster Strahlensatz

In einer Strahlensatzfigur sind entsprechende Streckenverhältnisse auf den kopunktalen Geraden stets gleich.

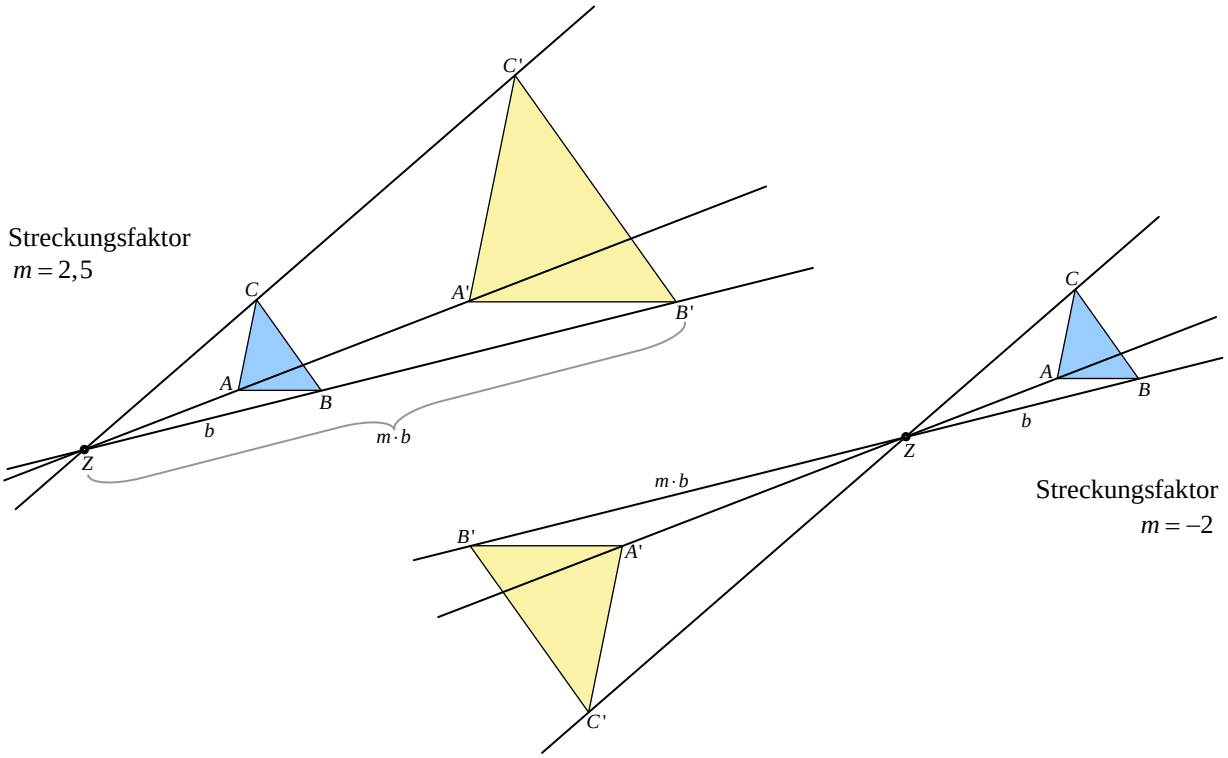
z.B. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ $\frac{e}{g}=\frac{f}{h}$ $\frac{e}{e+f}=\frac{g}{g+h}$

Zweiter Strahlensatz

In einer Strahlensatzfigur sind entsprechende Streckenverhältnisse auf einer der kopunktalen Geraden und den beiden Parallelen stets gleich.

z.B. $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\frac{w}{v}$ $\frac{a}{a+b}=\frac{x}{y}$ $\frac{h}{v}=\frac{g}{w}$ $\frac{x}{c}=\frac{y}{c+d}$

Zentrische Streckung



Für einen Punkt Z der Ebene (des Raumes) und eine reelle Zahl $m \neq 0$ ist die zentrische Streckung mit Zentrum Z und Streckungsfaktor m die Abbildung, die jedem Punkt P der Ebene (des Raumes) einen Bildpunkt P' zuordnet mit

- *Z, P und P' liegen auf einer Geraden;*
- *ist $m > 0$, so liegen P und P' auf derselben Seite von Z;*
- *ist $m < 0$, so liegen P und P' auf verschiedenen Seiten von Z;*
- *die Länge der Strecke $\overline{ZP'}$ ist das $|m|$-fache der Länge der Strecke $\overline{ZP}$:* $\left|\overline{ZP'}\right| = |m| \cdot \left|\overline{ZP}\right|$.

