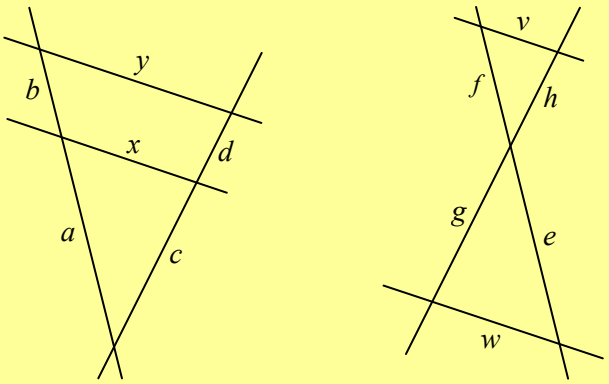
Die Strahlensätze

Prof. Dr. Peter Berger

I. Strahlensatzfiguren



Strahlensatzfiguren

Strahlensatzfigur = zwei kopunktale Geraden, die von zwei Parallelen geschnitten werden

- Der Schnittpunkt der Graden wird als *Zentrum der Strahlensatzfigur* bezeichnet.
- Die Parallelen können bezüglich des Geradenschnittpunkts auf derselben Seite liegen (Abb. links) oder auf unterschiedlichen Seiten (Abb. rechts).

Übung: Sie kennen die *Strahlensätze* noch von der Schule. *Streichen* Sie die *falschen* Identitäten!

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{c} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b}=\frac{x}{y} \qquad \frac{a}{b}=\frac{y}{x}$$

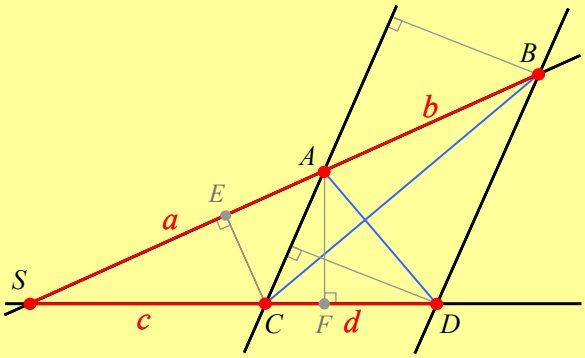
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \qquad \frac{a}{d}=\frac{b}{c} \qquad \frac{a}{d}=\frac{c}{b} \qquad \frac{a}{a+b}=\frac{x}{y}$$

$$\frac{y}{c+d}=\frac{x}{a} \qquad \frac{y}{c+d}=\frac{x}{c} \qquad \frac{g}{h}=\frac{e}{f} \qquad \frac{g}{h}=\frac{v}{w}$$

$$\frac{f}{e}=\frac{v}{v+w} \qquad \frac{e}{f}=\frac{w}{v} \qquad \frac{v}{f}=\frac{w}{e} \qquad \frac{v}{g}=\frac{w}{h}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{w}{v} \qquad \frac{v}{w}=\frac{x}{y} \qquad \frac{g-h}{e-f}=\frac{f}{h} \qquad \frac{g-h}{e-f}=\frac{h}{f}$$

II. Herleitung des *Ersten Strahlensatzes*



Strahlensatzfigur

Der *Erste Strahlensatz* sagt etwas aus über die Verhältnisse (Fachbegriff: ‚Proportionen') der Strecken, die *auf den beiden kopunktalen Geraden* liegen. Die Strecken auf den beiden Parallelen spielen beim Ersten Strahlensatz also keine Rolle, sie kommen erst beim Zweiten Strahlensatz ins Spiel. Was wir beweisen wollen, haben Sie sicher von der Schule noch gut in Erinnerung: Wir wollen zeigen, dass bei jeder Strahlensatzfigur (s. Abbildung) gelten muss:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{(i)}$$

Vielleicht aber kommt Ihnen zuerst eine andere Proportionsgleichung in den Sinn, z.B.

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \quad \text{(ii)}$$

Wir beweisen hier zunächst die Gleichung (i); die Gleichung (ii) ist aber dazu äquivalent, wie wir anschließend schnell sehen werden.

