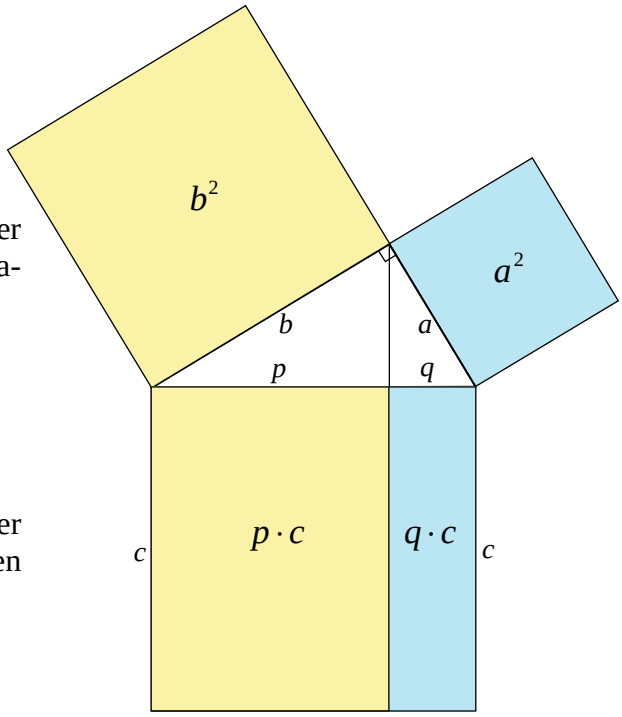
Prof. Dr. Peter Berger
Vorlesung: *Raum und Form*

# Die Satzgruppe des Pythagoras

## I. Die Satzgruppe

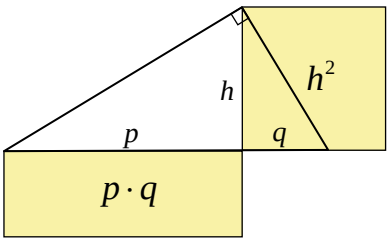



**Satz des Pythagoras**
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Kathetensatz des Euklid**
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Produkt des zugehörigen Hypotenusenabschnitts und der Hypotenuse.

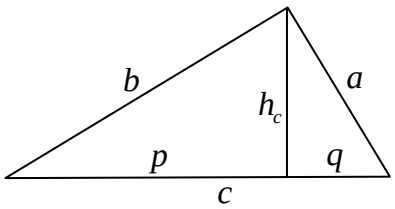
$$a^2 = qc$$
$$b^2 = pc$$




**Höhensatz des Euklid**
Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenusenhöhe gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte.

$$h^2 = pq$$

Zu jedem dieser drei Sätze gilt auch die *Umkehrung*:




**Umkehrung des Satzes des Pythagoras**
Gilt in einem Dreieck mit den Seiten *a,b,c* die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck rechtwinklig (mit der Hypotenuse *c*).

**Umkehrung des Kathetensatzes**
Gilt in einem Dreieck mit den Seiten *a,b,c* und den *c*-Seitenabschnitten *p,q* mindestens eine der Beziehungen $a^2 = qc$ oder $b^2 = pc$, so ist das Dreieck rechtwinklig (mit der Hypotenuse *c*). (Als *c-Seitenabschnitte* bezeichnen wir die beiden Teilstrecken, in die *c* vom Fußpunkt der Höhe $h_c$ zerlegt wird.)

**Umkehrung des Höhensatzes**
Gilt in einem Dreieck mit den Seiten *a,b,c* und den *c*-Seitenabschnitten *p,q* die Beziehung $h_c^2 = pq$, so ist das Dreieck rechtwinklig (mit der Hypotenuse *c*).