Satz über zentrische Streckungen
Eine zentrische Streckung mit Streckungsfaktor *m*

(1) vergrößert (für $|m| > 1$) bzw. verkleinert (für $|m| < 1$) alle Strecken mit dem konstanten Faktor $|m|$ bzw. lässt die Längen unverändert (für $|m| = 1$).

(2) hat als Umkehrabbildung die zentrische Streckung mit demselben Zentrum und dem Streckungsfaktor $m' = 1/m$

(3) bildet jede Strecke auf eine dazu parallele Strecke ab; zentrische Streckungen sind also erst recht parallelentreu *(d.h. Parallelen werden stets auf Parallelen abgebildet)*.

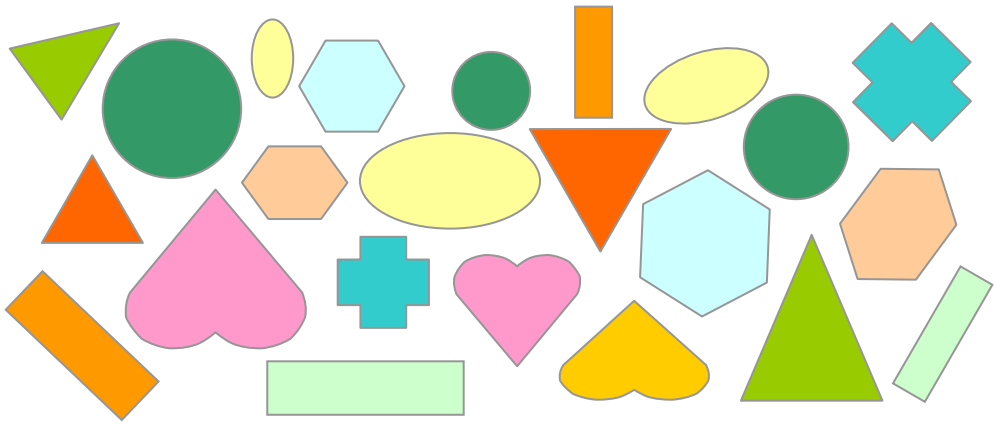
(4) bildet jede ebene (räumliche) Figur auf eine dazu ähnliche ebene (räumliche) Figur ab. (Zentrische Streckungen sind also spezielle *Ähnlichkeitsabbildungen*.)

(5) bildet eine Gerade wieder auf eine Gerade, einen Kreis wieder auf einen Kreis, einen Winkel auf einen gleichgroßen Winkel ab. (Zentrische Streckungen sind also *geradentreu*, *kreistreu* und *winkeltreu*.)

(6) bildet eine flächige Figur auf eine flächige Figur mit dem m^2-fachen Flächeninhalt ab. *(Gilt für beliebige ebene und gekrümmte Figuren.)*

(7) bildet eine räumliche Figur auf eine räumliche Figur mit dem $|m|^3$-fachen Rauminhalt ab. *(Betragsstriche, da für negatives m auch m^3 negativ wäre; bei m^2 sind Betragsstriche überflüssig.)*

Ähnlichkeit



Die gleichfarbigen Figuren (und nur diese) sind zueinander ähnlich.

Der Begriff „Ähnlichkeit“ ist eine Erweiterung des Begriffs „Kongruenz“. Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn in ihnen entsprechende Winkel gleich groß sind und das Längenverhältnis (also nicht wie bei der Kongruenz die Länge) entsprechender Strecken gleich ist. Damit sind kongruente Figuren immer auch ähnlich. Zwei Figuren sind genau dann kongruent, wenn sie ähnlich und flächengleich sind.

Eine Ähnlichkeitsabbildung ist eine bijektive Abbildung der Ebene auf sich selbst, die jede Figur auf eine dazu ähnliche Figur abbildet. Ähnlichkeitsabbildungen sind um die zusätzliche Möglichkeit der zentrischen Streckung erweiterte Kongruenzabbildungen. Es gibt vier Typen von Ähnlichkeitsabbildungen: Drehstreckungen und Verschiebungen (beide orientierungstreu) sowie Klappstreckungen und Gleitspiegelungen (beide orientierungsumkehrend). Echte Ähnlichkeitsabbildungen sind davon nur Dreh- und Klappstreckungen.