Wir führen die Herleitung des Ersten Strahlensatzes hier besonders ausführlich vor. Es soll uns dabei nicht nur um den Beweis selbst gehen, sondern vor allem um die *Ideen,* die hinter den einzelnen Beweisschritten stecken. Vielleicht sollten wir lieber sagen: Es geht um die *‚Hoffnungen'*, die wir mit den einzelnen Schritten verbinden – denn zu Beginn eines Beweisprozesses weiß man ja nie, ob das, was man tut, auch wirklich zum Ziel führt.

Diese Unsicherheit sollte aber niemanden stören, der sich ans Beweisen macht; sie gehört zum Beweisen – wie zu jedem anderen kreativen Prozess auch – einfach dazu. Sie ist nicht nur kein Problem, sondern gerade das, was am Beweisen (wie bei jeder Denk-Herausforderung) gerade ‚Spaß macht. Ein Sudoku zu lösen macht Ihnen ja auch nicht deshalb Spaß, weil Sie schon wissen, wie die Lösung aussieht – der Spaß am Problemlösen entsteht für Sie doch gerade aus der Ungewissheit, ob Sie es schaffen werden. Ohne Unsicherheit keine Herausforderung – und also auch kein Spaß!

Idee 1: Die vier Strecken a,b,c,d als Seiten von Dreiecken ins Spiel bringen!

Da wir eine Aussage über diese vier Strecken beweisen wollen, müssen wir sie irgendwie ins Spiel bringen. Zunächst tun wir das mit den beiden ‚hinteren' Strecken $b=AB$ und $d=CD$. Dazu betrachten wir zwei Dreiecke, zu denen sie als Seiten gehören, nämlich die Dreiecke *CBA* und *CDA*. Diese Dreiecke haben eine wichtige Gemeinsamkeit – sie sind flächengleich:

$$F_{\Delta CBA}=F_{\Delta CDA} \quad (1)$$

Denn beide Dreiecke haben die gemeinsame Seite *AC*, und bezüglich dieser Grundseite haben sie sogar auch dieselben Höhen. Die dritten Dreiecksecken *B* bzw. *D* liegen ja (da es sich um eine Strahlensatzfigur handelt) auf einer Parallelen zur Grundseite *AC*; Parallelen aber haben

überall denselben Abstand. Folglich sind die beiden Lote von *B* bzw. *D* auf die Gerade *AC* (dies sind ja die beiden Dreieckshöhen) gleich lang. Nach der Dreiecksflächenformel *‚halbe Grundseite mal Höhe'* sind die Flächen beider Dreiecke also gleich.

Um auch die beiden anderen Strecken $a = SA$ und $c = SC$ ins Spiel zu bringen, betrachten wir das Dreieck *SCA*, zu denen beide als Seiten gehören. Da wir etwas über die Verhältnisse von Strecken beweisen wollen, betrachten wir die Verhältnisse der Dreiecksflächen. Nach Gleichung (1) wissen wir sofort:

$$\frac{F_{\Delta SCA}}{F_{\Delta CBA}} = \frac{F_{\Delta SCA}}{F_{\Delta CDA}} \quad (2)$$

Idee 2: Die vier Strecken a,b,c,d so in diese Gleichung bringen, dass man kürzen kann!

Noch haben wir unsere Idee 1 nicht ganz verwirklicht. In Gleichung (2) stehen ja Flächeninhalte und nicht die Strecken *a,b,c,d*. Die kommen aber sofort in die Gleichung, wenn wir die Dreiecksflächenformel anwenden, denn dann können wir jede Dreiecksfläche als Produkt von Streckenlängen schreiben (*Dreiecksflächeninhalt = halbe Grundseite mal Höhe*).

Es ist z.B. $F_{\Delta SCA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SA} \cdot \overline{EC}$. Wenn wir trickreich vorgehen, können wir nun für das Dreieck *CBA* die Grundseite so auswählen, dass die zugehörige Höhe zugleich die Höhe *EC* des Dreiecks *SCA* ist, die wir benutzt haben. Nämlich: $F_{\Delta CBA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EC}$. Wieso ist das ein Trick? Nun, das sehen wir sofort, wenn wir die linke Seite von Gleichung (2) damit neu schreiben:

$$\frac{F_{\Delta SCA}}{F_{\Delta CBA}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{SA} \cdot \overline{EC}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EC}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{AB}} = \frac{a}{b} \quad (3)$$

Durch den Trick haben wir erreicht, dass wir die Streckenlänge $\overline{EC}$ kürzen können! Dadurch erhalten wir sofort die linke Seite der Gleichung, die wir beweisen wollen. Das Gleiche machen wir nun auch für die rechte Seite von Gleichung (2).