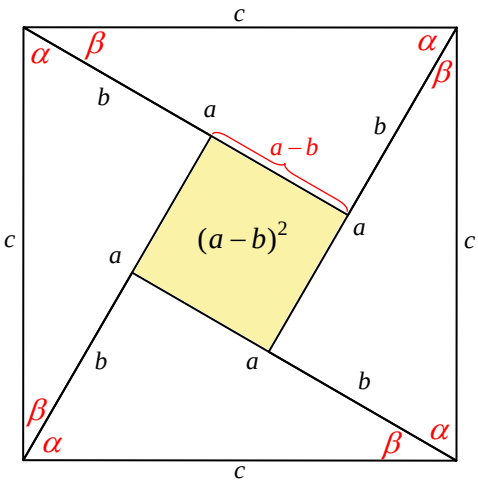
## II. Beweise der Sätze

Es gibt mehr als 400 Beweise mit teilweise sehr unterschiedlichen Beweisideen für den Satz des Pythagoras und für Katheten- und Höhensatz. Wir geben hier einige elementare, besonders einleuchtende Beispiele. Zu den einfachsten Beweismethoden gehört die *Flächenvergleichsmethode*. Die Grundidee dabei ist einfach: Man zerlegt eine geschickt gewählte Grundfläche in Teilflächen und vergleicht die Flächeninhalte der Gesamtfigur mit der Summe der Teilfiguren (siehe Beweis 1); oder man zerlegt die Grundfläche auf zwei verschiedene Arten und vergleicht die beiden Summen der Teilfiguren (siehe Beweis 2). Da es hier um rechtwinklige Dreiecke und Quadrate geht, wählt man diese natürlich als Teilfiguren.
Viele Hobbymathematiker haben nach eigenen, neuen Beweisen für den Pythagorassatz gesucht. In den Übungen finden Sie zum Beispiel einen einfachen und originellen Beweis, den der 20. Präsident der USA, *James Abraham Garfield (1831-1881)*, gefunden hat.

### 1. Satz des Pythagoras: Beweis 1 durch Flächenvergleich (Beweis von Bhaskara)

Dieser wegen seiner Kürze elegante Beweis wurde im 12. Jahrhundert von dem indischen Mathematiker *Bhaskara (1114-1185)* gefunden:

Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a,b$ und der Hypotenuse $c$. Aus vier dazu kongruenten Dreiecken kann man ein Viereck mit vier gleichen Seiten $c$ (das Viereck ist also eine Raute) zusammenlegen, indem man an jeder seiner vier Ecken die beiden Basiswinkel $\alpha,\beta$ zusammenstoßen lässt. Da diese sich zu einem rechten Winkel ergänzen, ist die Raute ein *Quadrat*.



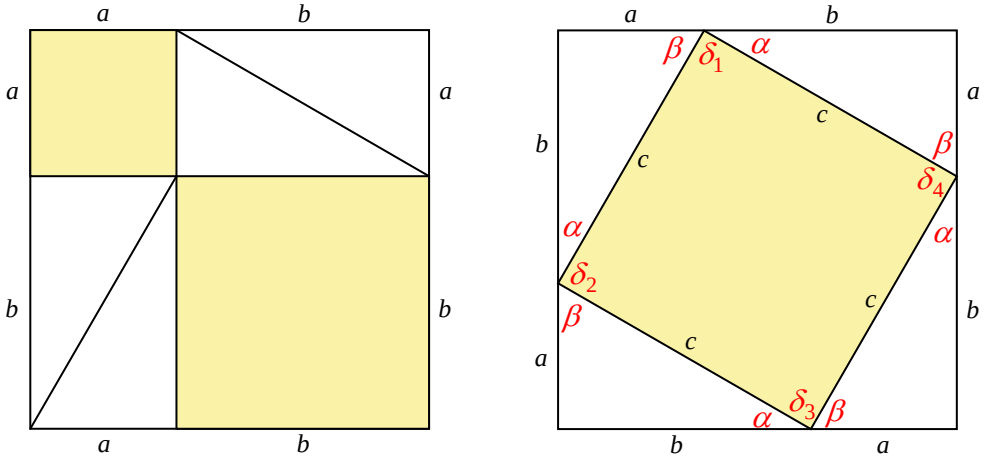

Die vier Dreiecke lassen in der Mitte des großen Quadrats ein Viereck frei, dessen vier gleiche Seitenlängen (das Viereck ist also eine Raute) die Differenz der beiden Kathetenlängen ist ($a-b$, wenn wie in der Abb. $a$ die längere Kathete ist). Da die Dreiecke rechtwinklig sind, ist auch diese innere Raute ein *Quadrat*.