Sätze über Ähnlichkeitsabbildungen

(1) Jede Ähnlichkeitsabbildung kann durch *Verkettung von Kongruenzabbildungen und zentrischen Streckungen* ausgeführt werden. *(Jede Kongruenzabbildung und jede zentrische Streckung allein ist bereits eine Ähnlichkeitsabbildung.)*

(2) Ähnlichkeitsabbildungen sind *(wie Kongruenzabbildungen) geradentreu, streckentreu, winkelmaßtreu* (daher auch *parallelentreu*) und *längenverhältnistreu*. *(Im Gegensatz zu Kongruenzabbildungen sind Ähnlichkeitsabbildungen i.a. nicht längentreu, daher auch nicht flächentreu.)*

Folgerungen

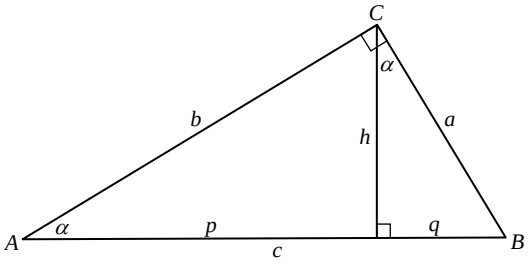
(1) Alle Punkte sind zueinander ähnlich. *(Und auch kongruent.)*
(2) Alle Strecken sind zueinander ähnlich. *(Aber nicht kongruent.)*
(3) Alle Geraden sind zueinander ähnlich. *(Und auch kongruent. Eine Gerade und eine Strecke sind niemals ähnlich.)*
(4) Alle Ebenen sind zueinander ähnlich. *(Und auch kongruent.)*
(5) Alle gleichseitigen Dreiecke sind zueinander ähnlich. *(Aber nicht alle gleichschenkligen.)*
(6) Alle Quadrate sind zueinander ähnlich. *(Aber nicht alle Rechtecke, auch nicht alle Rauten.)*
(7) *Allgemein:* Alle regelmäßigen n-Ecke (für festes n) sind zueinander ähnlich.
(8) Alle Kreise sind zueinander ähnlich.
(9) Alle Würfel sind zueinander ähnlich.
(10) Alle Kugeln sind zueinander ähnlich.

Ähnlichkeitssätze (Dreieck)
Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie übereinstimmen in

- zwei Winkeln *(und dann automatisch in allen drei Winkeln)*;
- zwei entsprechenden Seitenverhältnissen *(dann stimmen sie in allen entsprechenden Seitenverhältnissen überein; es gibt insgesamt sechs, wenn man die Kehrwerte mitzählt)*;
- einem Winkel und dem Verhältnis der beiden anliegenden Seiten;
- dem Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite.

(Jede einzelne der vier Übereinstimmungen reicht bereits für die Ähnlichkeit.)

Satzgruppe des Pythagoras

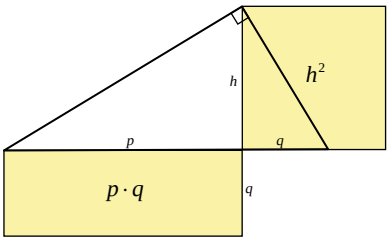


Zerlegungssatz
Die Hypotenusenhöhe eines rechtwinkligen Dreiecks zerlegt dieses in zwei dazu ähnliche Teildreiecke. (D.h. alle drei Dreiecke sind zueinander ähnlich.)

(Anm.: Man kann statt „Hypotenusenhöhe“ auch kurz „Höhe“ sagen, da die beiden Kathetenhöhen jeweils identisch mit der anderen Kathete sind, weswegen man sie in der Regel nicht als „Höhen“ bezeichnet, so dass keine Verwechslungsgefahr besteht.)