Zunächst können wir für das Dreieck *CDA* die Flächeninhaltsformel anwenden, z.B.: $F_{\Delta CDA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AF}$. Um kürzen zu können, dürfen wir nun aber für das Dreieck *SCA* nicht dieselbe Formel verwenden wie eben. Wir müssen jetzt eine andere Grundseite wählen, damit die zugehörige Höhe dieselbe ist wie die Höhe, die wir für das Dreieck *CDA* verwendet haben, also *AF*. Geht das denn? Ja, erfreulicherweise geht das (sonst könnten wir unsere schöne Beweisidee an dieser Stelle auch leider vergessen). Nämlich so: $F_{\Delta SCA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{AF}$.

Vielleicht sehen Sie das nicht sofort? Das macht nichts. Dann trainieren Sie jetzt halt erst einmal, zu jeder Seite eines Dreiecks die zugehörige Höhe zu finden. Diese ‚geometrische Sehfähigkeit' muss man ein wenig trainieren. Die Zeit dazu sollten Sie sich unbedingt nehmen!

Damit können wir auch die rechte Seite von Gleichung (2) neu schreiben:

$$\frac{F_{\Delta SCA}}{F_{\Delta CDA}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{SC} \cdot \overline{AF}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{AF}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{CD}} = \frac{c}{d} \quad (4)$$

Wenn wir nun die beiden Gleichungen (3) und (4) in Gleichung (2) einsetzen, erhalten wir sofort unsere Behauptung:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Damit haben wir aber nur eine einzige Proportionsgleichung bewiesen. Zum ersten Strahlensatz gehören aber doch noch mehr! Müssen wir die etwa alle auch so aufwändig beweisen? Nein, erfreulicherweise nicht. Die anderen Gleichungen sind nämlich zu dieser einen alle äquivalent, wie wir durch einfache Äquivalenzumformungen zeigen können:

Idee 3: Die übrigen Proportionsgleichungen aus der bewiesenen äquivalent umformen!

z.B. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ oder $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

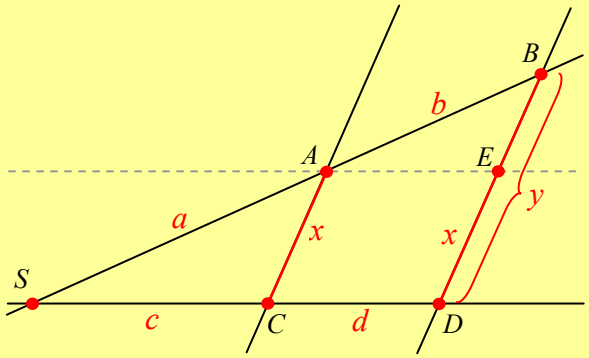
oder $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{a}+\frac{a}{a}=\frac{d}{c}+\frac{c}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$ und ebenso für alle Kehrwerte.

Was wir damit gezeigt haben, können wir allgemein so formulieren:

Erster Strahlensatz

In einer Strahlensatzfigur sind entsprechende Streckenverhältnisse auf den kopunktalen Geraden stets gleich.

III. Herleitung des *Zweiten Strahlensatzes*



Strahlensatzfigur

Der *Zweite Strahlensatz* sagt etwas aus über die Proportionen der Strecken, die *auf einer der kopunktalen Geraden und auf den beiden Parallelen* liegen (also *x,y* und z.B. *a,b*).

Den Zweiten Strahlensatz kann man mit einem besonders eleganten Trick beweisen: Wir ergänzen die Strahlensatzfigur durch eine Parallele zu einer der kopunktalen Geraden. So erhalten wir zwei Parallelen-Paare, und damit zwei Strahlensatzfiguren in einer. Dadurch können wir die beiden ursprünglichen Geraden-Paare – also die beiden kopunktalen Geraden und die beiden Parallelen – die Rollen tauschen lassen und den Zweiten Strahlensatz mit Hilfe des ersten beweisen! Das geht ebenso verblüffend wie schnell. Nämlich so:

Idee 1: Konstruiere die Parallele zu SD durch A.

Den Schnittpunkt dieser Parallele mit der Geraden *DB* nennen wir *E*. Da das Viereck *ACDE* ein Parallelogramm ist, gilt:

$$\overline{ED}=\overline{AC}=x$$

Idee 2: Ändere nun den Blick und betrachte die Strahlensatzfigur mit Zentrum B.