Da die beiden Vierecke Quadrate sind und das gegebene rechtwinklige Dreieck den halben Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $a,b$ hat, liefert der Vergleich der Flächen:

$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

### 2. Satz des Pythagoras: Beweis 2 durch Flächenvergleich

Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a,b$ und der Hypotenuse $c$. Ein großes Quadrat mit den Seitenlängen $a+b$ kann man in vier zu dem gegebenen Dreieck kongruente Dreiecke sowie zwei Quadrate mit den Seitenlängen $a$ bzw. $b$ zerlegen.



Entfernt man die beiden kleinen Quadrate und legt man die vier rechtwinkligen Dreiecke so in die Ecken des großen Quadrates, dass jeweils zwei Katheten der Länge *a* und *b* auf den Quadratseiten liegen, so bleibt von der Quadratfläche ein Viereck mit den vier gleichen Seitenlängen *c* (das Viereck ist also eine Raute) übrig. Diese Raute muss also denselben Flächeninhalt haben wie die Summe der Flächeninhalte der beiden kleinen Quadrate, also den Inhalt $a^2+b^2$. Ein Vergleich der Winkel (s.u.) zeigt, dass alle vier Innenwinkel der Raute rechte Winkel sind. Die Raute ist also ein Quadrat und hat daher den Flächeninhalt $c^2$. Also gilt für jedes rechtwinklige Dreieck mit den Katheten *a,b* und der Hypotenuse *c*: $a^2+b^2=c^2$.

Es fehlt noch der Winkelvergleich: Die Basiswinkel $\alpha,\beta$ jedes rechtwinkligen Dreiecks ergänzen sich nach dem Innenwinkelsatz für Dreiecke zu einem rechten Winkel, da der dritte Winkel ein rechter ist. Zusammen mit jedem der vier Innenwinkel der Raute $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ ergeben $\alpha,\beta$ jeweils einen gestreckten Winkel. Jeder der vier Innenwinkel $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ ist also ein rechter Winkel.

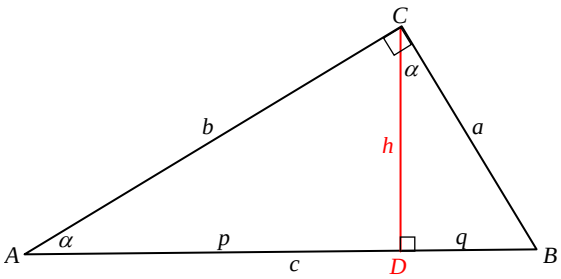
Rechtwinklige Dreiecke haben immer eine ebenso einfache wie wichtige Eigenschaft, die man in Beweisen gut verwenden kann:

**Ähnlichkeitssatz (Zerlegungssatz)**

Ein rechtwinkliges Dreieck wird durch die Hypotenusenhöhe in zwei Teildreiecke zerlegt, die beide zum Ausgangsdreieck ähnlich sind:

$$\Delta ABC \cong \Delta ACD \cong \Delta CBD$$

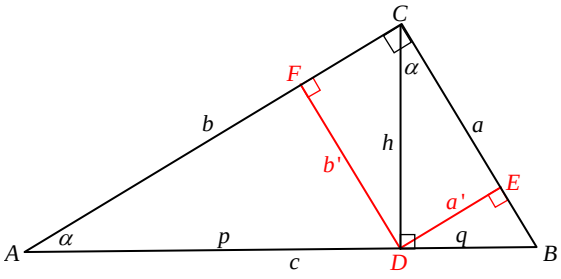
**Beweis:** Übungsaufgabe




Übrigens: Oft sagt man statt „Hypotenusenhöhe“ einfach nur „Höhe“, da im rechtwinkligen Dreieck klar ist, dass die Höhe auf der Hypotenuse gemeint ist. Wieso – könnte denn nicht eine der beiden Kathetenhöhen gemeint sein? Nun, im Prinzip schon, aber da die beiden Katheten senkrecht aufeinander stehen, ist die Höhe auf einer Kathete gerade die jeweils andere Kathete. Wer also die „Höhe auf der Kathete *a*“ meint, wird dafür einfach „Kathete *b*“ sagen.