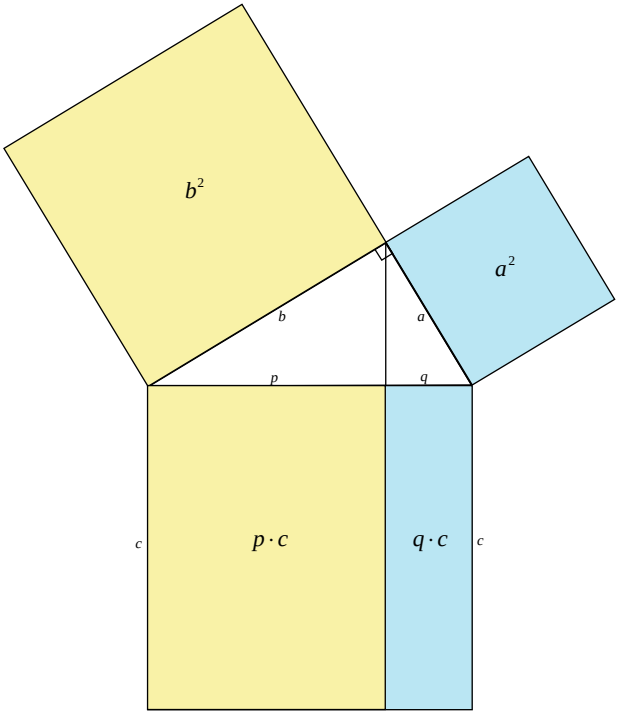
Höhensatz des Euklid
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenusenhöhe gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte.

$$h^2 = pq$$



Kathetensätze des Euklid
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkt des zugehörigen Hypotenusenabschnitts und der Hypotenuse.

$$a^2 = qc$$
$$b^2 = pc$$



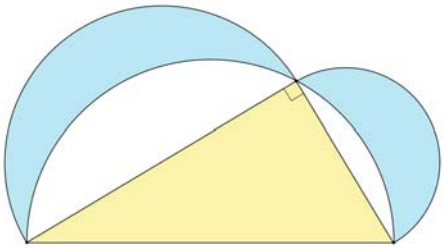
Satz des Pythagoras
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

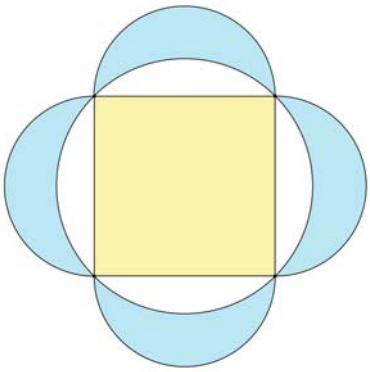
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Umkehrung des Satzes des Pythagoras
Ist in einem Dreieck das Quadrat einer Seite gleich der Summe der beiden anderen Seitenquadrate, so ist das Dreieck rechtwinklig.

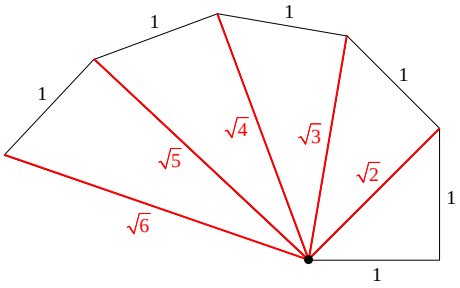
Pythagoras-Anwendungen

Die Summe der Flächeninhalte der Möndchen des Hippokrates (Lunulae Hippocratis) ist gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks bzw. des Quadrats:

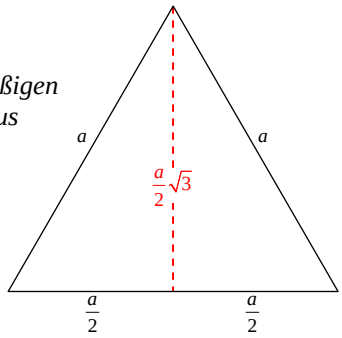




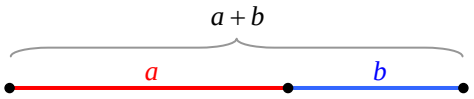
Mit der „Pythagoras-Spirale“ kann man geometrisch die Wurzeln aus allen natürlichen Zahlen ziehen:



Die Höhe des regelmäßigen Dreiecks ergibt sich aus seiner rechtwinkligen Hälfte:



Goldener Schnitt



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi \quad \textit{goldene Zahl}$$

Der goldene Schnitt (die stetige Teilung) einer Strecke ist die Zerlegung der Strecke in einen größeren und einen kleineren Teil, so dass die Streckenverhältnisse „ganze Strecke zu größerem Teil“ und „größerer Teil zu kleinerem Teil“ gleich sind. Dieses Streckenverhältnis heißt „goldene Zahl“ (Symbol: Φ).