Nach dem Ersten Strahlensatz gilt in dieser Strahlensatzfigur (s. Abbildung oben):

$$\frac{a+b}{a} = \frac{y}{\overline{ED}} = \frac{y}{x}$$

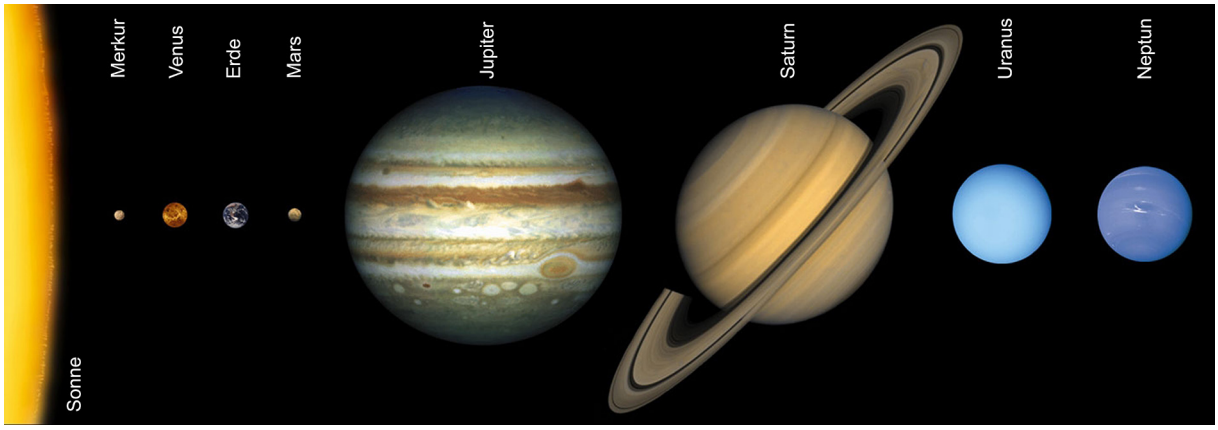
Daraus folgen auch die übrigen Proportionsgleichungen auf einer der kopunktalen Geraden und den beiden Parallelen:

z.B. $\frac{a+b}{a} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow (a+b)x = ay \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{a+b}{y}$, und wegen $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ (1. Strahlensatz) gilt auch $\frac{c+d}{c} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{c}{c+d} = \frac{x}{y}$ und ebenso für die übrigen Proportionsgleichungen, die Sie aus der Schule kennen.

Zweiter Strahlensatz

In einer Strahlensatzfigur sind entsprechende Streckenverhältnisse auf einer der kopunktalen Geraden und den beiden Parallelen stets gleich.

IV. Strahlensätze und Astronomie: Sonne, Mond und Finsternisse



Sonnensystem: Größenvergleich
(Durchmesser maßstabsgerecht, Abstände nicht)

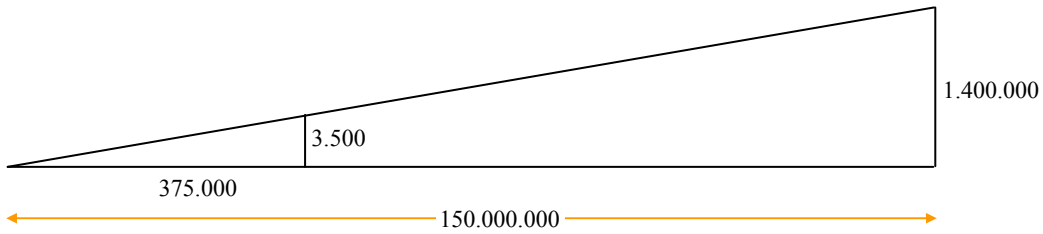
Planeten kreisen um Sterne, Monde um Planeten. Im System des Sternes, den wir *Sonne* nennen, ist das auch so. Von den acht Planeten der Sonne haben zwei keinen Mond (Merkur, Venus), und fünf haben mehrere Monde. Nur die Erde hat einen einzigen Mond.

Auf der Erde gibt es eine astronomische Besonderheit, einen geometrischen Zufall: Sonne und Vollmond erscheinen von der Erde aus als nahezu gleich große Kreisscheiben.