**3. Satz des Pythagoras: Ähnlichkeitsbeweis**

Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten *a,b* und der Hypotenuse *c*. Wie gerade überlegt, sind die beiden Teildreiecke *ACD* und *CBD* zum Ausgangsdreieck *ABC* ähnlich. Also sind in diesen drei Dreiecken entsprechende Streckenverhältnisse gleich, zum Beispiel *Hypotenusenhöhe/Hypotenuse*.



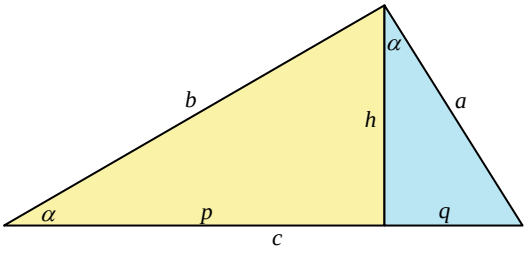

Also gilt (siehe Abb.): $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{h}{c}$. Lösen wir nach $a'$ bzw. $b'$ auf, so erhalten wir:

$$a'=a\cdot\frac{h}{c} \text{ und } b'=b\cdot\frac{h}{c} \quad (*).$$

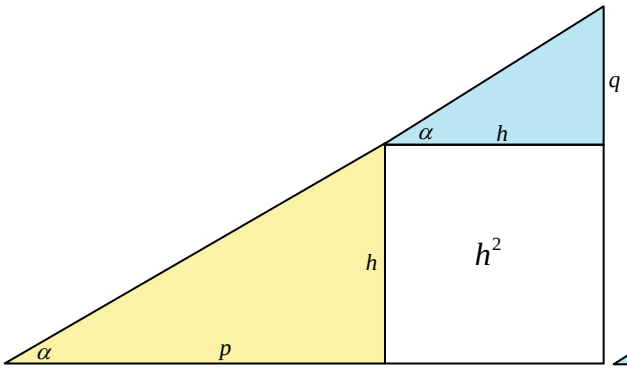
Wegen $F_{\Delta ABC}=F_{\Delta ACD}+F_{\Delta CBD}$ gilt $\frac{1}{2}\cdot c\cdot h=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a'+\frac{1}{2}\cdot b\cdot b'$, kurz $c\cdot h=a\cdot a'+b\cdot b'$, oder mit (*): $c\cdot h=a\cdot a\cdot\frac{h}{c}+b\cdot b\cdot\frac{h}{c}$. Multiplikation beider Seiten mit $\frac{c}{h}$ liefert

$$c^2=a^2+b^2.$$

## 4. Höhensatz: Beweis durch Flächenvergleich

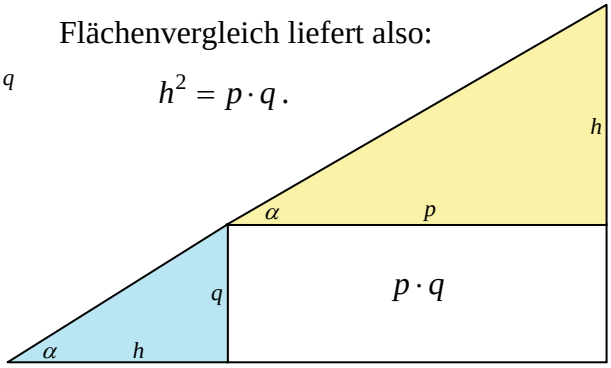



Das rechtwinklige Dreieck wird durch die Höhe in die zwei ähnlichen Teildreiecke zerlegt. Diese Teildreiecke lassen sich zum einen mit einem *Quadrat der Seitenlänge h* und zum anderen mit einem *Rechteck der Seitenlängen p,q* zu demselben großen rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $p+h$ und $q+h$ zusammenlegen.