Grundgleichungssatz

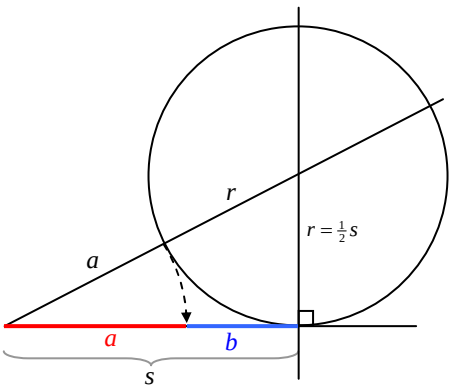
Zwei positive Zahlen a und b stehen genau dann im Verhältnis des goldenen Schnitts, wenn sie die quadratische Gleichung $b^2 + ab = a^2$ erfüllen *(Grundgleichung des goldenen Schnitts).*

Die positive Lösung dieser Gleichung ist $b = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$, dies ist äquivalent zu

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$$

Konstruktionssatz

Die Konstruktion gemäß der nebenstehenden Abbildung ist allein mit Zirkel und Lineal ausführbar und teilt die Strecke s im goldenen Schnitt in die beiden Teilstrecken a und b.

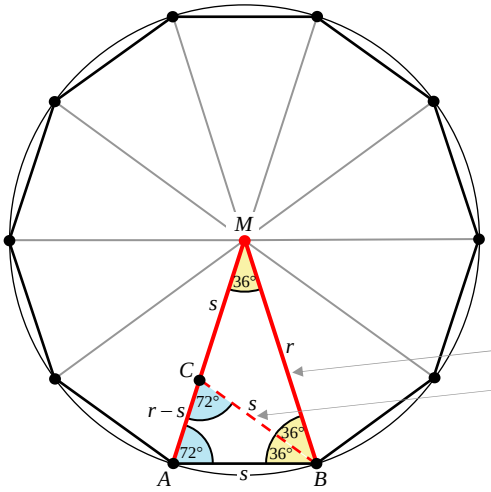


Satz (Eigenschaften von Φ)

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \qquad \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \qquad \Phi^n = F_n \cdot \Phi + F_{n-1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad \text{(Formel von } \textit{Binet}\text{)}$$

Die goldene Zahl Φ kann von allen reellen Zahlen am schlechtesten durch Brüche angenähert werden; Φ ist in diesem Sinne die „irrationalste Zahl“.



goldene Dreiecke

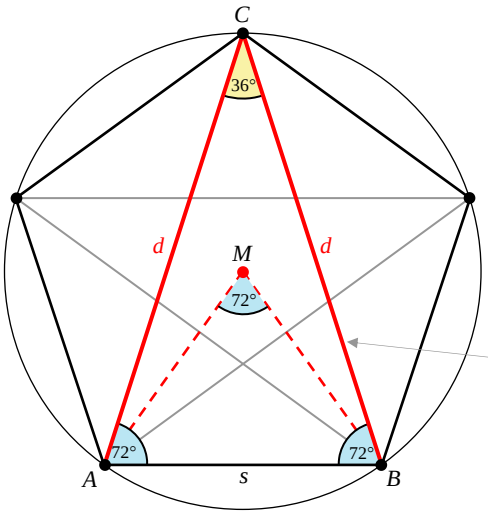
$\Delta ABM \sim \Delta ABC$

$\Downarrow$

$\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s} = \Phi$

Zehnecksatz

Im regelmäßigen Zehneck stehen Umkreisradius-länge und Seitenlänge im goldenen Schnitt.



goldenes Dreieck

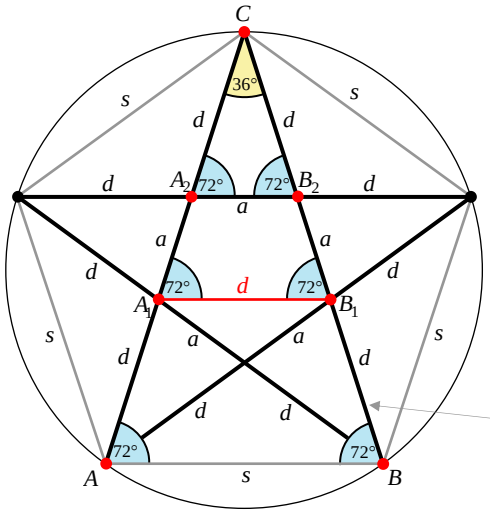
ΔABC

$\Downarrow$

$\frac{d}{s} = \Phi$

Fünfecksatz

Im regelmäßigen Fünfeck stehen Diagonalenlänge und Seitenlänge im goldenen Schnitt.