Das lässt sich leicht mit dem zweiten Strahlensatz erklären: Zufälligerweise nämlich stehen die Durchmesser von Sonne und Mond mit ihren jeweiligen Erdabständen ziemlich genau im selben Verhältnis. Manchmal ist der Vollmond für uns etwas größer, manchmal etwas kleiner als die Sonne – abhängig vom aktuellen Mondabstand von der Erde. Dieser ändert sich periodisch im Monatslauf ein wenig, da die Mondbahn nicht genau kreisförmig, sondern ein wenig elliptisch ist. Manchmal ist der Mondabstand gerade so groß, dass diese Verhältnisse von

Durchmesser und Abstand exakt gleich sind. Dann sind Sonnen- und Mondscheibe für den Betrachter auf der Erde exakt gleich groß.

	Durchmesser	Entfernung von der Erde
Mond	3.500 km	Durchschnitt: 363.000 km möglich auch: 375.000 km
Sonne	1.400.000 km	150.000.000 km



$$\frac{3.500}{375.000} = 0,009\overline{3} = \frac{1.400.000}{150.000.000}$$

Soweit die kleine Anwendung der Strahlensätze. – Vielleicht sollten wir aber unseren Ausflug in die Astronomie ein wenig ausdehnen und eine einfache, aber wichtige astronomische Frage klären, die sich uns im Alltag in diesem Zusammenhang immer wieder stellt. Sie führt zwar vom Thema ‚Strahlensätze' etwas weg, aber als Mathelehrer(in) muss man das einfach wissen, denn es ist Geometrie.

Was haben Vollmond und Neumond mit Mond- und Sonnenfinsternissen zu tun?