Flächenvergleich liefert also:

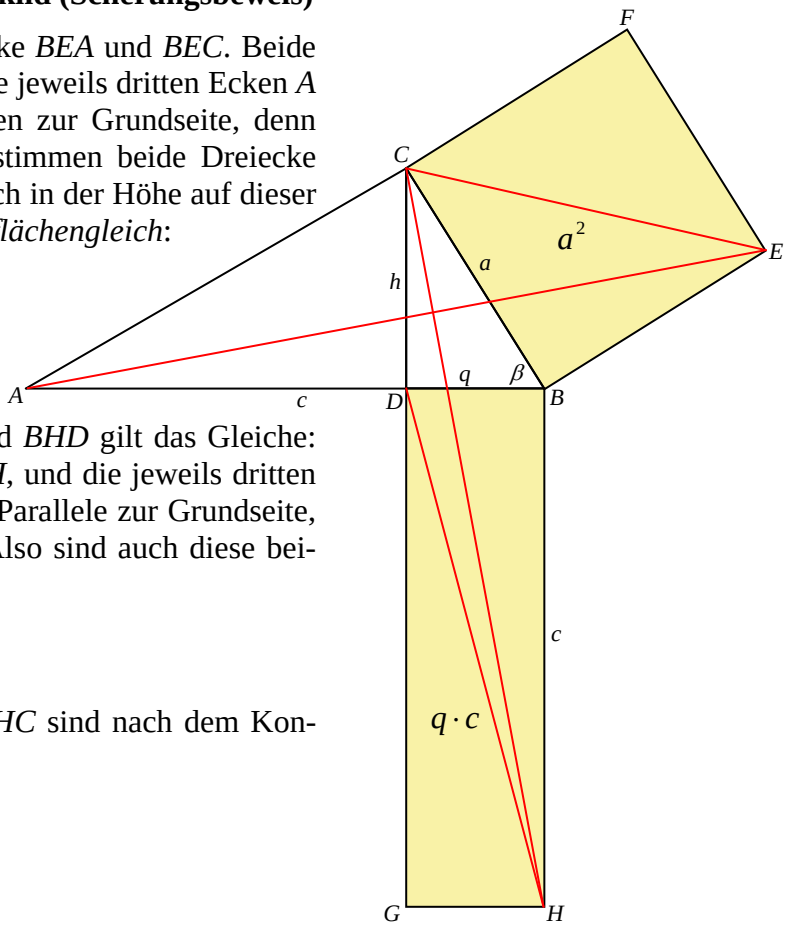
$$h^2 = p \cdot q\,.$$




## 5. Kathetensatz: Beweis von Euklid (Scherungsbeweis)

Wir betrachten die beiden Dreiecke *BEA* und *BEC*. Beide haben dieselbe Grundseite *BE*. Die jeweils dritten Ecken *A* bzw. *C* liegen auf einer Parallelen zur Grundseite, denn *BE* und *AC* sind parallel. Also stimmen beide Dreiecke sowohl in einer Grundseite als auch in der Höhe auf dieser Grundseite überein. Sie sind also *flächengleich*:

(1) $F_{\Delta BEA} = F_{\Delta BEC}$




Für die beiden Dreiecke *BHC* und *BHD* gilt das Gleiche: Sie haben dieselbe Grundseite *BH*, und die jeweils dritten Ecken *C* bzw. *D* liegen auf einer Parallele zur Grundseite, denn *BH* und *CD* sind parallel. Also sind auch diese beiden Dreiecke *flächengleich*:

(2) $F_{\Delta BHC} = F_{\Delta BHD}$

Die beiden Dreiecke *BEA* und *BHC* sind nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent, denn:

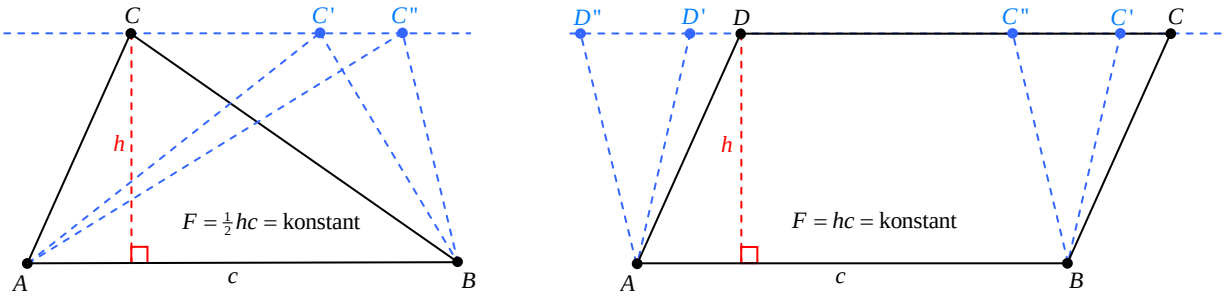
$AB = BH = c$

$BE = BC = a$

$\angle ABE = \angle HBC = 90° + \beta$

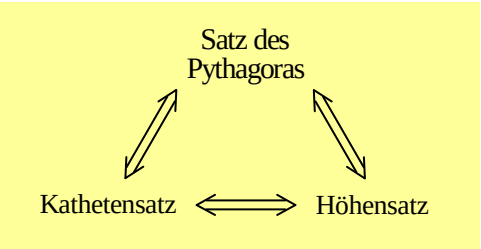
Also sind auch diese Dreiecke flächengleich: $F_{\Delta BEA} = F_{\Delta BHC}$. Nach (1) und (2) müssen dann auch die Dreiecke *BEC* und *BHD* flächengleich sein: $F_{\Delta BEC} = F_{\Delta BHD}$. Diese sind aber jeweils die Hälften des Quadrats mit Seitenlänge *a* bzw. des Rechtecks mit Seitenlängen *q,c*. Also ist $a^2 = q \cdot c\,.$

Zum Namen *Scherungsbeweis*: Das Verschieben einer Dreiecksecke parallel zur Gegenseite bezeichnet man als *Scherung des Dreiecks*. Analog ist *Scherung eines Parallelogramms* die Verschiebung zweier Ecken parallel zur Gegenseite (unter Beibehaltung ihres Abstands). Bei Scherung ändert sich der Flächeninhalt des Dreiecks bzw. des Parallelogramms nicht, da dieser allein von Grundseitenlänge und Höhe abhängt, die sich bei Scherung ja nicht ändern.




## III. Die Äquivalenz der drei Sätze

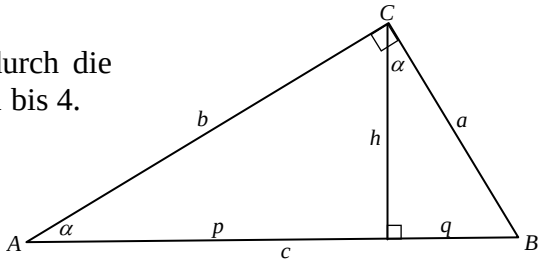
Man könnte annehmen, der Satz des Pythagoras sei der ‚allgemeinste' Satz der Gruppe, aus dem die beiden anderen hergeleitet werden. Das Bild ist nicht ganz richtig. Zwar kann man wirklich die anderen Sätze aus ihm herleiten, doch das gilt umgekehrt ebenso für die beiden anderen Sätze. Jeder der drei Sätze folgt aus jedem der übrigen Sätze. Mit anderen Worten: Alle drei Sätze sind zueinander *äquivalent*.




### Äquivalenzsatz

Der Satz des Pythagoras, der Kathetensatz und der Höhensatz sind zueinander äquivalent.