goldene Dreiecke

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C \sim \Delta A_2B_2C$

$\Downarrow$

$\frac{s}{d} = \frac{d}{a} = \Phi$

Pentagrammsatz

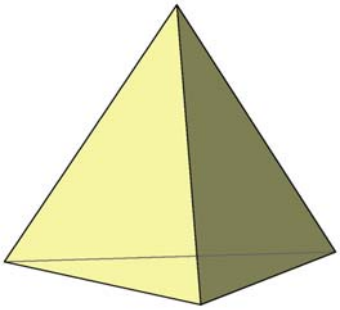
Im Pentagramm

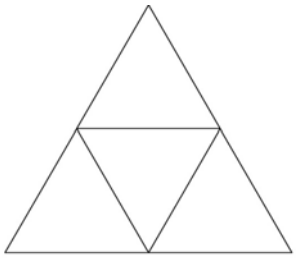
- ist die Diagonalenlänge *d* des inneren Fünfecks zugleich die Schenkellänge der fünf Zacken;
- stehen die Seitenlänge *s* des äußeren Fünfecks, die Schenkellänge *d* der Zacken und die Seitenlänge *a* des inneren Fünfecks in abnehmender Größenreihenfolge im goldenen Schnitt:

Platonische Körper

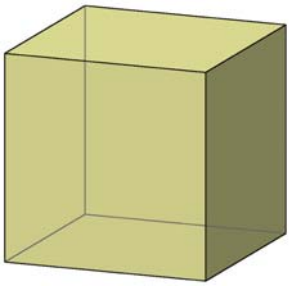
Als platonische Körper werden die regulären Polyeder bezeichnet. Polyeder („Vielflächner“) heißen Körper, die nur von ebenen Flächenstücken berandet werden; Körper mit gekrümmter Oberfläche wie z.B. Kugel, Kegel oder Zylinder gehören also nicht dazu. Ein Polyeder heißt regulär, wenn es drei Eigenschaften erfüllt: (1) Jede Fläche ist ein regelmäßiges Vieleck. (2) Alle Ecken sind kongruent (sehen genau gleich aus). (3) Alle Flächen sind kongruent. – Es gibt fünf reguläre Polyeder:

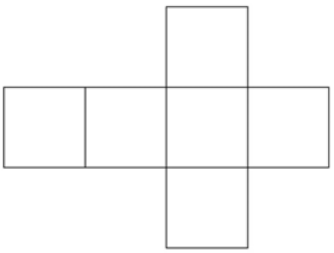
das **Tetraeder**
(»Vierflächner«)



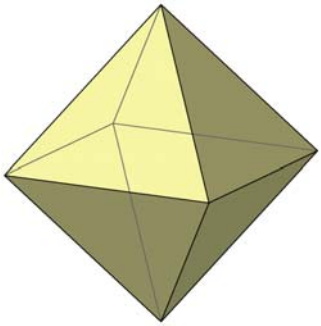


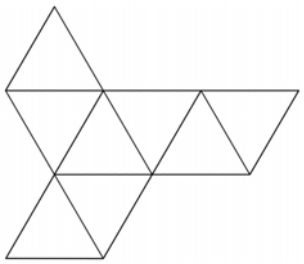
das **Hexaeder**
(»Sechsflächner«)
der Würfel



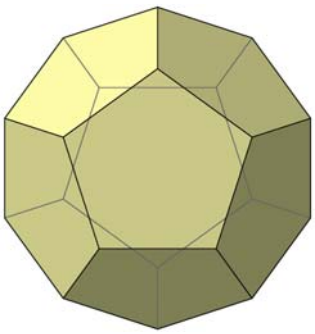


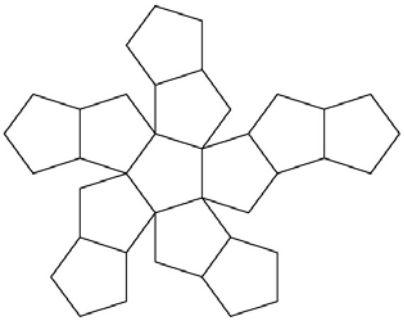
das **Oktaeder**
(»Achtflächner«)