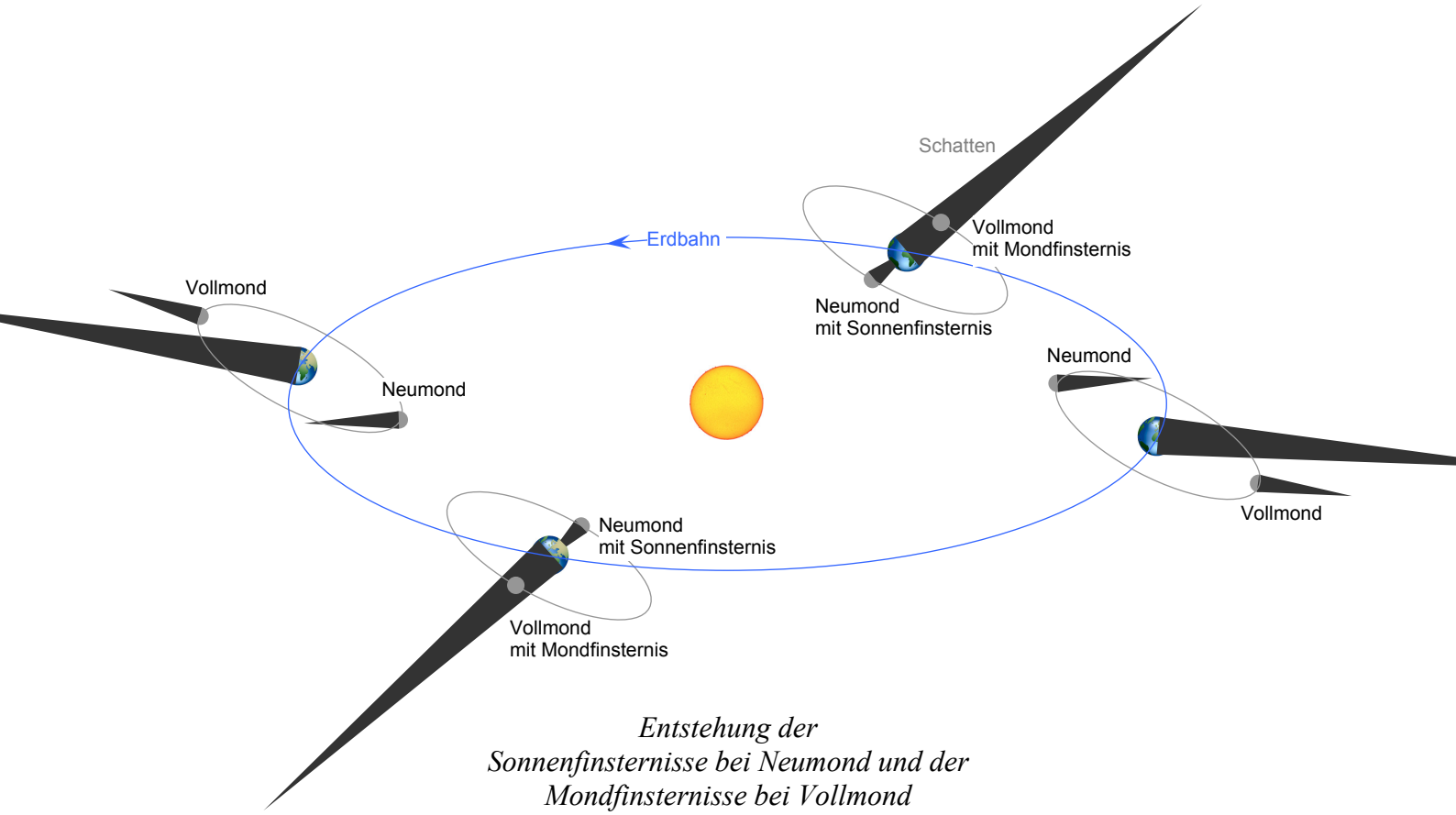


Erde *(Abstand und Größe maßstabsgerecht.)* *Mond*

Bei *Vollmond* steht die *Erde* zwischen Mond und Sonne; bei *Neumond* steht der *Mond* zwischen Erde und Sonne (s. Abb. nächste Seite).

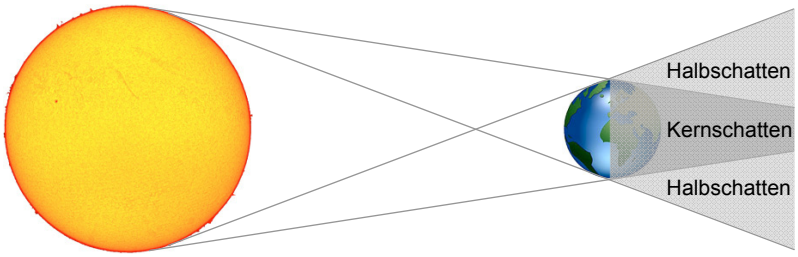
Bei Vollmond geht für uns auf der Erde der Mond genau dann auf, wenn die Sonne untergeht (und umgekehrt). Da die Mondbahn nicht genau in der Ebene der Erdbahn *(Ekliptik)* um die Sonne liegt, sondern etwas schief dazu verläuft, stehen bei Vollmond Erde, Mond und Sonne zumeist nicht genau in einer Linie, der Mond steht häufig also etwas höher oder tiefer. Steht er hoch bzw. tief genug, so liegt der Mond bei Vollmond von der Nachtseite der Erde aus gesehen im vollen Sonnenlicht, er erscheint also als beleuchtete Kreisscheibe.

Stehen bei *Vollmond* alle drei Körper jedoch mehr oder weniger genau auf einer Linie (was nur relativ selten geschieht, nämlich dann, wenn der Mond in der Nähe eines der beiden Schnittpunkte der Mondbahn mit der Ekliptik steht), so fällt kein Sonnenlicht auf den Mond, da es von der Erde abgedeckt wird. Der Mond liegt dann ganz im *Kernschatten* der Erde, und es entsteht eine *totale Mondfinsternis*. Eine *partielle Mondfinsternis* entsteht, wenn der Mond ein wenig höher oder tiefer steht, so dass nur ein Teil von ihm noch im Kernschatten liegt.



Entstehung der Sonnenfinsternisse bei Neumond und der Mondfinsternisse bei Vollmond
(Abb. nicht maßstabsgerecht)

Wandert der Mond überhaupt nicht durch den Kernschatten der Erde, sondern nur durch ihren *Halbschatten*, so spricht man von einer *Halbschattenfinsternis*. Dabei wird der Mond nur mehr oder weniger stark abgedunkelt und erscheint oft in einem magisch anmutenden kupferroten Halblicht.