**Beweis:**
Wir führen den Beweis durch die folgenden Einzelbeweise 1 bis 4.




### 1. Herleitung des Kathetensatzes aus dem Satz des Pythagoras

Nach dem Satz des Pythagoras gilt (s. Abb. oben):

$$(1)\quad a^2 + b^2 = c^2 = (q+p)^2$$

$$(2)\quad a^2 = q^2 + h^2$$

$$(3)\quad b^2 = p^2 + h^2$$

Subtraktion von (2) und (3):

$$(4)\quad a^2 - b^2 = q^2 - p^2 = (q+p)(q-p)$$

Addition von (1) und (4):

$$(5)\quad \begin{aligned} 2a^2 &= (q+p)^2 + (q+p)(q-p) \\ &= (q+p)\big((q+p)+(q-p)\big) \\ &= (q+p)\cdot 2q = c\cdot 2q \end{aligned}$$

Division mit 2: $$(6)\quad a^2 = c\cdot q$$

*Der zweite Teil des Kathetensatzes folgt analog.*

**2. Herleitung des Satzes des Pythagoras aus dem Kathetensatz**

Nach dem Kathetensatz gilt (s. Abb. oben):

$$(1)\quad a^2 = q \cdot c$$

$$(2)\quad b^2 = p \cdot c$$

Addition von (1) und (2): $(3)\quad a^2 + b^2 = q \cdot c + p \cdot c = (q + p) \cdot c = c \cdot c = c^2$

*Mit den Einzelbeweisen 1 und 2 haben wir gezeigt, dass der Satz des Pythagoras und der Kathetensatz äquivalent sind.*

**3. Herleitung des Höhensatzes aus dem Satz des Pythagoras**

Nach dem Satz des Pythagoras gilt (s. Abb. oben):

$$(1)\quad a^2 + b^2 = c^2 = (q + p)^2$$

$$(2)\quad a^2 = q^2 + h^2$$

$$(3)\quad b^2 = p^2 + h^2$$

Addition von (2) und (3):

$$(4)\quad a^2 + b^2 = q^2 + p^2 + 2h^2$$

Gleichsetzen von (4) und (1):

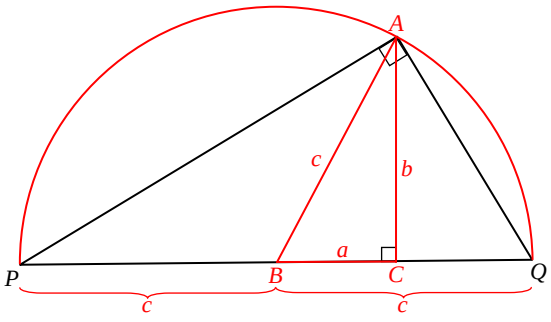
$$(5)\quad q^2 + p^2 + 2h^2 = (q + p)^2$$
$$= q^2 + 2qp + p^2$$

Subtraktion von $q^2 + p^2$:

$$(6)\quad 2h^2 = 2 \cdot p \cdot q$$
$$h^2 = p \cdot q$$

**4. Herleitung des Satzes des Pythagoras aus dem Höhensatz**

Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck *ABC* mit den Katheten *a,b* und der Hypotenuse *c*. Um *B* wird mit Radius *c* der Halbkreis über der Geraden geschlagen, auf der die Kathete *a* liegt.




Der Halbkreis schneidet diese Gerade in *P,Q*; er ist also der Thales-Kreis über *PQ*; das Dreieck *PQA* ist also rechtwinklig bei *A*; seine Hypotenusenhöhe ist *b*, seine Hypotenusenabschnitte sind $p = c + a$ und $q = c - a$.

Nach dem Höhensatz gilt im Dreieck *PQA*: $b^2 = pq = (c + a)(c - a) = c^2 - a^2$, also

$$a^2 + b^2 = c^2 \ .$$

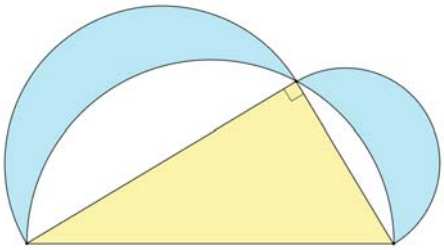
*Mit den Einzelbeweisen 3 und 4 haben wir gezeigt, dass auch der Satz des Pythagoras und der Höhensatz äquivalent sind. Dann müssen aber auch der Kathetensatz und der Höhensatz äquivalent sein.*