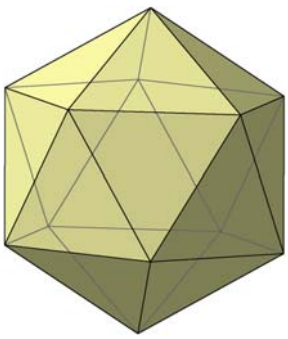


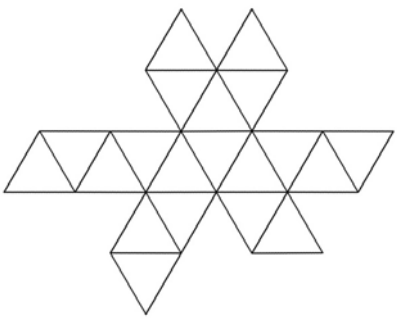
das **Dodekaeder**
(»Zwölfflächner«)





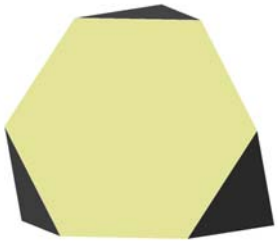
das **Ikosaeder**
(»Zwanzigflächner«)





Archimedische Körper

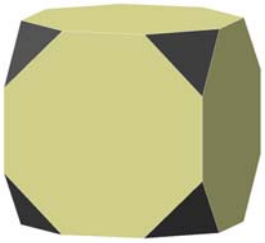
Als archimedische Körper werden die halbregulären Polyeder bezeichnet. Sie unterscheiden sich von den regulären nur dadurch, dass Eigenschaft (3) entfällt: Die halbregulären Polyeder haben stets zwei oder drei Sorten von Flächen (die innerhalb jeder Sorte wieder zueinander kongruent sind). Mehr als drei Flächensorten sind bei halbregulären Polyedern nicht möglich. – Es gibt dreizehn halbreguläre Polyeder:



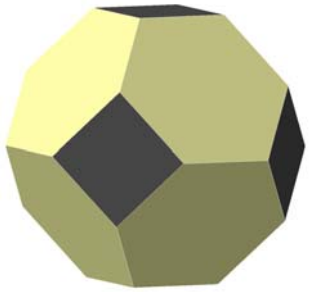
Tetraeder-Stumpf



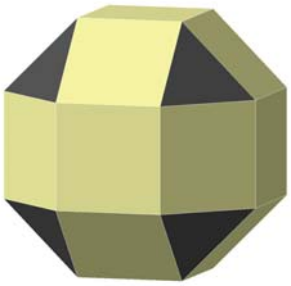
Kuboktaeder



Würfel-Stumpf



Oktaeder-Stumpf



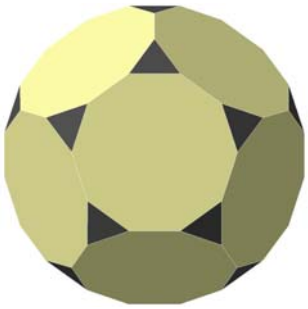
Rhombenkuboktaeder



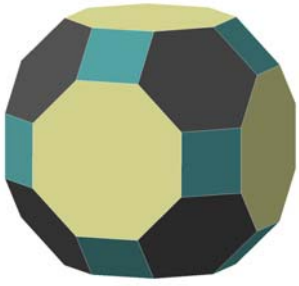
abgeschrägter Würfel (Cubus simus)



Ikosidodekaeder



Dodekaeder-Stumpf



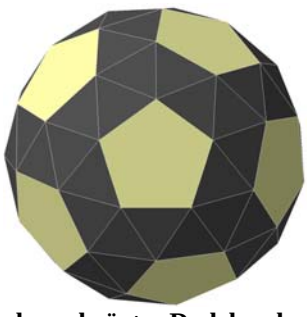
Kuboktaeder-Stumpf



Ikosaeder-Stumpf (Fußball-Polyeder)



Rhombenikosidodekaeder



abgeschrägtes Dodekaeder (Dodecaedron simum)



Ikosidodekaeder-Stumpf