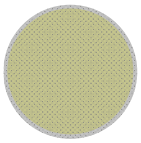


Entstehung von Kern- und Halbschatten der Erde (für Mond analog)
(Abb. nicht maßstabsgerecht)

Bei *Neumond*, wenn also der Mond von der Erde aus gesehen vor der Sonne steht, gehen Mond und Sonne für uns auf der Erde zur gleichen Zeit auf und unter. In den meisten Fällen steht der Mond dann hoch bzw. tief genug, so dass er die Sonne nicht bedeckt. Er ist dann nicht zu sehen, da er der Erde seine unbeleuchtete Seite zuwendet. Steht er aber vor der Sonne, so kommt es zu einer *partiellen* oder einer *totalen Sonnenfinsternis*. Sie ist nur von den Orten auf der Erdoberfläche zu sehen, die im Mondschatten liegen. Während der gleichmäßig dunkle *Kernschatten* des Mondes auf der Erdoberfläche, von dem aus die Sonnenfinsternis total erscheint, nur einige hundert Kilometer breit ist, erreicht die Breite des erheblich helleren *Halbschattens* mit seinem fließenden Übergang zum normalen Tageslicht, von dem aus nur eine partielle Finsternis zu sehen ist, einige tausend Kilometer.

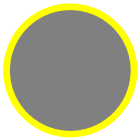
Bei einer Sonnenfinsternis bewegt sich der Kernschatten des Mondes über die Erdoberfläche. Richtiger gesagt: er rast. Seine Geschwindigkeit ergibt sich als Differenz der Bahngeschwindigkeit des Mondes und der Geschwindigkeit, mit der sich der Beobachtungsort infolge der Erdrotation bewegt. Am Äquator rast der Kernschatten mit etwa 1700, nahe den Polen mit rund 3400 Stundenkilometern über die Erde – also rund mit der anderthalb- bis dreifachen Schallgeschwindigkeit!

Wegen der oben beschriebenen Besonderheit, dass Mond- und Sonnenscheibe von der Erde aus als etwa gleichgroße Kreisscheiben zu sehen sind, kann bei großem Mondabstand die Mondscheibe etwas zu klein sein, als dass sie die Sonnenscheibe ganz zu verdecken vermag. Dann bleibt von der Sonne auch bei maximaler Bedeckung ein mehr oder weniger schmaler Lichtring sichtbar und es entsteht eine *ringförmig totale Sonnenfinsternis*. Darum gibt es bei Neumond



manchmal eine *totale Sonnenfinsternis*

und manchmal eine *ringförmig totale Sonnenfinsternis*.



Läge die Mondbahn exakt in der Erdbahn, so gäbe es bei jedem Vollmond eine totale Mondfinsternis und bei jedem Neumond eine totale Sonnenfinsternis.

Weil sich der Mondabstand im Verlauf einer Nacht natürlich nicht merklich ändert, bleibt die Größe der Vollmondscheibe oder der Mondsichel während einer Nacht stets gleich. Trotzdem ist unsere Wahrnehmung jedes Mal eine ganz andere. Unmittelbar nach Mondaufgang erscheint der Mond deutlich größer zu sein als später, wenn er hoch am Himmel steht. Viele Menschen glauben daher fälschlicherweise, dass sich der Mond in einer Nacht von uns entfernt und daher kleiner wird.

Wenn Sie ein kreisförmiges Stück Pappe geeigneter Größe ausschneiden, so dass Sie damit bei ausgestrecktem Arm die Mondscheibe kurz nach Mondaufgang genau abdecken können, werden Sie beobachten, dass dasselbe Stück auch dann den Mond noch exakt bedeckt (und nicht etwa zu groß ist), wenn der Mond ganz hoch steht. So können Sie mit einfachsten Mitteln die „Mondtäuschung“, der die meisten Menschen unterliegen, wirklich als das entlarven, was sie ist – eben eine bloße Täuschung.

Die Entstehung dieser Fehlwahrnehmung ist bis heute nicht wirklich zufriedenstellend geklärt. Sie dürfte damit zusammenhängen, dass wir die Mondscheibe unmittelbar nach Aufgang, wenn der Mond also horizontnah steht, unwillkürlich mit bekannten Größen am Horizont vergleichen und dadurch zu einer Überschätzung seiner Größe verführt werden. Diese Vergleichsmöglichkeiten fallen weg, wenn der Mond hoch steht. Zusätzlich dürfte dabei auch die relative Helligkeit eine Rolle spielen: Der hoch stehende Mond erscheint am schwarzen Nachhimmel sehr viel heller als der tief stehende Mond in der teilbeleuchteten Horizontumgebung.