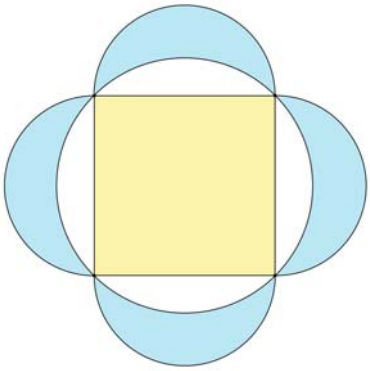
*Der Beweis des Äquivalenzsatzes ist damit abgeschlossen.*

## IV. Beispiele für Anwendungen des Satzes des Pythagoras

### Satz des Hippokrates

Die Summe der Flächeninhalte der *Möndchen des Hippokrates (lateinisch: Lunulae Hippocratis)* ist gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks bzw. des Quadrats:



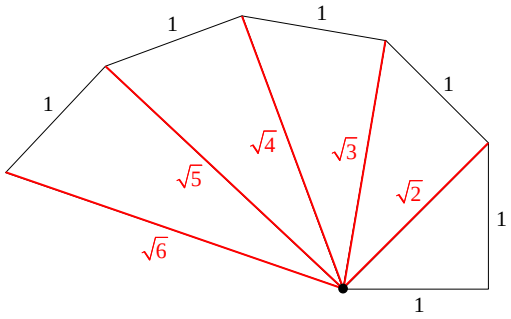


**Beweis:** Übungsaufgabe

### Satz von der Pythagoras-Spirale

Mit der *„Pythagoras-Spirale“* kann man geometrisch die Wurzeln aus allen natürlichen Zahlen ziehen (s. Abb.).

**Beweis:** Übungsaufgabe

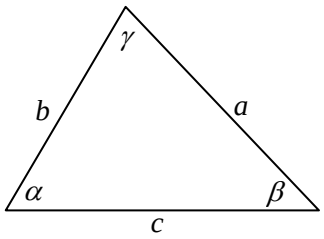



## V. Zur Satzgruppe des Pythagoras verwandte Sätze für beliebige Dreiecke

**Kosinussatz** (verallgemeinerter Satz des Pythagoras für beliebige Dreiecke)

In einem beliebigen Dreieck mit den Seiten *a,b,c* und den jeweils gegenüberliegenden Innenwinkeln $\alpha,\beta,\gamma$ gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$




Der Satz des Pythagoras ist ein *Spezialfall* des Kosinussatzes, denn im rechtwinkligen Dreieck mit $\gamma = 90°$ ist $\cos\gamma = 0$. Also ist $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$.

### Sinussatz

In einem beliebigen Dreieck mit den Seiten *a,b,c,* den jeweils gegenüberliegenden Innenwinkeln $\alpha,\beta,\gamma$, dem Flächeninhalt $F_\Delta$ und dem Umkreisradius *R* gilt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2F_\Delta} = 2R$$

Eine Folgerung aus dem Kosinussatz ist ein Satz des griechischen Mathematikers und Ingenieurs *Heron von Alexandria (1. Jahrhundert nach Chr.)*, genannt *Mechanicus (Ingenieur)*:

**Satz von Heron**

Der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks mit den Seiten *a,b,c* ist

$$F_\Delta = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$ *(Heronsche Flächenformel)*

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Dreiecksumfang ist.

Der Satz von Heron ist ein Spezialfall eines Satzes des indischen Mathematikers und Astronomen *Brahmagupta (598–668)*:

**Satz von Brahmagupta**

Der Flächeninhalt eines beliebigen Sehnenvierecks mit den Seiten *a,b,c,d* ist

$$F = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)}$$ *(Flächenformel von Brahmagupta)*

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ der halbe Sehnenviereckumfang ist.

Dass daraus der Satz von Heron folgt, ist sofort klar, wenn man bedenkt, dass sich jedes Dreieck als Sehnenviereck auffassen lässt, bei dem eine Seite (z.B. *d*) die Länge 0 hat.

Eine Folgerung aus dem Satz von Heron ist der

**Satz über den Inkreisradius**

Der Inkreisradius *r* eines beliebigen Dreiecks mit den Seiten *a,b,c* ist

$$r = \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{s}}$$